الجمهورية العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

روّاد الرّياضيات

تأليف : ألفريد هوبر
ترجمة : الدكتور لبيب جورجي
مراجعة : رمضان أمين الشريف
تقديم : الدكتور محمد مرسي أحمد.

مجموعة الكتب الدراسية والمراجع الأمريكية المترجمة

رواد الرياضيات

طبعة خاصة بوزارة التربية والتعليم
وغير مخصصة للبيع

روّاد الرياضيات

تأليف

الفرد هوبر

ترجمة

الدكتور لبيب جورجي

مراجعة

رمضان أمين الشريف

تقديم

الدكتور محمد مرسي أحمد

الناشر
مكتبة النهضة المصرية
لأصحابها حسن محمد وأولاده
٩ شارع عدلي باشا بالقاهرة

دار الجيل للطباعة ١٤ قصر اللؤلؤة - الفجالة
تليفون ٩٠٥٢٩٦

المشتركون فى هذا الكتاب

المؤلف : الفريد هوبر

عمل ناظرا لمدرسة هيلستون بانجلترا ثم مدرساً بالسلاح الجوى أثناء الحرب العالمية الثانية ، وألف أول كتاب له فى الرياضيات لاقى نجاحا كبيراً ونشر سنة ١٩٤١ فى الولايات المتحدة . وبعد انتهاء الحرب تلقى دعوة من جامعة وليامز بالولايات المتحدة حيث عمل أستاذاً مساعداً للرياضيات . ألف عدة كتب دراسية فى حساب المثلثات والجبر والحساب .

المترجم : الدكتور لبيب جورجى

أستاذ التربية وطرق تدريس الرياضيات بكلية المعلمين . حصل على بكالوريوس العلوم من جامعة القاهرة عام ١٩٤١ ، وعلى الماجستير فى التربية من جامعة عين شمس عام ١٩٤٥ ، وعلى الدكتوراه من جامعة برمنجهام بانجلترا عام ١٩٥٧ . عمل مدرساً ومدرساً أول للرياضيات بالمدارس الثانوية لمدة عشر سنوات . ألف كتاب Understanding in Mathematics قامت بنشره جامعة برمنجهام بانجلترا. ألف ثلاثة كتب فى الرياضيات العامة ، أقرتها وزارة التربية والتعليم :واحداً منها للمدارس الإعدادية والاثنين الآخرين لدور المعلمين والمعلمات . كما اشترك فى تأليف ثمانية كتب فى الحساب للمدارس الابتدائية .

المراجع : رمضان أمين الشريف

كبير مفتشى الرياضيات ، تخرج فى مدرسة المعلمين العليا سنة ١٩٢٧ شعبة الرياضيات ، وعمل فى التدريس بالمدارس الثانوية ، ثم مدرساً أول ، ثم

هذه الترجمة مرخص بها ، وقد قامت مؤسسة فرانكلين للطباعة والنشر بشراء حق الترجمة من صاحب هذا الحق .

This is an authorized translation of MAKERS OF MATHEMATICS by Alfred Hooper. Copyright 1948, by Random House, Inc. Published by Random House, Inc., New York .

لماذا هذا الكتاب

اتجهت الدولة إلى تعريب الدراسة فى الكليات غير النظرية التى درجت على تدريس مقرراتها واستخدام المراجع اللازمة لهذه الدراسة باللغة الأجنبية ، كما اتجهت إلى الإفادة إلى أقصى حد من الإمكانيات المتاحة لنقل خير المراجع الأجنبية إلى اللغة العربية بوساطة الكفايات العربية المتخصصة فى الترجمة والمراجعة .

ولقد اختارت الجهات العلمية والتعليمية والثقافية الكثير من الكتب لترجمتها فى مختلف فروع العلوم كالكيميا ، والفيزيقا ، والجيولوجيا ، والرياضيات والآلات ، والكهربا ، والمعادن ، والحركات ، والنبات ، والزراعة ، والأحياء ، والحشرات ، والطب ، والاجتماع ، والتاريخ ، والتربية ، والتوجيه المهنى ، والفنون ، والمسرحيات ، والاقتصاد المنزلى ، والتصوير . . . الخ .

واختيار الكتاب الذى بين أيدينا « رواد الرياضيات » جاء وليد دراسات متصلة بين الهيئات العلمية فى الجمهورية العربية المتحدة والهيئات العلمية التى نبت بينها الكتاب ، وهو من الكتب التى طلبتها إدارة تفتيش الرياضيات بوزارة التربية والتعليم للترجمة بناء على اقتراح تقدم به الدكتور لبيب جورجى ، أستاذ طرق تدريس الرياضيات بكلية المعلمين ، إلى كبير مفتشى الرياضيات بالوزارة ، باعتبار الكتاب مرجعاً هاماً فى نشأة الرياضيات يسد فراغا فى المكتبة العربية . فالكتاب يتناول بالتفصيل تاريخ الرياضيات منذ عصر الإنسان البدائى

إلى عصور نيوتن ، وليبنتز ، وجاوس ، حتى يصل بنا إلى ما بلغته الرياضيات فى يومنا الحاضر .

وقد ووفق على ترجمته كمرجع تزود به مكتبات المدارس ليفيد منه طلبة القسم العامى فى المدارس الثانوية المختلفة ودور المعلمين والمعلمات ، كما يفيد جميع المشتغلين بمادة الرياضيات ، وخاصة معلمى هذه المادة فى جميع مراحل التعليم . وسعياً لإخراج الكتاب فى صورته العربية على أكمل وجه اختير لترجمته ومراجعته أساتذة متخصصون فى مادته ، فقام الدكتور لبيب جورجى بالترجمة ، والأستاذ رمضان أمين الشريف ، كبير مفتشى الرياضيات ، بالمراجعة ، كما تفضل الأستاذ الدكتور محمد مرسى أحمد مدير جامعة عين شمس بالتقديم له .

وليس ثمة جدال فى أن أبناءنا الطلاب سوف يفيدون من هذا المرجع الوافى بعد أن تم نقله إلى العربية خدمة للدارسين والقراء بوجه عام .

تقديم

بقلم

الدكتور محمد مرسى أحمد

مدير جامعة عين شمس

الرياضة ، وهى أكمل العلوم ، تميزت بالتجريد التام ، وسلامة المنطق ، والاكتفاء الذاتى ، فإذا رتبت العلوم بحسب استغناء بعضها عن بعض ، جاءت الرياضة فى أول القائمة . وتعتبر معرفة الإنسان للأعداد مجردة عن مدلولاتها المادية من أكبر الخطوات الفكرية فى تاريخ الإنسانية ، ثم تلا ذلك التجريد فى الهندسة ، فقد ذهب بعض المؤرخين إلى أن المصريين القدماء مارسوا نوعا من الهندسة العملية ، تساعدهم على تقسيم الأرض بعد انحسار مياه فيضان النيل ، لقرون عدة قبل أن يكتب إقليدس كتابه المشهور فى « الأصول » والذى ضمنه المسلمات والتعريفات والنظريات الهندسية . وسار الحساب والهندسة وبعض النظريات ، مما صار بعد ذلك علم الجبر ، سارت هذه العلوم مع العلوم الفلكية قرونا إلى أن جمع محمد بن موسى الخوارزمى كتابه فى الجبر والمقابلة ، واختصر اسم الكتاب فيما بعد إلى كتاب الجبر ، وأصبح فرعا هاما من فروع العلوم الرياضية . ومن الطريف أن نذكر أن الخوارزمى لم يستخدم الرموز الجبرية المعروفة لنا فى كتابه عن الجبر ، وإنما رمز إلى المجهول « بالشيء »، وإلى مربعه « بالمال » . أما الحد الذى لا يدخل فيه المجهول ولا مربعه فقد أسماه العدد المطلق ، وأصبحت عنده ثلاثة مسميات : أموال وجذور وأعداد مطلقة ، لا تنسب إلى جذر ولا إلى مال ، وصاغ من هذه الحدود

أنواعا من المعادلات ، واستخدم كلمة « تعدل » للدلالة على المعادلة ، فهو يقول مثلا : « مال وثلاثة من أشياء تعدل أربعة من العدد » .

ولم يستخدم الكميات السالبة ولا التخيلية طبعا ، وقد أسمى المعادلات ذات الدرجة الثانية ، والتى لا يمكن حلها بالأعداد الحقيقية المعروفة حينذاك ، بالمعادلات المستحيلة .

وترجمت كتب الإغريق والعرب إلى اللاتينية ، وأصبحت المراجع الهامة فى الجامعات الأوروبية ، إلى أن جاء عصر النهضة فتفتحت أمام الرياضة أبواب جديدة كانت السبب فى خصبها وإثرائها ، وجعلتها الآن من أكبر أدوات الكشف فى كثير من العلوم .

أخذ التجديد فى الرياضيات صوراً عدة ، ففى الناحية الهندسية كانت النظرية التى أقضت مضاجع الإغريق والعرب على حد سواء هى نظرية التوازى المشهورة التى وضعها إقليدس كمسلمة من مسلماته ، لم يحاول إثباتها ، وهى فى إحدى صورها تقول بأنه : « من نقطة خارجة عن خط مستقيم لا يمكن رسم أكثر من مستقيم واحد يوازى ذلك المستقيم » .

وبإسقاط هذه المسلمة أمكن بناء أنواع جديدة من الهندسة ، عرفت بالهندسة اللاإقليدية ، كانت فى نظر علماء نظرية النسبية هى هندسة الكون الأكبر ، وإنما هندسة إقليدس هى تقريب أولىّ لها ، تصح فى المسافات المحددة التى يتحرك فيها عالمنا المحدود .

كذلك عم الحساب ؛ فبعد أن كانت الأعداد المعروفة هى الأعداد الطبيعية الموجبة ١ ، ٢ ، ٣ ، ... وهى المستخدمة فى العد أو الترتيب ، أصبح العدد

إما موجبا وإما سالبا ، ثم خطوة أخرى أصبح إما حقيقيا وإما تخيليا . وأدخلت فكرة التغير فى الجبر ، فكان منها علوم التفاضل والتكامل ، كل ذلك تم فى القرنين السابع عشر والثامن عشر ، ومنذ ذلك الحين والعلوم الرياضية تنمو وينشعب البحث فيها حتى وصلت إلى ما هى عليه الآن من الكمال والدقة والفائدة ، وأصبح تقدم أى علم من العلوم يقاس بمقدار الصيغ الرياضية والمعادلات الداخلة فى هذا العلم .

كيف تم هذا الصرح الشامخ من البناء العلمى خلال القرون العديدة ؟ وكيف نشأت الحاجة إليه ؟ وكيف تفتق الذهن إلى الحلول المبتكرة ؟ وما هى صفات أولئك الذين شاركوا فى دفع عجلة التقدم ؟ وكيف عاشوا حياتهم ، بل وكيف كانوا يفكرون ؟ تلك قصة يرويها تاريخ العلم ، وما أروعها من قصة ؟

ولعل تاريخ الرياضيات بالذات فيه متعة ذهنية خاصة ؛ فهو يتناول أعقد المسائل العقلية بالتحليل ، فيرجعها إلى عناصرها الأولية ، فتبدو طبيعية سهلة . وفى هذا الكتاب كثير من الأمثلة على هذا ؛ فقد نجح مؤلفه فى أن يضع أمام القارىء صورة خلابة لتطور فروع الرياضة وظروف نشأتها ، وأورد فى كثير من الحالات أول الحلول التى وضعت المشكلات الرياضية ؛ وهى حلول تكون عادة فى ميسور المثقف العادى من غير المتخصصين فى الرياضيات . ونشره باللغة العربية كبير الفائدة لكل مشتغل بالعلوم الرياضية ولكل مثقف ثقافة عامة ، وبين دفتيه كثير من الأمثلة على ما قام به علماء العرب من كشوف فى هذا المضمار سبقوا بها غيرهم من الأمم ، وما زالت شاهدة على علو كعبهم وأصالة تفكيرهم .

مقدمة المؤلف

لقد كتبت مئات الكتب فى تاريخ الرياضيات ، وفى سير أولئك الذين يرجع إليهم الفضل فى تطوير هذا الفرع العظيم للمعرفة الإنسانية ، إذ تقدم لنا آلاف عديدة من المجلدات نتائج جهودهم ، ومع ذلك يبدو لى أن الحاجة ماسة إلى سفر صغير متواضع يعرض قصة أولئك الذين وضعوا أسس الرياضيات الحديثة ، ويشرح فى بساطة ويسر التفاصيل البارزة للمفاهيم والعمليات الرياضية التى ابتدعوها ، تلك التى تقوم على أفكار دارجة مألوفة فى حياتنا اليومية .

ونظراً لأن هذه القصة تطورت خلال ثمانية آلاف عام جنباً إلى جنب مع تطور العقل البشرى ، فإننا بين الحين والحين نترك طريق الرياضيات لنحدد الاتجاه الذى تسير فيه القصة الأكثر اتساعا ، قصة الإنسانية .

لقد ظلت الرياضيات وهى « ملكة العلوم » ، كالسيدة التى يتحدث عنها الناس بالسوء ، فيتهمونها أنها تمنح نفسها لقلة مختارة حباها حسن الحظ بتفوق عقلى خاص يمكنها من اختراق الحجب إلى الأبهاء الخاصة حيث ترقد هذه السيدة الساحرة . إلا أن قدراً كبيرا من هذا الغموض قد تكشف خلال السنوات الأخيرة ، إذ الواقع أنه ليس فى الرياضيات من بدايتها إلى أن نتعمق حساب التفاضل والتكامل ، ما يستعصى فهمه على الشخص العادى الذى يعرف جمع وطرح وضرب وقسمة الأعداد البسيطة . ولقد افترضت فى بعض هذا الكتاب أنهم لم يصلوا إلا إلى هذا المستوى . لذلك فإننى أستميح

مقدمة المؤلف

لقد كتبت مئات الكتب فى تاريخ الرياضيات ، وفى سير أولئك الذين يرجع إليهم الفضل فى تطوير هذا الفرع العظيم للمعرفة الإنسانية ، إذ تقدم لنا آلاف عديدة من المجلدات نتائج جهودهم ، ومع ذلك يبدو لى أن الحاجة ماسة إلى سفر صغير متواضع يعرض قصة أولئك الذين وضعوا أسس الرياضيات الحديثة، ويشرح فى بساطة ويسر التفاصيل البارزة للمفاهيم والعمليات الرياضية التى ابتدعوها ، تلك التى تقوم على أفكار دارجة مألوفة فى حياتنا اليومية .

ونظراً لأن هذه القصة تطورت خلال ثمانية آلاف عام جنباً إلى جنب مع تطور العقل البشرى ، فإننا بين الحين والحين نترك طريق الرياضيات لنحدد الاتجاه الذى تسير فيه القصة الأكثر اتساعا ، قصة الإنسانية .

لقد ظلت الرياضيات وهى « ملكة العلوم » ، كالسيدة التى يتحدث عنها الناس بالسوء ، فيتهمونها أنها تمنح نفسها لقلة مختارة حباها حسن الحظ بتفوق عقلى خاص يمكنها من اختراق الحجب إلى الأبهاء الخاصة حيث ترقد هذه السيدة الساحرة . إلا أن قدراً كبيرا من هذا الغموض قد تكشف خلال السنوات الأخيرة ، إذ الواقع أنه ليس فى الرياضيات من بدايتها إلى أن نتعمق فى حساب التفاضل والتكامل ، ما يستعصى فهمه على الشخص العادى الذى يعرف جمع وطرح وضرب وقسمة الأعداد البسيطة . ولقد افترضت فى بعض قارئى هذا الكتاب أنهم لم يصلوا إلا إلى هذا المستوى . لذلك فإننى أستميح

عذرا أولئك الذين تقدموا إلى آفاق أوسع فى بعض الشرح الذى قد يجدون أنفسهم فى غير حاجة إليه .

إننى لأرجو أن يدرك الطلبة والمعلمون قيمة الأساس التاريخى لقصة الرياضيات والرياضيين ، وأن ينتقل هذا الأثر إلى النشء من التلاميذ فى المدارس . لقد حان الوقت لتخليص الرياضيات من تهمة الجفاف الملتصقة بها ، ولتوجيه الطلاب إلى الاستمتاع ، لا بقصة الرياضيات والرياضيين فحسب ، بل أيضاً بالعمليات الرياضية نفسها .

الفصل الأول

نشأة الأعـــداد

عندما كنا أطفالا تقبَّلنا — دون تساؤل — أكثر المعلومات التى علمونا إياها ، وفيما بعد أدت ألفتنا بها إلى أن نأخذها حقائق واقعة ، فقبلناها منذ ذلك الحين أموراً لا تقبل الجدل ، وينطبق هذا على كثير من المفاهيم الرياضية فإن القليلين منا يدركون البساطة المدهشة للأفكار التى انبثقت عنهـــا هذه المفاهيم . إن الهدف من هذا الكتاب هو الكشف عن هذه البساطة ، فعن طريق تتبع تطور فكرة من أخرى يمكن إزالة الغموض الذى يلحقه الشخص العادى بمادة الرياضيات .

ومن قبيل الاحتياط يفترض المؤلف أن كثيرين من قراء الكتاب ليست لهم معرفة عميقة بالهندســـة ، أو الجبر ، أو حساب المثلثات ، أو الهندسة التحليلية ، أو التفاضل والتكامل ، والمؤلف على ثقة أنه عن طريق تتبع قصة تطور هذه الفروع من الأفكار البسيطة التى نبعت منها يمكن لأى شخص عادى الذكاء أن يفهم العمليات العقلية الأساسية التى تقع خلفها ، وأن يدرك — وربما لأول مرة — أن وراء الأعداد والرموز قصة مشوقة للغاية .

ولنبدأ بأن نفكر فى بعض المفاهيم التى قابلناها فى أول صلة لنا بالرياضيات عندما تعلمنا أن نعد بالطريقة التى كان أجدادنا بها يعدون .

استخدم الكثيرون منا أصابعهم العشر عند عدّ أو جمع الأعداد قبل أن يدركوا مدى السرعة والسهولة التى يصلون إليها لو أنهم استخدموا عقولهم. ولعلنا قد تصورنا — إن كنا قد فكرنا فى ذلك على الإطلاق — أنه من المصادفات الحسنة أن عدد الأصابع يصلح لاستخدامها فى العد بصورة ميسرة . ترى كم منا يدرك أنها ليست مصادفة على الإطلاق، بل الثابت أن البنيان الشامخ للرياضيات الحديثة نفسه يقوم على الميزان العددى — الذى ينكر البعض أنه أحسن ميزان — والذى نشأ من أن الطبيعة قد حبت الإنسان عشر أصابع ؟ .

وعندما أثبت الإنسان البدائى — عن طريق تعلمه العد حتى عشرة — أنه يتميز عن باقى الحيوانات اخترع عشرة أعداد أساسية ، وذلك لأنه كان يعد بالطريقة التى يعد بها الطفل الآن ، واحداً واحداً ، مستخدما فى ذلك أصابعه ، ومنذ هذه الأزمنة السحيقة لم تكتشف سوى خمسة أعداد أساسية أخرى .

ونظراً لأن حاجات الإنسان البدائى وممتلكاته كانت قليلة فإنه لم يكن فى حاجة إلى أعداد كبيرة ، فإذا أراد التعبير عن أعداد أكبر من ١٠ فإنه كان يقرن الأعداد الأساسية بأصابعه ، فإذا أراد مثلا أن يعبر عن أكثر من ١٠ بواحد كان يقول : واحد — عشرة ، أما الأعداد الأساسية التى أضيفت إلى العشرة الأولى فهى المائة والألف والمليون والبليون (ألف مليون فى أمريكا ومليون مليون فى إنجلترا) والترليون (مليون مليون فى أمريكا ومليون مليون من الملايين فى إنجلترا) .

ونظراً لأن الإنسان البدائى قد اخترع أعداداً أساسية بعدد أصابعه ، فإن نظامنا العددى نظام عشرى ، أى نظام أساسه العشرة،ويتكون من تكرارات لا نهاية لها للأعداد العشرة الأساسية .

ولعله لو أن للانسان اثنتى عشرة إصبعاً بدلا من عشر لكان أساس نظامنا العددى اثنى عشر ، ولتكون من تكرارات لا نهاية لها للأعداد الأساسية الاثنى عشر . فإذا فرضنا أن العددين الأساسيين « أحد عشر واثنى عشر » اختيرا للاصبعين الزائدتين لقلنا الآن «واحد واثنا عشر » بدلا من ثلاثة عشر . . (ثلاثة — عشرة) و « اثنان — اثنا عشر » بدلا من أربعة عشر ، و « ثمانية — اثنا عشر » بدلا من عشرين . . . وهكذا ، وبدلا من أربعة وعشرين لكان لدينا كلمة مثل « اثنا عشرتان » ولكانت خمسة وعشرون « اثنا عشرتان وواحد » ... وهكذا . .

لهذا النظام الاثنى عشرى بعض المزايا على نظامنا العشرى ، إذ أن ١٢ تقبل القسمة بدون باق على ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، فى حين أن ١٠ تقبل القسمة على ٢ ، ٥ فقط . وعلى كل حال فإننا لانستطيع الرجوع فى نظامنا العددى ،فإن الطبيعة قد حبت الإنسان عشر أصابع فارتبط نظامنا العددى بالعشرة أساساً .

وينبغى ألا نتصور أن الإنسان البدائى كان له نظام عددى ، فلم يكن للعدد لديه مفهوم مجرد كما هو الشأن لدينا بل كان له استعمال وصفى مثل « أربع سمكات » و « تسعة رجال » . أما مفهوم النظام العددى باعتباره مكونا من أشياء » تسمى أعداداً تبدأ من الصفر دون حد أعلى ، فقد نما فى أذهان الناس نموا بطيئا .

ولقد أقامت بعض الأجناس منها قبائل المايا فى أمريكا الجنوبية نظامها العددى على عشرين بدلا من عشرة ، ولعل ذلك راجع إلى أن أولئك الذين أسسوا هذا النظام استخدموا فى العدد أصابع القدمين العشر بالإضافة إلى أصابع اليدين العشر .

وقبل اختراع الكتابة بزمن طويل وضع الإنسان البدائى طريقة لتسجيل الأعداد ، فقد كان يعد على أصابعه ، ومن السهل تمثيل الأصابع بعلامة أو شرطة ، فكان من الطبيعى إذن أن يضع أجدادنا الأقدمون علامات كهذه على حوائط كهوفهم ، أو على قطع الحجر عندما يريدون تسجيل عدد الأشياء ، شرطة أو علامة للشىء الواحد ، وليس من الممكن بالطبع أن يعرف العدد الكلى بنظرة واحدة بل لابد من عدها واحدة واحدة . ولقد وجدت مثل هذه العلامات على حوائط الكهوف التى سكنها الإنسان الأول ، سجلا للمحاولات الأولى التى قام بها البشر لتمثيل الأعداد برموز ، وترجع هذه الكتابات العددية إلى عصور تسبق تلك التى وصل فيها الإنسان القديم إلى اكتشاف صلاحية حبوب بعض أنواع الحشائش لأن تؤكل ، وبالتالى بدأ الزراعة ، ولقد استمرت هذه الطريقة البسيطة فى تسجيل الأعداد آلافا كثيرة من السنين ، ومازال كثير من القبائل المتأخرة تستعملها .

ومع تطور الحضارة نشأت طرق مختلفة لكتابة الأعداد ، فقد وضع البابليون رموزا عددية على شكل > v ، وذلك قبل هزيمتهم لليهود — التى ذكرت فى التوراة — بزمن بعيد ، وكانوا يكتبون الرموز بضغط عصا مدببة فى قطعة مسواة من الطين ، ثم كانت هذه تترك لتجف فى الشمس ، أو تحرق فى فرن ، وبذلك تتحول إلى قالب صلب (١) .

(١) تعرف هذه الطريقة فى الكتابة بالطريقة المسمارية (المترجم) .

وفى أوائل القرن السادس انتقل الإسبان من جزائر الهند الغربية إلى القارة الأمريكية ، وكم كان مثيرا للدهشة أن يجدوا هناك أكثر من ستين مدينة خربة فى المنطقة التى نسميها يوكاتان ، وهى التى تقع الآن داخل المكسيك ، وقد احتوت على معابد وقصور خربة ، ومخازن للمياه تحت الأرض مبطنة بقطع ضخمة من الصخر ، ولقد بنى هذه المدن شعب المايا الذى أنشأ حضارة لم يكن شعب أوروبا يعرف عنها شيئا ، هذا هو الجنس الذى قلنا إنه استعمل نظاما عدديا مبنيا على عشرين عددا أساسيا بدلا من عشرة ، ولقد وجد عشرون رمزاً عدديا منحوتاً على بعض آثارهم ، وهى تتركب أساسا من نقط وشرط ، بل كان لديهم رمز للصفر مما يدعو إلى الاعتقاد أنه كان لديهم معداد أو إطار للعد ، إذ أنه وظيفة رمز الصفر ، كما سنرى ، أن يبين أنه لا توجد حبات فى السلك المعين من سلوك المعداد .

ولقد استعمل العبريون والإغريق حروفهم الهجائية فى تمثيل الأعداد ، علما بأن النظام الإغريقى مبنى على النظام العبرى ، وتوضيحا للنظام الإغريقى نختار فيما يلى أربعة رموز عددية يسهل على كل قارىء التعرف عليها ، نظرا لأنها تشبه الحروف a,b,i,κ .

a (ألفا) للدلالة على واحد

β (بيتا) للدلالة على اثنين

ι (أيوتا) للدلالة على عشرة

κ (كبا) للدلالة على عشرين

وبينما تدل $\iota\beta$ (عشرة واثنان) على ١٢ فإنه لم يكن ممكناً تبادلها كما هو

الشأن فى الرموز الحالية ، إذ نستطيع الآن تبديل رقمى ١٢ إلى ٢١ للدلالة على واحد وعشرين ، أما عند الإغريق فإن ٢١ يدل عليها Kα ، أى إن الإغريق ، بالرغم مما وصلوا إليه فى مجال الفكر ، لم يصلوا إلى بساطة استخدام عشرة رموز عددية فى تمثيل ما يسجله العداد ، وبذلك يستخدم نفس الرمز العددى للدلالة على قيم مختلفة تماماً حسب موضعه بالنسبة للرموز الأخرى المكتوبة فى صف واحد .

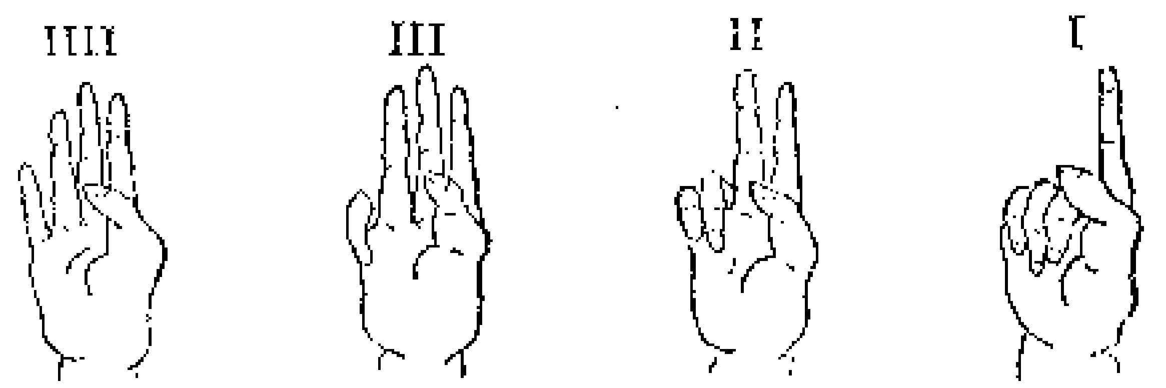
وقد ترتب على عدم وصول الإغريق إلى فكرة القيمة المكانية ، أن استخدموا جميع الحروف الهجائية الأربعة والعشرين ، بالإضافة إلى ثلاثة رموز أخرى فى كتابة الأعداد مهما صغرت ، ولكننا الآن بمفهومنا للقيمة المكانية التى تتطلب عشرة رموز عددية فقط لكتابة أى عدد ، مهما يكن كبيراً ، لا نستطيع أن نكتم الدهشة من أن الرياضيين الإغريق الذين أنتج ذكاؤهم « العصر الذهبى للرياضيات عند الإغريق » الذى سنستعرضه فيما بعد ، لم يضعوا طريقة أقل تعقيداً ، ولعل ذلك راجع إلى أنه لم يخطر ببالهم قط أن هناك طريقة أبسط من ذلك فى كتابة الأعداد . وقبل أن ننقد الإغريق لوضعهم طريقة معقدة كهذه ، دعنا نذكر أننا مازلنا نتمسك بوحدات لمقاييس الطول والوزن ترجع إلى العصور الوسطى بالرغم من أن لدينا نظاما سهلا يوفر الوقت والجهد ، هو النظام المترى ، ولا يتطلب الأمر منا سوى أن نتبناه[1] .

ويحتوى النظام الرومانى ، الذى يعرف بالأرقام الرومانية ، على لمحة من فكرة القيمة المكانية ، لكنها لمحة بالغة الضآلة ، ولا يعلم أحد كيف بدأت

(١) ما زالت أمريكا وانجلترا تستعملان الوحدات الإنجليزية للقياس وهى فى الأطوال مثلا : الميل = ١٧٦٠ ياردة ، الياردة = ٣ أقدام ، القدم = ١٢ بوصة ، وفى الأوزان : الطن = ٢٠ هندروويت ، الهندروويت = ١١٢ باوند ، والباوند = ١٤ أونس . (المترجم)

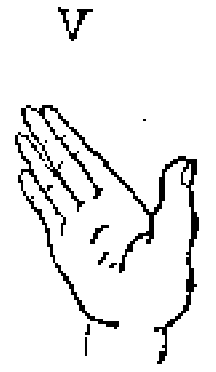
هذه الأرقام الرومانية ، بل يظن أن أساسها هو الكتابة بالأصابع التى كتب بها رجل الكهوف الأول ، يؤيد هذا الرأى دكتور مومسن Dr. Mommsen الذى كان من أكبر الحجج فى تاريخ الرومان ، يؤيد أن الكلمة اللاتينية للاصبع هى: Digitus التى استعملها الرومان فى وصف أى رمز من رموزهم العددية ، والتى نستعمل الآن كلمة مشتقة منها هى digit .

ولقد كتب الرومان الأعداد من واحد إلى أربعة كما يلى :



شكل (١)

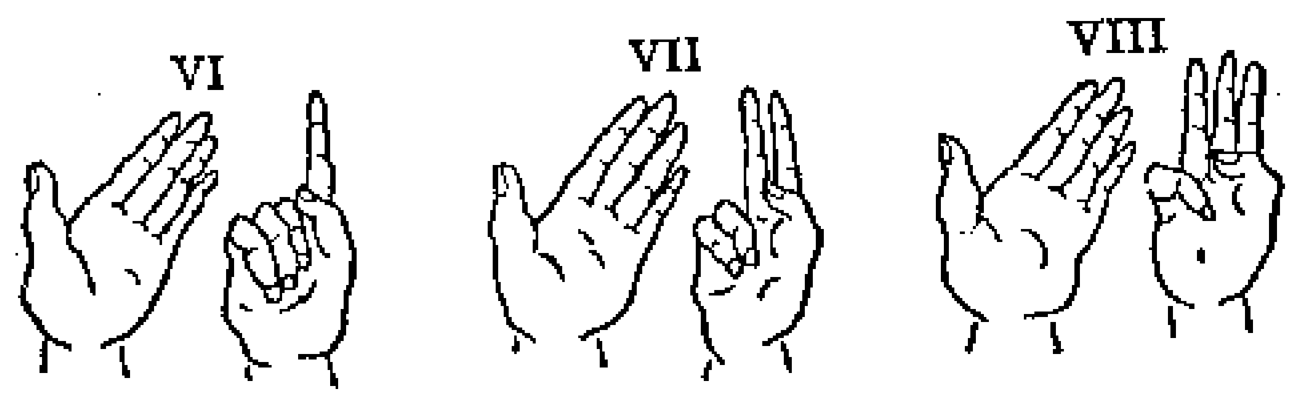
أما رمز خمسة فقد كان علامة على شكل V ولعلها تمثل الفجوة بين الإبهام ومجموعة الأصابع الأخرى .



شكل (٢)

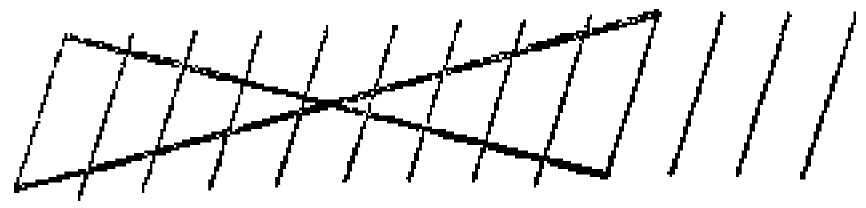
وقد نشأت عندهم فكرة القيمة المكانية مرتبطة بهذا الرمز ، فلكى يتجنبوا التضخم فى IIII للدلالة على أربعة ، وضعوا I إلى يسار V ، وطبقت نفس الفكرة فى رموز أخرى ، وأصبح مفهوما أنه إذا كتب الرمز إلى يسار رمز

آخر قيمته أكبر، فإن العدد يدل على الفرق بين الرمزين ، وإذا كتب إلى يمينه فإن العدد يدل على مجموع الرمزين . ومما لاشك فيه أن هذا المفهوم نشأ من الطريقة البدائية فى استخدام أصابع اليدين فى تمثيل الأعداد : ستة ، وسبعة ، وثمانية ، وتسعة (كما كان فى الأصل) .



شكل (٣)

وقد كانت تسعة تكتب VIIII ، ولكنها بسطت بعد ذلك إلى كتابة I إلى يسار الرمز الدال على عشرة ، هذا الرمز X لعله مأخوذ من وضع اليدين متقاطعتين ، أو الإبهامين متقاطعين ، أو شرطتين متقاطعتين تقطعان عشر شرط كل منها تمثل واحدا ، إذ أن هذه الطريقة تمكن أى شخص من الرؤية السريعة لعدد الشرط التى رسمها ، وعلى ذلك فإن :



شكل (٤)

تمثل ثلاثة عشر التى كتبها الرومان فى الصورة XIII

ونظراً لأن X تمثل عشرة فإن IX تمثل تسعة ، وهو الفرق بين القيمتين اللتين يمثلهما X ، I ، وبذلك أصبحت وما زالت الأرقام الرومانية العشرة الأولى هى :

I II III IV V VI VII VIII IX X

ولقد رأينا أن القياس العددى الذى ينبنى عليه جميع بنيان الرياضيات الحديثة يتركب من **تكرارات لا نهاية لها** للعشر الأعداد الأساسية ، وقد انعكس ذلك بوضوح فى الطريقة التى بنيت بها الأعداد الرومانية ، فقد كتبت الأعداد من أحد عشر إلى عشرين بوضع أحد الرموز العشرة الأساسية إلى يمين رمز العشرة : XI ، XII ، XIII ، XIV . . . وهكذا . وفى كتابة الأعداد من عشرين إلى ثلاثين تكررت كتابة الرموز العشرة الأساسية إلى يمين رمز العشرين ، أى XX . وقد كان الرمز الأصلى للمائة هو] ، ولعل هذه هى الصورة التى يحفر فيها حرف C على الحجر باعتباره الحرف الأول فى الكلمة اللاتينية Centum أى مائة ، أو لعل] هى الرمز الأصلى للمائة ولكن لأنها تبدو كما لو كانت C أخذت C بديلا للرمز الأصلى فى الدلالة على مائة . وكما قلنا آنفا لا يعرف شخص كيف نشأت هذه الرموز .

ونظراً لأن C تمثل مائة فإن C XX VIII تدل على مجموع C و XX و VIII أى مائة وثمانية وعشرين ، وتدل CC XXX IX على مجموع CC و XXX و I أقل من X أى مائتين وتسعة وثلاثين .

وإذا كتبت X إلى يسار C دل ذلك على الفرق بين C ، X ، وعلى ذلك فإن تسعين تكتب XC .

وبدلا من XXXXX للدلالة على خمسين استعمل النصف الأسفل من الرمز [نظراً لأن الخمسين نصف المائة ، وبالرغم من أننا نقرأ الرمز L كما لو كانت الحرف الهجائى L إلا أنها لا تمت إليه بصلة ، نظراً لأن الكلمة اللاتينية

لخمسين لا تشتمل على حرف L ، وذلك يوحى بأن الرمز] هو الرمز الذى استخدم فى الأصل للدلالة على المائة وليس C .

وتبعا لأن L يدل على خمسين فإن X مكتوبة إلى يسار L تدل على الفرق بين L ، X أى على أربعين ، فى حين أن X مكتوبة إلى يمين L تدل على مجموع أى على ستين .

وقد كان رمز الألف هو الحرف الهجائى اليونانى « فاى » الذى يكتب Φ ، وبمضى الزمن حور الحرف إلى الصورة البسيطة (I) ، وهذا أيضا حور إلى M ، ربما لأن Mille هى الكلمة اللاتينية للألف .

وكان رمز الخمسمائة باعتبارها نصف الألف (I)، ونلاحظ هنا أن هذا الرمز هو النصف الأيمن للرمز (I) الذى يدل على ألف ، وبالتدريج تحور إلى الصورة D .

وفى كتاب ألفه سويتونيوس Suetonius وطبع عام ١٧١٥ وجد التاريخ مكتوبا فى الصفحة الأولى هكذا : XV CC I) (I) .

يدل الرمز الأول (من اليسار) على الحرف اليونانى Φ يتلوه الرمز الدال على ٥٠٠ أى نصف Φ فى حين تدل CC X V على ٢١٥ .

إن الرموز التى استعرضناها تشمل هذه التى نستعملها اليوم للدلالة على تواريخ الآثار والمبانى العامة ، وما شابه ، وعلى أرقام الصفحات فى الكتب ، بالرغم من أن هناك نظاما لكتابة الأعداد أفضل كثيرا ، وما زال يستعمل منذ قرابة ألف سنة .

ولقد مضت آلاف من السنين دون تطور فى العمليات العددية أو ما سماه

الإغريق Logistic (أى عمليات حسابية) calculations وهو مانسميه الآن حسابا arithmetic ، وكان السبب فى ذلك نظام كتابة الأعداد بما فيه من تضخم وتعقيد .

وقبل أن نناقش الطريقة المبسطة التى نتبعها حاليا ، ينبغى أن نتمهل ونتأمل الطريقة التى كانت تتبع قديما فى إجراء العمليات الحسابية ، وذلك لأن طريقتنا الحالية إنما اخترعت لتناسب هذه العمليات .

فى الوقت الحاضر عندما نعجز عن إجراء عملية حسابية « فى عقولنا » نأخذ قلما وورقا ونجريها ، لذلك يصعب إدراك الصعاب ، سواء أكانت عقلية أم مادية ، التى أمكن التغلب عليها خلال آلاف السنين التى مضت قبل اختراع طريقة بسيطة للتمثيل الرمزى للأعداد ، وقبل أن تصبح أدوات الكتابة رخيصة ووفيرة .

ولنبدأ أولا بالصعوبة المادية المتعلقة بالحصول على مادة يكتب عليها ، ذلك ولو أنه ينبغى أن نتذكر أنه كان من المستحيل على الشخص العادى أن يقوم بأى عمليات حسابية مهما تكن بسيطة ما دام يعوقها نظام عددى معقد ، فكان لابد فى هذه الأحوال من استخدام المعداد فى إجراء العمليات .

ولعل القليلين منا هم الذين يدركون أنه منذ مائة سنة فقط كان الورق غالى الثمن نظراً لأن صناعته آليا من لب الخشب لم تكن قد عرفت بعد ، وإنما كان يصنع يدويا من الخرق ، بل إن هذا الورق نفسه لم يكن ، حتى القرن الرابع عشر ، يصنع فى أوروبا ، بالرغم من أن الصين قد عرفت صناعته قبل ذلك بألف عام على الأقل .

وقبل أن تعرف أوروبا الورق (المصنوع من القماش) فى القرن الرابع عشر ، وتتطور الطباعة فى القرن التالى كانت الكتب بجميع أنواعها قليلة وثمينة إلى الحد الذى جعلها فى متناول الأغنياء والبارزين من رجال المجتمع فقط ، وهؤلاء اكتنزوها فى مكتباتهم الخاصة ، وقد كانت هذه الكتب مكتوبة باليد ، وأوراقها من نبات البردى أو من الجلد ، بعضها مجلد بالصورة التى نعرفها الآن ، وبعضها الآخر فى صورة لفائف ، ولقد كان النوعان نادرين وغاليى الثمن .

وورق البردى نوع من المواد التى يكتب عليها ، كان قدماء المصريين يصنعونه من نبات البردى، وقد جاء فى العهد القديم ذكر « سفط من البردى» صنعته لموسى أمه ، وكان نبات البردى ينمو فى المياه الضحلة على شاطىء النيل ، وكانت سيقانه تؤخذ وتقطع إلى شرائح رقيقة توضع جنبا إلى جنب مكونة ورقة بالاتساع المطلوب، ثم توضع فوقها طبقة أخرى ، ثم تنقع الطبقتان فى الماء ؛ ومن المعتقد أنه فى هذا النبات صمغ طبيعى يؤدى إلى تماسك الطبقتين معا عندما تتركان لتجفا فى الشمس . وعندما كان يصنع عدد من هذه الأوراق كانت توصل مكونة شريطا طويلا ، وبذلك تصبح مهيأة للكتابة فيها ، وكان الذى يستعملها يعرف بالكاتب ، فإذا أراد مؤلف أن يخرج كتابه عهد به إلى عدد كبير من الناسخين ، يبذلون الجهد العنيف فى نسخه باليد ، وفى كثير من الأحيان ينحرفون عن النص الأصلى ، ثم تلف أوراق الكتاب ، وتوضع فى صندوق صغير ، ثم يضم إلى مكتبة تقوم عليها حراسة دقيقة . كل هذا يوضح إلى أى حد كانت الكتب المكتوبة على ورق البردى نادرة ، وإلى أى مدى كانت نفقاتها باهظة .

إن أقدم كتاب عرف فى الرياضيات كتبه على ورق البردى كاتب اسمه أحمس منذ أكثر من خمسة وثلاثين قرنا ، وهو الآن فى المتحف البريطانى ، وقد ترجمه إلى الانجليزية الأستاذ بيت T. E. Peet الذى ترجم عنوان الكتاب إلى « قواعد للبحث فى الطبيعة[1] ولمعرفة كل ما يوجد » . وليس أحمس هو الذى ألف الكتاب ، بل نسخه من كتاب ألف فى عهد الملك أمنمحت الثالث حوالى عام ٢٢٠٠ قبل الميلاد ، أى منذ حوالى ٤٠٠٠ عام ، يدل على ذلك أن أحمس أضاف حاشية تقول : « لاحظ أن هذا قد كتب فى عهد أوسر ملك مصر العليا والسفلى ، وأن الكاتب أحمس هو الذى نسخه » .

ويكشف بردى أحمس عن أن المصريين منذ أكثر من أربعة آلاف عام وضعوا طرقاً لمعالجة الكسور الاعتيادية ، كما عرفوا كيف يحلون مسائل نلجأ نحن الآن إلى حلها بالمعادلات الجبرية ، كما اكتشفوا أن محيط الدائرة يمكن قسمته على قطرها عدداً ثابتاً من المرات ، قيمته غير محددة .

أما الرق فقد كان أكثر تكلفة وندرة من ورق البردى ، إذ كان وما زال يصنع من جلد الخراف والحملان ، وأغلى أنواع الورق ما يصنع من جلود الثيران الصغيرة .

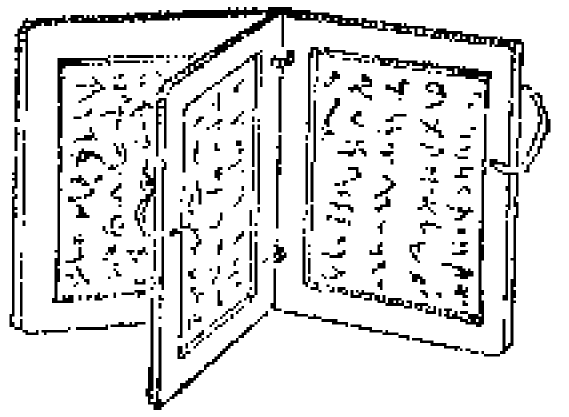
ونظراً لغلاء ثمن الرق وارتفاع قيمته ، وكذلك ندرته ، فقد نشأت فى القرون الوسطى عادة إزالة الحبر من المخطوطات القديمة واستخدام الرق الذى كتبت عليه فى كتاب جديد ، ومن حسن الحظ أن الكتابة الأصلية كانت

(1) Nature.

تعود لتظهر بعض الشىء . ولقد عرفنا كثيراً من المعلومات القيمة عن العالم القديم عن طريق الكتابات الأصلية التى ظهرت تحت الكتابة الثانية ، وفى بعض الأحيان تحت الكتابة الثالثة ، وفى المتحف البريطانى كتاب فى اللاهوت يرجع إلى القرن التاسع أو العاشر كتب على كتاب فى قواعد اللغة اللاتينية فى القرن السادس ، وهذا كتب على كتاب فى التاريخ كتب فى القرن الخامس ، وبين كتب هذه المجموعة فى المتحف أيضا كتاب يرجع إلى القرن التاسع كتب بعضه على نسخة من « إلياذة هوميروس » ترجع إلى القرن السادس ، وبعضه على نسخة من إنجيل لوقا كتب فى القرن السادس أيضاً ، وبعضه الأخير على جزء من « الأصول » لإقليدس كتبت فى القرن التاسع .

من هذا يتضح أنه كان من المستحيل أن تستعمل أوراق البردى أو الرق بالصورة التى نستعمل بها نحن الورق فى إجراء بعض العمليات الحسابية ، حتى ولو كان إجراء هذه العمليات ممكنا رغم الطريقة المعقدة فى كتابة الأعداد .

وكان التلميذ فى المدرسة ، عند الرومان، يعلم أن يكتب على لوح من الخشب غطى سطحه بالشمع ، مستعملا قلما من الحديد أو عصا مدببة ، وكان يستعمل الطرف المفرطح للقلم ، أو العصا، فى تسوية سطح الشمع استعداداً لاستخدامه مرة أخرى ، وكان التلميذ بالطبع يسجل على لوحه نتائج حساباته . أما العمليات نفسها فكان يجريها على المعداد ، وفى بعض الأحيان يربط لوحان أو ثلاثة معا بمفصلات من الجلد ، وفى مثل هذه الحالات يكون للألواح حافات عالية بعض الشىء لتحمى الكلمات المكتوبة على الشمع من أن يمحوها الاحتكاك .



شكل (٥)

ويعتقد أن الشكل الحالى للكتابة مأخوذ فى الأصل عن هذه الألواح المسوكة معا . وقبل الإمبراطورية الرومانية وخلالها كانت العمليات الحسابية البسيطة ، كعد أصوات الناخبين مثلا، تجرى على مائدة مغطاة بالرمل، وكانت العلامات تعمل فى الرمل بعصا مدببة ، وعند الانتهاء تسوى صفحة الرمل باليد.

وقد استعمل إقليدس وغيره من الرياضيين مثل هذه الموائد الرملية فى رسم الأشكال الهندسية . والواقع أن جميع ماندرسه الآن فى الهندسة تم الوصول إليه بأشكال مرسومة على موائد رملية منذ أكثر من اثنين وعشرين قرنا ، ولقد كانت الكلمة اليونانية التى تعنى مائدة هى abax ، والتى تعنى مائدة رملية abacus .

ولقد استعملت كلمة معداد للدلالة على أنواع مختلفة من أجهزة العد عند القدامى فى مصر والهند واليونان والإمبراطورية الرومانية وفى غيرها من البلاد، ومازال المعداد يستعمل فى الصين واليونان وأجزاء من روسيا ، وأحيانا يكون المعداد لوحا سطرت عليه خطوط ، وعلى هذه الخطوط يوضع بلى أو حبات . ولقد كانت الكلمة اليونانية التى تدل على البلية هى calculus ومنها جاءت كلمة calculate التى تدل على إجراء عملية حسابية ، وكانت البلية التى توضع على خط معين تدل على شىء واحد، والتى توضع على خط آخر تدل على

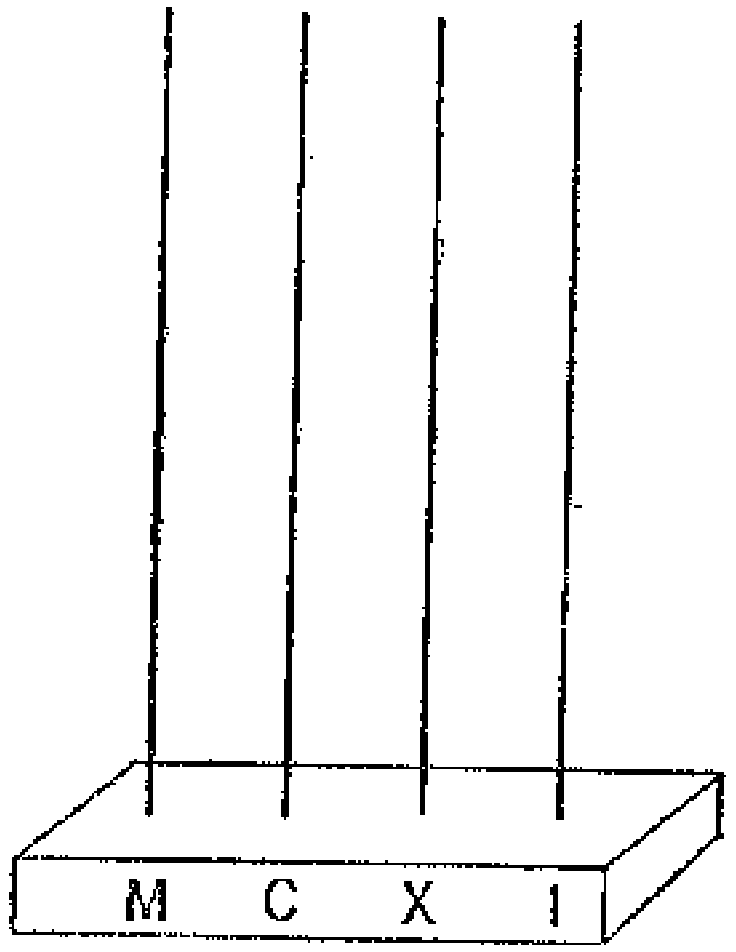
عشرة من هذه الأشياء ،والتى توضع على خط ثالث تدل على مائة من هذه الأشياء . . . وهكذا .

وأهم أساس هنا هو أن البلية تدل على شىء واحد أوعشرة أو مائة أو ألف حسب الخط الذى توضع فوقه ، وهذا هو الأساس الذى انبنت عليه طريقة الكتابة الحاضرة للأعداد ، لذلك ينبغى أن ندرس المعداد بشىءمن التفصيل.

وكنوع من التحسين أصبح المعداد لوحة حفرت فيها مجار ، وفى هذه المجارى توضع المعدودات (بلى أو خرز) .

وفى الحقبة الأخيرة من الإمبراطورية الرومانية حلت الأسلاك والسيقان محل المجارى المحفورة ، واقتضى ذلك أن يكون فى البلى أو الخرز ثقوب يمر فيها السلك .

إذا أردت أن تعلم طفلا مبادىء الحساب بطريقة يتضح له فيها الأساس الذى تقوم عليه عمليات الجمع والطرح فيحسن أن تعد له نموذجا للمعداد يلعب به ، وذلك بأن تأخذ قطعة خشب مستطيلة الشكل سمكها نصف بوصة وطولها ثمان بوصات وعرضها بوصتان ، ثم اغرز فيها أربعة أسلاك كما هو موضح فى شكل (٦) ، اقطع حوالى ثلاثين قطعة صغيرة من الورق المقوى واثقب كلا منها ثم استعملها كمعدودات .

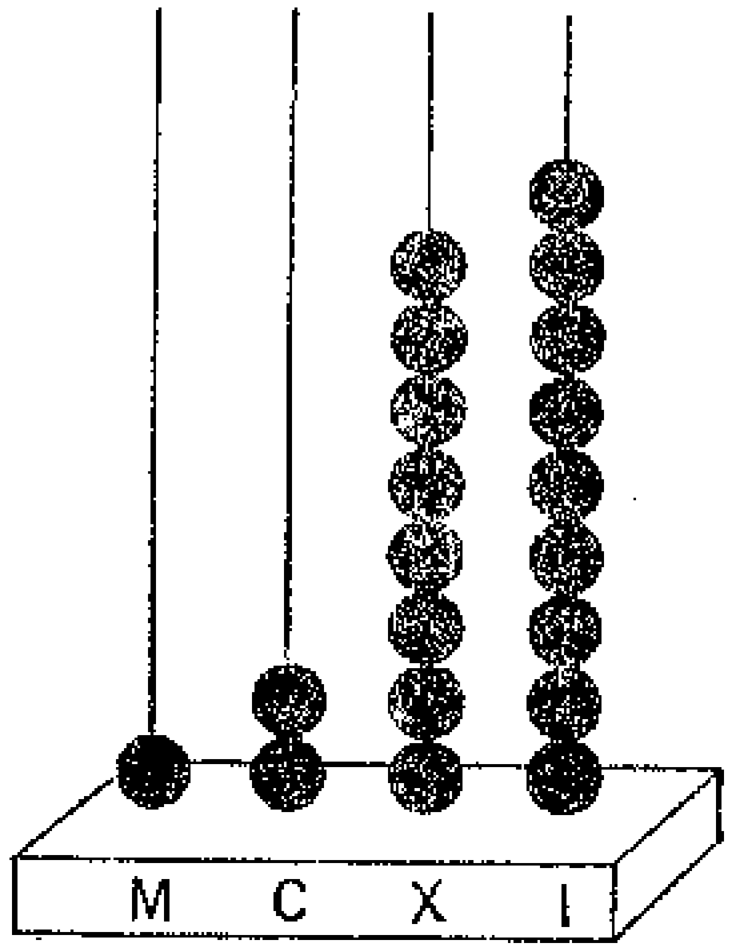


شكل (٦)

فإذا أردت أن تعلمه الأرقام الرومانية ، دعه يتصور نفسه تاجراً رومانيا يعيش فى عام ٢٠٠ ميلادية ، وكأى مواطن رومانى ينبغى أن يضع على معداده الرموز I ، X، C، M كما هو موضح فىشكل (٦) ،وعليه أن يتصور أيضا أنه لا يعرف سوى هذه الأرقام .

وليتصور أن سفينتين من سفنه قد وصلتا إلى أوستيا ، ميناء روما ، تحمل رخاما مصريا يلزم لمبنى جديد فيه ، وأن قبطان إحدى السفينتين قد أبلغه أن سفينته تحمل M CC LXXX IX قطعة ، فى حين أبلغه الآخر أن سفينته تحمل M XXX VIII قطعة ، وفيما يلى كيف يعرف التاجر عدد القطع التى وصلت على السفينتين :

يأخذ معداده ويضع معدودات تدل على M CC LXXX IX كما هو موضح فى شكل (٧) .



شكل (٧)

ثم ينتقل إلى العدد M XXX VIII ويبدأ بالوحـــدات الثمان VIII فيضيف ثمانية معدودات إلى سلك «الوحدات» فيجد أن إضافة واحد فقط منها يجعل العدد الـكلى للمعدودات على هذا السلك عشرة،فيخرج المعدودات العشرة من سلك الوحدات ،ويضع بدلا منها معدودا واحدا فى سلك ال X (العشرات).

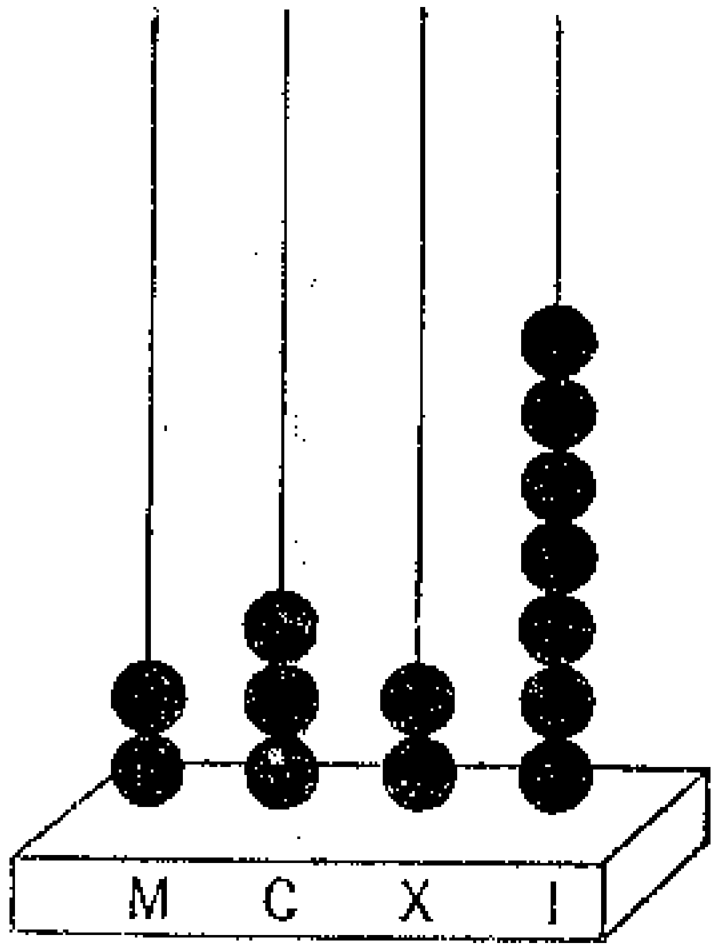
ولا يختلف هـــذا المعدود عن أى معدود آخر فى شيء ، ولـكنه عندما يوضع فى سلك ال X فإنه يدل على عشرة أمثال مايدل عليه وهو فى سلك الآحاد ، وبعد ذلك يصبح سلك الآحاد خاليا ، فيضع فيه السبعة الباقية من ال VIII وحدات .

بعد ذلك ينتقل إلى العشرات الثلاث XXX فى العدد M XXX VIII . يلاحظ أن سلك ال X يحتوى الآن على تسعة معدودات ، بما فى ذلك المعدود الذى أضافه أخيرا ، فإذا أراد أن يضيف ثلاثة معدودات لتدل على العشرات فإنه يجد أن إضافة أولها تجعل المعدودات على السلك عشرة ، فينزعها جميعا

ويضع بدلا منها معدوداً واحداً على سلك ال C ، وهنا أيضا لا يختلف هذا المعدود الآخر عن غيره ، إلا أن وضعه فى سلك ال C يعطيه للتو قيمة هى عشرة أمثال قيمة المعدود الواحد فى سلك ال X ، ومائة مثل قيمة معدود واحد فى سلك الوحدات ، وبعد ذلك يمكن وضع الاثنين الباقيين من معدودى ال X فى سلك ال X الخـالى .

ونظراً لأنه ليست هناك مئات فى العدد M XXX VIII فإن التاجر ينتقل إلىالآلاف ، وهنا يجد M واحدا ، فلا يحتاج الأمر إلا إلى إضافة معدود واحد يدل على .

وبذلك يأخذ المعداد الصورة التالية :



شكل (٨)

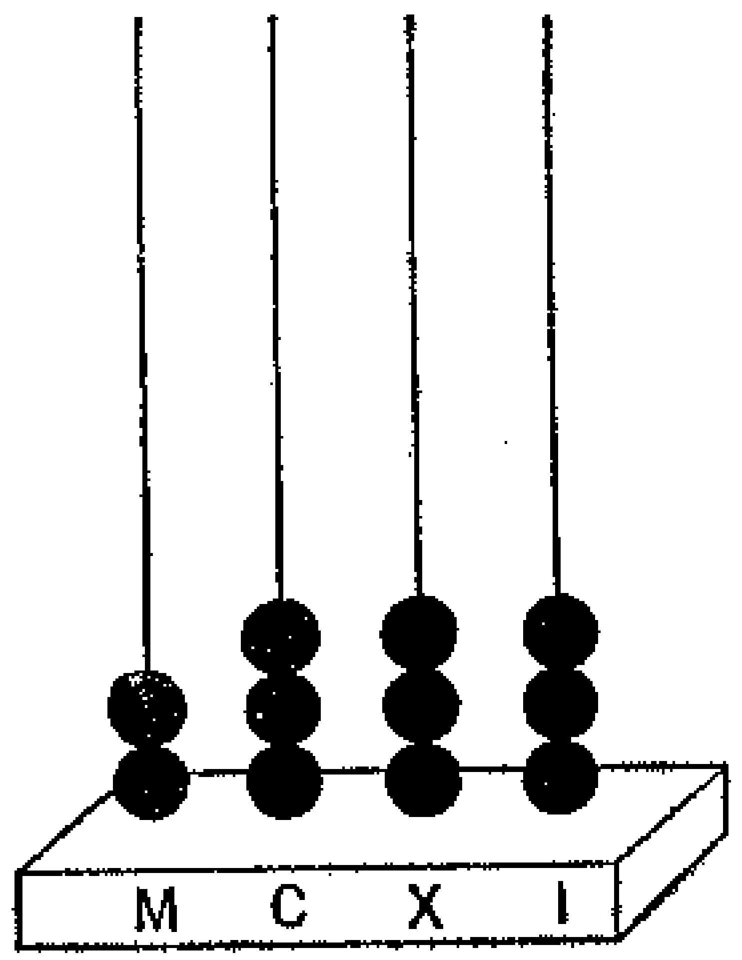
بعد ذلك يأخذ التاجر لوحة الشمع ويكتب عليها MM CCC XX VII وهـذه « صورة » مطابقة تماما لشكل المعداد .

هذه هى الطريقة التى كان الرومان يجرون بها عملية الجمع ، وهم فى هذا يجرون نفس مانجريه نحن الآن فى عقولنا إلا أن طريقتنا فى التعبير عن الأعداد أكثر بساطة . وسنرى فيما بعد أن طريقتنا الحالية فى كتابة الأعداد نشأت للدلالة على المعدودات فى المعداد .

وقد كان الطرح أيضاً يجرى على المعداد بطريقة تشبه تماما الطريقة التى نستعملها الآن ، والفرق الوحيد هو أننا نجرى العمل فى عقولنا نظراً لبساطة رموزنا العددية .

وليتصور الطفل هنا أيضا أنه تاجر رومانى يتاجر فى زيت الزيتون ، كان فى مخزنه MM CCC XXX III جرة ، ولما جرد المخزون مرة أخرى بعد حين وجد لديه M CCCC X VII جرة ، كم جرة باعها ؟

يأخـــذ التاجر معداده ، ويضع معدودات تدل على العدد الأصلى MM CCC XXX III كما هو موضح فيما يلى :



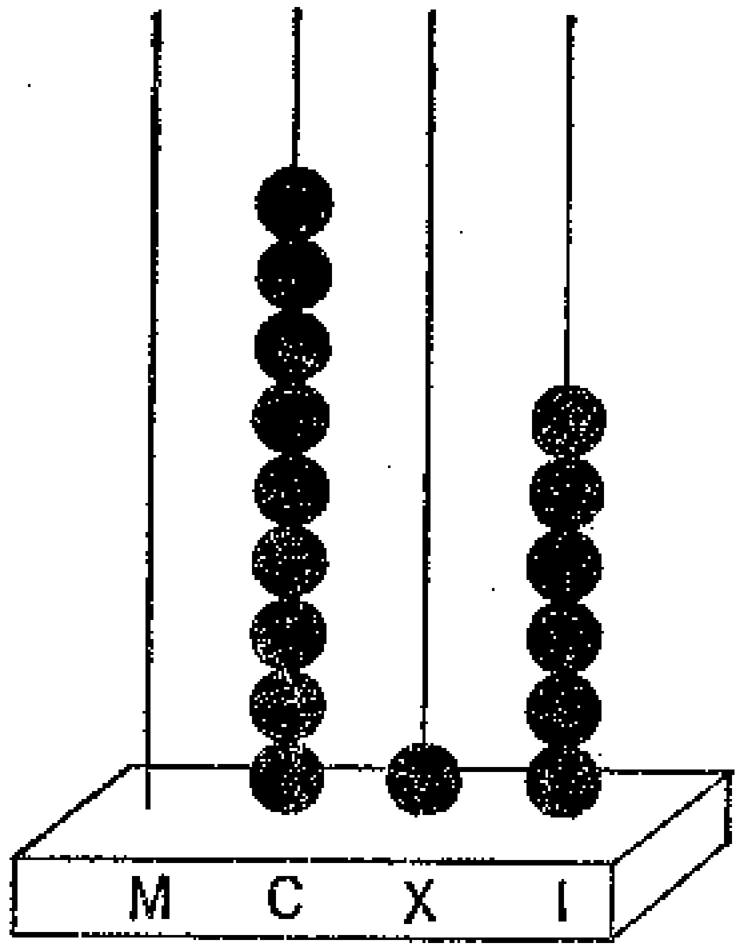
شكل (٩)

عليه الآن أن يرفع معدودات تدل على M CCCC X VII جرة التى بقيت فى مخزنه، وبذلك تدل المعدودات التى تبقى على المعداد على عدد الجرار التى باعها .

ويبدأ هنا أيضا بالوحدات فيتعرض لمشكلة أخذ سبعة VII معدودات مع أن عليه ثلاثة فقط ، ولكى يتغلب على هذه المشكلة يأخذ معدوداً واحداً من سلك ال X ويضع بدلا منه عشرة معدودات على سلك الوحدات ، وبذلك يصبح على هذا السلك ثلاثة عشر معدودا ، وهنا يستطيع التاجر أن يأخذ سبعة VII منها فتبقى على السلك ستة .

ثم يتحول إلى سلك العشرات فيجد أن عليه معدودين فقط ، ويستطيع هنا فى يسر أن يرفع منها ال X الوحيدة فى العدد M CCC X VII وبذلك يتبقى معدود واحد على سلك X .

أما سلك ال C فلم يتقلقل أى من معدوداته الثلاثة ، إلا أن التاجر لايستطيع أن يأخذ منها أربعة (تمثل CCCC فى العدد المطروح) مالم يأخذ واحدا من المعدودات على سلك ال M ويضع بدلا منه عشرة على سلك ال C ، وبذلك يصبح على سلك ال C ثلاثة عشر معدودا فيتمكن التاجر من أن يرفع أربعة منها وتتبقى تسعة .



(شكل ١٠)

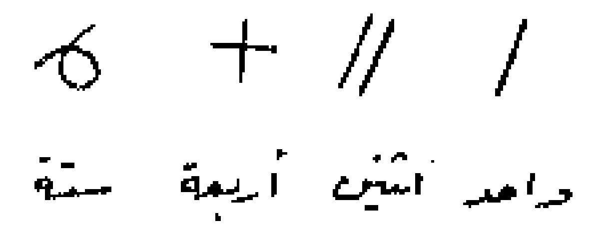
لم يترك على سلك ال M سوى معدود واحد ، فيرفعه نظراً لأن العدد المطروح يحتوى على M واحدة ، وبذلك يصبح المعداد فى الصورة الموضحة فى شكل ١٠ .

ويدل المعداد على أن التاجر قد باع تسعمائة وست عشرة من جرار الزيت وإذا أراد أن يكتب هذا العدد على لوحة كتبه هكذا CM X VI أو هكذا D CCCC X VI

ها نحن أولاء قد عرفنا كيف كان الرومان يجرون عملياتهم الحسابيـة البسيطة ، ولـكن كيف وصلنا نحن إلى أن نجرى هـذه العمليات بالصورة السهلة التى نجريها بهـا الآن دون أن نستخدم المعداد ؟ يرجـع هذا جزئيا إلى أننا نستطيع أن نـكتب الأعداد على قطعة من الورق وأساسيا لأننا نستخدم عشرة رموز عددية فقط ، تمـكنها القيمة المـكانية من أن ترسم صورة عقلية للمعدودات على المعداد .

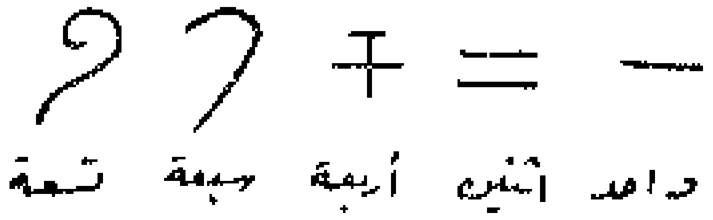
كيف ومتى حصلنا على هـذه الرموز ؟ للاجابة عن هـذا السؤال ينبغى أن نرجـع بأنظارنا إلى الهند كما كانت منذ ألفين ومائة سنة مضت ثم إلى دولة العرب المترامية الأطراف والتى كانت قنطـرة للتجارة والفكر بين آسيا وأوروبا منذ حوالى ألف سنة .

حوالى مائتى سنة قبل الميلاد حكم معظم بلاد الهند ملك قوى اسمه أسوكا ، وقد تحول إلى الديانة البوذية وأمضى سنوات عمره فى نشر هذه الديانة بين شعبه ، ولا تهمنـا هنا الديانة التى اعتنقها أسوكا ، بل يهمنا أنه أقام أعمدة حجرية حفرت عليها التعاليم البوذية ، وبالرغم من أنه لم يبق منها سوى ثلاثين إلا أن عليها وجدت أول نماذج للرموز العـددية التى نستعملها الآن ، ومن هـذا الرموز .



شكل (١١)

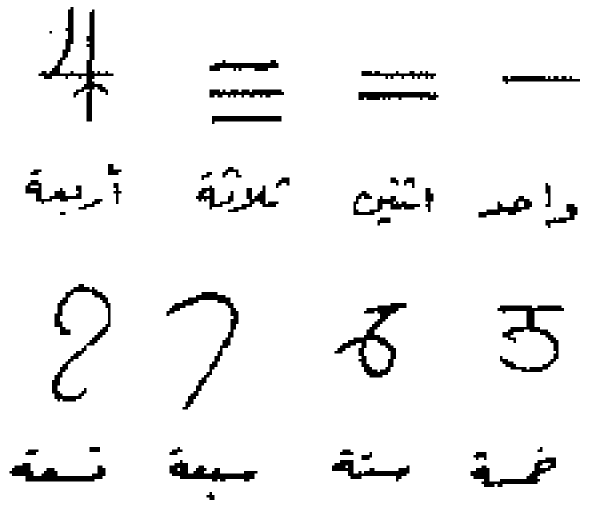
وبعد حوالى قرن من حكم أسوكا حفرت بعض النقوش على حوائط كهف فى تل يسمى ناناغات بالقرب من مدينة بونا فى بومباى ، وتشتمل هذه النقوش على رموز عددية هندوسية ، منها :



شكل (١٢)

وبعد حوالى أربعة قرون من حكم الملك أسوكا ، أى حوالى سنة ٢٠٠

ميلادية حفر بعض الناس نقوشا فى كهوف فى بلدة ناسك من أعمال بومباى ، وهى بلدة يقدسها الهندوس ، وبين هـذه النقوش رموز عددية يهمنا منها بنوع خاص ما يأتى :



شكل (١٣)

وإذا درسنا هـذه الرموز العددية لوجدنا أن رموزنا العددية ذات أصل هندى ، ومن المهم هنا أن نلاحظ أنه لم يرد فى مجموعات الرموز الهندية التى استعرضناها هنا أى رمز للصفر ، فى حين أنها تحتوى على رموز (لم نستعرضها فيما سبق) تدل على عشرين وأربعين وغيرها ، ومن هذا يتضح أن الرموز لم تستخدم بقيمتها المكانية التى تمثل لدينا الآن مواضع المعدودات على المعداد، وعلى كل حال فلابد أن تكون القيمة المكانية قد وصلت إلى الهند قبل القرن التاسع عشر، فقد كتب الخوارزمى، الرياضى العربى الذى كان أمينا لمكتبة الخليفة المأمون ، فى الموضوع كتابا عام ٨٢٥ ميلادية ، وقبل هذا التاريخ وضع الهنود للصفر رمزا ،فقد وجد الرمز محفورا منذ عهد يرجع إلى عام ٨٧٦ ميلادية ، ومن المؤكد أنه استعمل فى الهند قبل ذلك التاريخ، ولكن لماذا كان وضع هذا الرمز هاما ؟ ذلك لانه أصبح ممكنا أن نستعمل الرموز الهندية التسعة ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ فى تمثيل أى عدد مهما يكن كبيرا ، ووظيفة الصفر فى ذلك أن تدل الرموز العددية التسعة على محتويات أسلاك المعداد دلالة سليمة ، عن

طريق الدلالة على أن هذا السلك أو ذاك لا يحتوى على معدودات ، ولقد جاءت كلمة zero من الكلمة العربية صفر وهى ترجمة للكلمة الهندية سنيا Sunya التى تعنى « خال » أو « فارغ » ، ولقد انتقلت كلمة صفر إلى اللغة الانجليزية فى الكلمة cipher كمرادف لكلمة ero z ، وكلمة zero نفسها مختصر الكلمة الإيطالية zepiro وهذه أيضا أصلها الكلمة العربية صفر .

لنترك الآن الرموز الهندية ، ونختلس النظر إلى الدولة العظيمة التى قامت بعد وفاة محمد (صلى الله عليه وسلم) أشهر عربى ظهر ، فبعد وفاته عام ٦٣٢ ميلادية حكم الخلفاء الجزيرة العربية ، وفتحوا البلاد التى تمتد من حدود الهند إلى المحيط الأطلسى ؛ ومن شمال أفريقيا حتى جبال البرانس .

فى عام ٧١١ ميلادية غزا العرب بلاد الأندلس (بعد سقوط الإمبراطورية الرومانية حكم إسبانيا أحفاد القوط الهمج) ، وانتهت الحرب بنصر كبير للعرب استمر فترة زمنية أطول من تلك التى مضت منذ وطئت أقدام أجدادنا هذه الأرض (١) حتى اليوم .

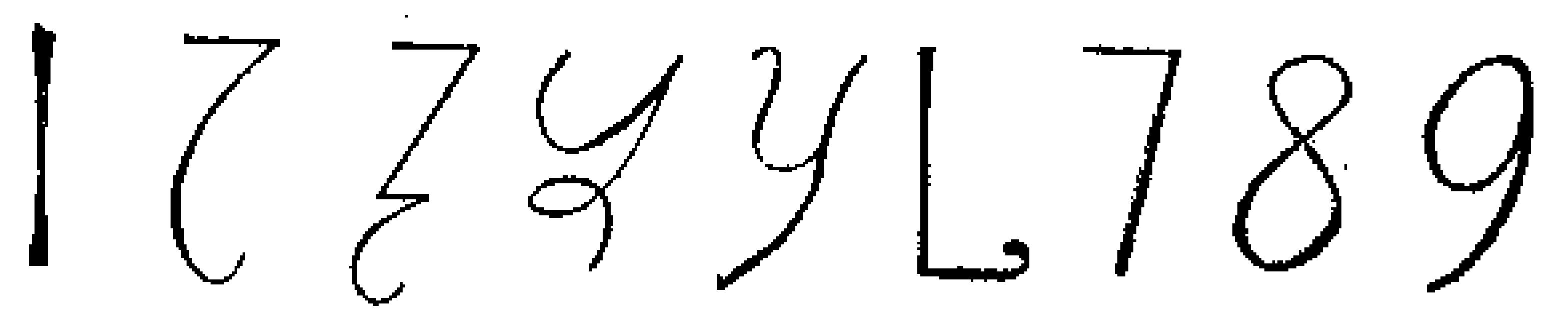
وشكرا للعرب ، فقد جاءوا بأفكار جديدة فى الدواء والطب ، ونشروا طرقا متطورة لتشغيل المعدن والجلد ، وبنوا الخزانات وحفروا الترع ، وبالجملة جلبوا الحكمة إلى أوروبا التى كانت غارقة فى الجهل والتخلف .

ولقد كان العرب على معرفة بالرياضيين الإغريق الذين بنوا عهد رياضة الإغريق قبل أن يطغى الرومان — بإغراقهم فى النواحى العملية والنفعية — على الحضارة اليونانية الرقيقة المهذبة ، كذلك أدخل العرب إلى الأندلس الطريقة

(١) يعنى المؤلف الفترة التى مضت منذ وطئت أقدام المستوطنين أمريكا (المترجم) .

الجديدة الثورية فى كتابة الأعداد ، هذه الطريقة التى مهدت السبيل لما يعرفه العالم الحديث فى الهندسة والطيران .

وإن أقدم مخطوط يحتوى على الرموز العددية الجديدة (الهندية والعربية) كتب فى الأندلس عام ٩٧٦ ميلادية ، ويوضح شكل ١٤ طريقة كتابتها :



شكل (١٤)

وواضح أن هذه المجموعة لا تضم رمزاً للصفر ، إلا أن العرب كانوا قد استعملوه قبل ذلك ، فقد عثر عليه فى وثائق عربية ترجع إلى ما قبل هذا التاريخ.

ومما لا شك فيه أن رقمى 2 ، 3 اللذين يبدوان فى الشكل السابق قد تطورا من الرمزين = ، ≡ اللذين وضعهما الهنود ، فإذا كتبت = دون أن ترفع القلم مبتدئا بالطرف الأيسر للخط العلوى فإنك ترسم رقم 2 كما نعرفه الآن ، وكذلك تطور الرقم 3 من الرمز ≡ ، وفى المخطوط الأندلسى (٩٧٦ ميلادية) تفنن الناسخ فى إظهار الرقم 3 فى الصورة التى تراها فى شكل (١٤) . وواضح من الشكل أيضاً أن الرمزين 4 ، 5 كما نستعملهما الآن قد ابتعدا عن صورتهما الأصلية . والواقع أنه قبل أن يقضى تطور الطباعة على الكتب المخطوطة كان الناسخون قد أحدثوا تغيرات فردية كثيرة فى هذين الرمزين ، ومن المهم أن نلاحظ أن الرمزين 4 ، 5 فى صورتهما الحديثة قريبا الشبه إلى حد بعيد بالصورة التى وجدت لهما فى ناسك (شكل ١٣) . وبالرغم من أن 4 ، 5 لم يردا بصورتهما الحالية إلا فى وثائق ترجع إلى ما بعد اختراع الطباعة فإن النقوش التى اكتشفت فى ناسك لم تكن قد عرفت بعد فى أوروبا .

ثم مضت قرون منذ أن نقل العرب الرموز العادية الحديثة إلى أوروبا ، تمسك فيها الكنيرون باستعمال الأرقام الرومانية ، وتركوا النظام الحديث للتجار ، إلا أنه قبيل القرن الثالث عشر كان النظام الجديد فى كتابة الأعداد قد توطد فى أجزاء متفرقة من أوروبا ، ولم يكن ممكنا قبل ذلك أن يحدث أى تطور فى الحساب ، وحتى الطرق التى تجرى بها الآن عمليات الضرب والقسمة تطورت بالتدريج البطيء خلال القرون التى تلت إدخال الرموز الجديدة إلى أوروبا ، وخلال ذلك جربت طرق كثيرة — جاءت أفكارها الأصلية من بلاد العرب والهند وبلاد فارس — قبل أن تستقر الخطوات التى نتبعها الآن ، وذلك فى القرنين السادس والسابع عشر .

ومن المدهش حقاً أن آلافاً كثيرة من السنين قد مضت قبل أن يفكر الناس فى طريقة بسيطة لكتابة الأعداد ، ويصعب علينا الآن بعد أن جرى ماجرى ، أن ندرك السنوات الطويلة من الكفاح والجهد ، التى تقع وراء النظام البسيط الذى نتبعه فى كتابة الأعداد ، والخطوات السهلة التى نجرى بها العمليات الحسابية ، وإذا تتبعنا تطور الأفكار الرياضية خلال العصور المتعاقبة لرأينا مرة ومرات أن المفاهيم والعمليات التى تبدو فى عصر من العصور مغلقة وصعبة لا تلبث أن تتضح وتصبح أمراً مسلماً به فى عصر آخر .

والآن بعد أن تتبعنا تطور الأعداد والعمليات العددية ، نعود إلى الوراء إلى العصور البدائية ، لنكتشف كيف نشأ فرع آخر ، على درجة كبيرة من الأهمية من فروع الرياضيات ، إذ أن هذا الفرع أصبح الدعامة التى قامت عليها الرياضيات الحديثة .

الفصل الثانى

نشأة الهندسة

والعصر الذهبى للرياضيات عند الإغريق

يشترك الإنسان مع الحيوان فى الحاجات المادية الأساسية ، فهو يحتاج إلى الطعام ، وإلى ما يحميه من عوامل الطبيعة ، إلا أنه تميز عن غيره من الحيوان بأن أعطى القدرة على استغلال المواد الطبيعية كالخشب والحجر والمعدن ، وعلى استخدام قوى ونظم أقوى منه إلى حد لا نهائى ، قوى لم يصل إليها فهمه حتى فى هذا العصر .

وقصة تطور البشرية ، فى نواحيها الأساسية ، هى قصة الخطوات البطيئة الشاقة التى استطاع بها الإنسان أن يضمن الطعام والمأوى والأمن لنفسه . واليوم تقدم الإنسان فى هذا الطريق إلى الحد الذى مكنه من السيطرة على قوى الطبيعة — نحو الخير أو الشر — بصورة تفوق التصور . واليوم لا يخاف الإنسان على نفسه من قوة عوامل الطبيعة أو الكائنات الحية ، بل إن السبب الوحيد للخوف كامن فيه نفسه .

ولقد بدأ الإنسان البدائى ، خلافا لما حوله من الحيوانات ، يبحث عن طرق تضمن بقاءه على قيد الحياة ، عن طريق استغلال الأجسام والقوى الخارجية ، وبذلك استطاع أن يسهل لنفسه سبل الحياة ، وإن كان هذا قد زادها تعقيداً ولم يجعلها أكثر سعادة .

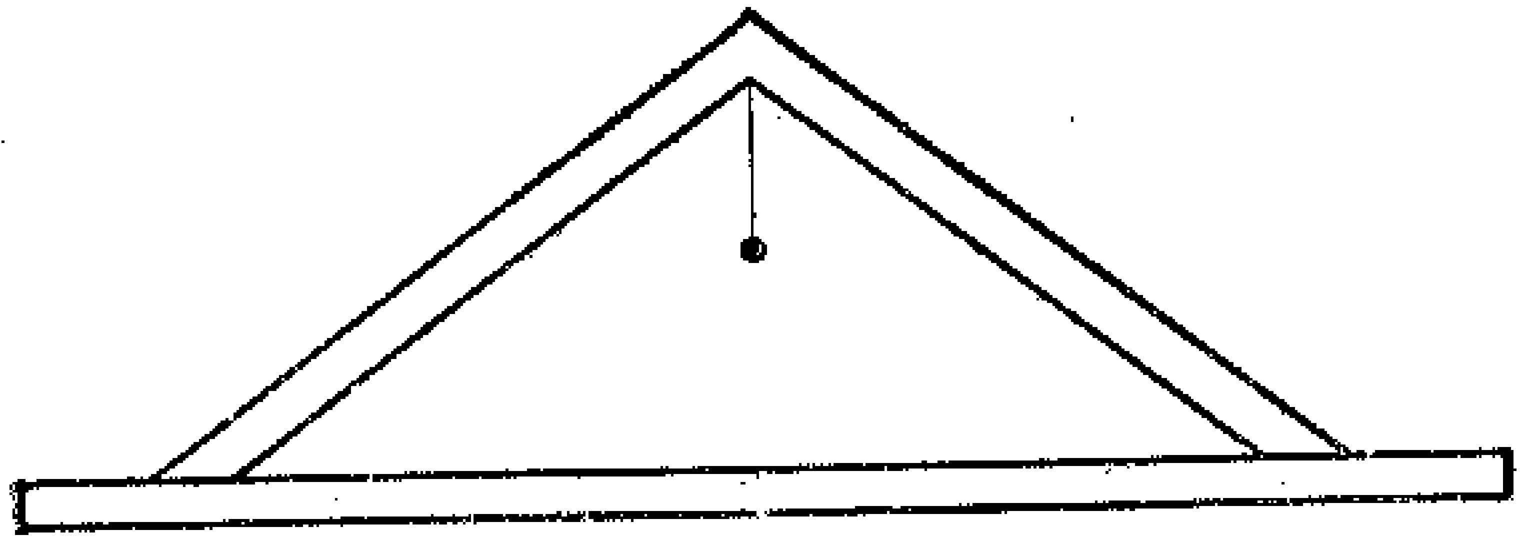
فلقد تعلم كيف يصنع أدوات قاطعة ، ليس للصيد والقتال فقط ، بل أيضاً للعمل بها فى الخشب والحجر ، ونتيجة لذلك لم يعد مقيداً بالحياة فى كهف ، بل استطاع أن يبنى لنفسه منزلا فى المكان الذى يتوافر فيه الطعام والماء .

كذلك اكتشف طرقاً لتشكيل وحرق الأوانى ، وبذلك استطاع أن يطبخ طعامه بسهولة ، كما استطاع أن يخزنه فى أوقات الرخاء ليجده عند الشدة .

وأخذت زوجته قطعة رفيعة مدببة من العظم وثقبت فى طرفها المفرطح ثقباً مررت فيه قطعة من الجلد أو الشعر ، وهكذا بدأ فن التفصيل والخياطة .

وبعد قليل لم تعد الزوجة راضية عن الكوخ الخشبى فدفعت زوجها إلى تحسينه ، وبالتدريج استطاع أن يوفر الجهد فى إنشاء الكوخ عن طريق جعل أطراف الأعمدة وقطع الخشب — كما نسميها الآن — عمودية على الأحرف ، وبالتدريج توصل إلى أن يثبت قطعتين مستقيمتين من الخشب معاً لتكونا — حسب تقديره — الزاوية المطلوبة ، وبذلك صنع الزاوية القائمة التى يستعملها النجار .

ثم وجد أنه من الأفضل أن يبنى منزله على أرض مستوية ، ولكن الأرض لم تكن كذلك ، فصنع لنفسه مسواة ، بأن أخذ ثلاث قطع من الخشب وثبتها مكونة ما نسميه الآن مثلثاً متساوى الساقين ، ذا قاعدة ممتدة من جهتيها ، وأحدث علامة فى منتصف قاعدة المثلث ، ثم ثبت خيطا فى رأس المثلث ، وربط فى الطرف الآخر للخيط ثقلا كما هو موضح فى شكل ١٥ .



(شكل ١٥)

وعندما كان يحفر على سفح التل لينشىء أساسا مستوياً كان يأخذ من آن إلى آخر أداة التسوية التى صنعها ، ويطابق قاعدتها على السطح . فإذا وجد أن الخيط ، بالثقل المربوط فيه ، يقع فوق العلامة مباشرة عرف أن سطح الأرض كما يريده أن يكون ، ولم يكن بالطبع يستطيع أن يفسر لماذا تعمل هذه الأداة بهذه الصورة . وفى هذا وجد الإنسان أنه يستطيع أن يستغل واحدة من قوى الطبيعة حسب حاجته ، وكى تؤدى هذه القوة ما يريده هو وجد أن أطوالا معينة من قطع الخشب ينبغى أن تثبت معاً فى شكل معين ، وأن ثقلا يجب أن يعاق من نقطة معينة ، وأن علامة ينبغى أن تحفر فى موضع معين ، وعندما يتم هذا ، وفقط عندما يتم ، تضع قوة أكبر من قوته نفسها فى خدمته ، وهو هنا يستخدم — دون أن يدرى — قوانين رياضية ليخضع لمشيئته القوة الغامضة التى تجذب الأشياء إلى مركز الأرض . هذا مثال فى غاية البساطة لما ظل العلم يؤديه منذ ذلك الحين .

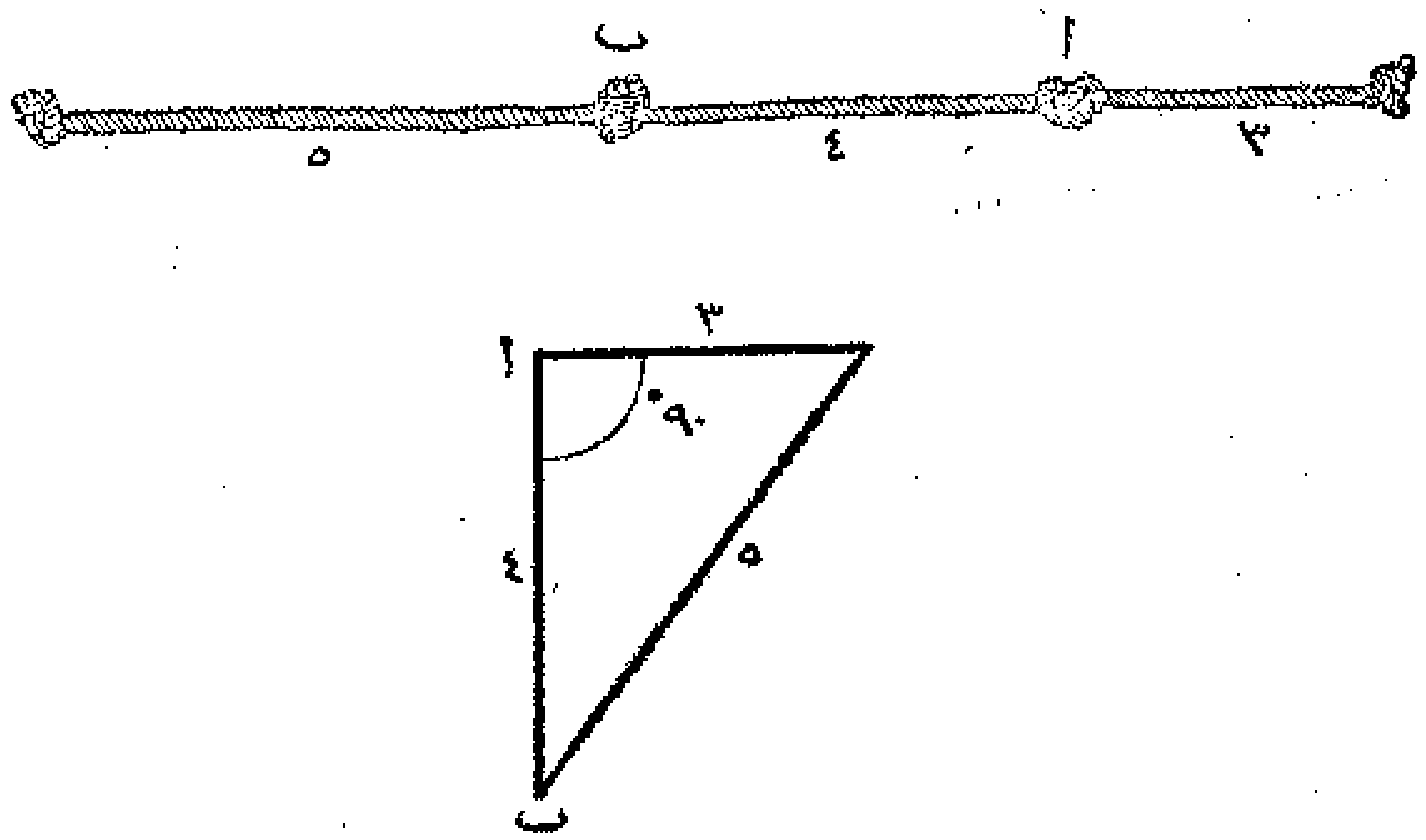
إن أداة التسوية « المسافة » التى وصفناها قد وجدت فى مقابر قدماء المصريين ، فى حين وجدت صور لها منقوشة على مقابر بعض المساحين الرومان .

ونظراً لأن هذه الأداة استعملت فى أزمنة الرومان ، ونظراً لأنها كانت معروفة عند قدماء المصريين ، فمن المؤكد أن أداة أكثر منها تعقيداً لم تستخدم فى وضع أساسات الأهرام أو معابد قدماء المصريين .

ومع تقدم الحضارة اخترع الإنسان أدوات كثيرة غير هذه الأداة حسب الحاجة العملية إليها، وبهذا وضع ـ لاشعوريا ـ أسس العلوم الرياضية والطبيعية .

فلكى يجعل الأساس الذى يبنى عليه مبانيه سليما احتاج الإنسان إلى طرق يحصل بها على مستقيمات (ذات أطوال كبيرة) متعامدة تماما . وإن من حاول تخطيط أساس أى بناء ، وليكن حظيرة جراج أو ملعب تنس مستخدما فى ذلك المثلث الخشبى القائم الزاويه ليدرك الصعوبة فى أن يصل به إلى قياسات دقيقة تماما ، ولا يستطيع الهاوى سوى أن يستخدم الأداة التى اكتشفها قدماء المصريين ، واستخدمت كذلك فى الهند ، والصين ، وبلاد بابل ، قبل مجىء المسيح بقرون كثيرة . ولقد استخدمها المصريون منذ ٢٥٠٠ سنه قبل الميلاد ، وليست سوى حبل له عقدتان .

تصور منظراً فى مصر القديمة منذ آلاف السنين : تصور مساحا مصرياً يسير نحو الموقع المختار ليكون مقرا لقصر جديد لفرعون ، وخلفه يسير ثلاثة عبيد يحمل أحدهم حبلا مقسما فى عقدتين إلى أقسام ثلاثة .



شكل (١٦)

يبدأ المساح بأن يخط خطا من خطوط الأساس ، ويوقف عبدا عند إحدى نهايتيه ، ويمسك هذا العبد الحبل عند النقطة التى رمزنا لها بالرمز ا ، ثم يجمع عبد ثان طرفى الحبل ويسير على الخط حتى يصبح الجزء القصير من الحبل مشدودا إلى نهايته ، فيضع يده ممسكة بطرفى الحبل على الخط ، عند ذلك يمسك العبد الثالث بالطرف الذى رمزنا له بالرمز ب ، ويسير مبتعدا عن الخط حتى يصبح الحبل كله مشدودا ، وهكذا يأخذ الحبل شكل مثلث قائم الزاوية عند النقطة التى يقف فيها العبد الأول .

كان يطلق على المساح مداد الحبال دلالة على اتساع استخدام هـذه الأداة البسيطة فى العصور القديمة ، وليس هناك أفضل من هذه الأداة المصنوعة باليد للهاوى الذى يريد أن يضع أساساً لبناء . وكلما زاد طول الحبل زادت الدقة فى زاوية ا . وكل ما يهمنا هو أن تـكون مواضع العقد بحيث تـكون أجزاء الحبل بنسبة ٣ : ٤ : ٥ فمن لممكن أن تـكون ٦ ، ٨ ، ١٠ أو ٩ ، ١٢ ، ١٥ أو ١٢ ، ١٦ ، ٢٠ من الأقدام ... وهكذا .

لم يستطع قدماء المصريين بأدوات بدائية كهذه أن يخططوا أسس مبانيهم العظيمة فحسب ، بل استطاعوا كذلك بناء أهراماتهم الضخمة بحيث تتلاقى السطوح المثلثة للهرم فى رأس يقع فوق مركز القاعدة تماما ، ولقد كان هذا تحصيلا رائعا إذا نظرنا إلى بساطة الأدوات التى كانت فى حوزتهم .

ولم يكن يهمهم السبب الذى يجعل المسافة أو الحبل يؤدى العمل ، ولم يكونوا يعرفون أن هناك تعليلا رياضياً لجميع هذه الأشياء التى بدت غامضة لهم .

وبالتدريج ، خلال القرون المتعاقبة ، تجمع لدى الكهنة المصريين تراث ضخم من المعارف العملية التى تقوم على التجريب والخبرة لا على التعليل المنطقى ، وتركوا للاغريق اكتشاف التعليلات التى تكمن وراء هذه المعارف .

لقد كانت الحياة فى مصر مركزة حول نهر النيل ، بل إن مصر قد سميت « هبة النيل » ، ويمكن أن يعتبر النيل أبا للهندسة ، بل أبا للرياضيات .

ولقد ظل النيل خلال قرون لا يمكن حصرها يفيض على جانبيه عاما بعد عام ، وكان ماء الفيضان يزيح أمامه الغرين «الطمى» المنحوت من جبال الحبشة نحو الدلتا ، المصب الثلاثى الشكل الذى ينقسم إليه النيل قبل أن يصب ماءه فى البحر المتوسط ، بل إن كلمة مصر كلمة قبطية تعنى « الأرض السوداء » دلالة على هـذا الغرين الخصيب الذى يجلبه النيل . لقد كان هذا الطمى يزيل العلامات التى يضعهـا المصريون على أرضهم ، وبذلك يضطر المصريون إلى إعادة تخطيطها ، ولقد علمهم قياس الأرض بطريقة عملية بسيطة كثيراً مما نسميه الآن أشكالا هندسية .

وبعد مضى آلاف السنين، منذ أن قاس المصريون أرضهم، زار مصر تاجر من ميليتس — أغنى مدن الإغريق فى ذلك العصر — واهتم اهتماما خاصا بالتراث الكبير الذى تجمع على مر العصور لدى الكهنة المصريين، ولنلق نظرة على هذا التاجر اليونانى، إذ أنه يعتبر أبا للرياضيات التى نعرفها.

فى عام ٦٤٠ قبل الميلاد ولد فى ميليتس صبى اسمه طاليس، كان آباؤه أحفادا للمستوطنين الإغريق فى هذه المدينة، ولقد أظهر منذ طفولته قدرة وكفاية، ويبدو أنه نجح فى التجارة إلى الحد الذى جعله يدخل مجال السياسة وغيرها من الشئون فى سن مبكرة. لقد قيل إنه اشترى يوما جميع معاصر الزيتون حول ميليتس، ولما نجح فى احتكار السلعة شعر بالرضا وباع مالديه من زيت الزيتون بسعر معقول.

وفى سن مبكرة عرف بحنكته السياسية فاختير واحدا من « الحكماء السبعة » فى اليونان.

ولا تقف شهرة طاليس عند مهارته فى التجارة، ولا عند قدرته فى السياسة، بل عند إنتاجه العقلى، ولو اقتصر نشاطه على التجارة والسياسة لانمحى اسمه تماما كما انمحت أمجاد المدينة التى عاش فيها. لقد رأينا أنه خلال انشغاله بالتجارة زار مصر وأعجبته طرق المصريين فى « قياس الأرض »، فلما ترك التجارة كرس وقت فراغه لدراسة الفلك والرياضيات، وأطلق على رياضياته اسم « قياس الأرض » لكن نظراً لأنه إغريقى فقد استخدم كلمة geometry. ولقد كان مولعاً بالمعرفة شأن كثير من معاصريه وممن جاءوا بعده، وكان لهذه المعرفة أن تثمر أعظم نتاج فكرى وصل إليه الجنس البشرى.

خلال أسفاره اهتم بالفلك عند البابليين وأدخله إلى بلاد اليونان، وفى إحدى المناسبات أدهش مواطنيه الإغريق بأن توقع كسوفا للشمس فى عام ٥٨٥ قبل الميلاد، وزادت دهشتهم عندما حدث الكسوف بالفعل فى ٢٨ مايو فى العام ذاته، ولقد ذكر هيرودوت المؤرخ الإغريقى أن ذلك قد تم خلال إحدى المواقع الحربية فتوقف القتال وعم السلام إلى أمد بعيد، ولعل طاليس قد حصل على معلوماته عن هذا الكسوف من البابليين، فقد برعوا فى علم الفلك قبل عصر طاليس بقرون كثيرة، وعلى كل فإن بعض الرياضيين الإغريق الذين سنلتقى بهم على صفحات هذا الكتاب اكتشفوا حقائق عن الكون لم تثبت صحتها حتى العصور الحديثة.

لسنا نذكر طاليس هنا للمعارف الفلكية التى وصل إليها، ولكن لإسهامه فى علم الرياضيات، فقد حاول إشباع فضوله بإيجاد تفسير للحقائق الهندسية التى وصل إليها المصريون بالبداهة، فأدى ذلك به إلى السير فى الخطوات الأولى التى أدت إلى ما يعرف الآن بالهندسة الاستنتاجية deductive geometry. ونعنى بذلك نظاما من التفكير المنطقى يستعمل الهندسة كوسط لبناء بنيان ضخم من الإنتاج العقلى، وهذا النوع من التفكير هو الذى أدى إلى تطور أكثر مفاهيمنا الرياضية.

والواقع أنه ليس من السهل شرح ما نعنيه بالتفكير الاستنتاجى، إلا أن القارىء غير الرياضى يستطيع أن يكوّن فكرة عامة خلال الصفحتين التاليتين.

الاستنتاج هو نوع من التفكير البحت، يبدأ بمبادىء معينة يستخلص منها من يقوم بالتفكير بعض النتائج، وفى هذه العملية لا يستعمل إلا الحقائق

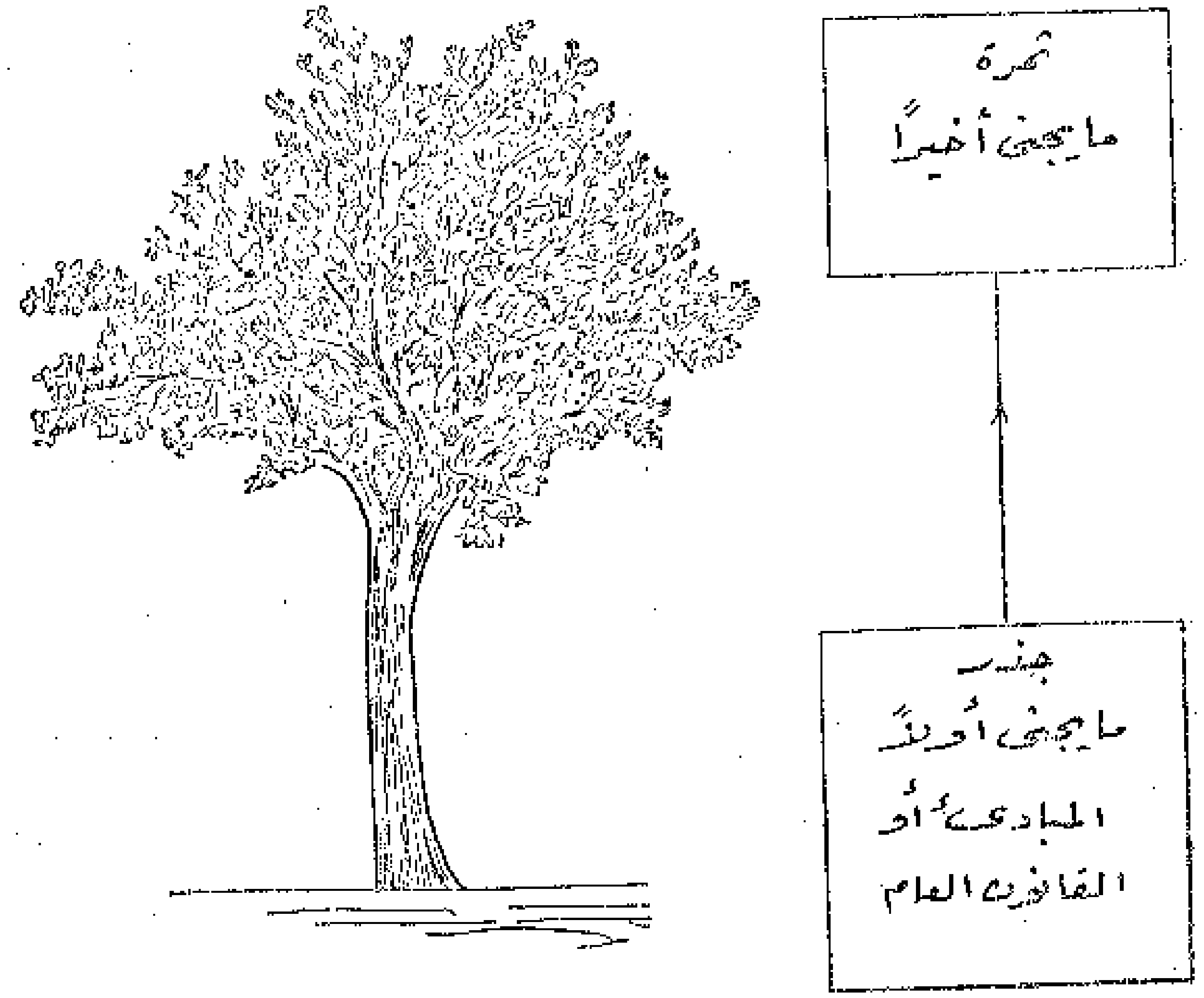
وبعد مضى آلاف السنين،منذ أن قاس المصريون أرضهم،زار مصر تاجر من ميليتس — أغنى مدن الإغريق فى ذلك العصر — واهتم اهتماما خاصا بالتراث الكبير الذى تجمع على مر العصور لدى الكهنة المصريين ، ولنلق نظرة على هذا التاجر اليونانى ، إذ أنه يعتبر أبا للرياضيات التى نعرفها .

فى عام ٦٤٠ قبل الميلاد ولد فى ميليتس صبى اسمه طاليس ، كان آباؤه أحفادا للمستوطنين الإغريق فى هذه المدينة ، ولقد أظهر منذ طفولته قدرة وكفاية ، ويبدو أنه نجح فى التجارة إلى الحد الذى جعله يدخل مجال السياسة وغيرها من الشئون فى سن مبكرة . لقد قيل إنه اشترى يوما جميع معاصر الزيتون حول ميليتس ، ولما نجح فى احتكار السلعة شعر بالرضا وباع مالديه من زيت الزيتون بسعر معقول .

وفى سن مبكرة عرف بحنكته السياسية فاختير واحدا من « الحكماء السبعة » فى اليونان .

ولا تقف شهرة طاليس عند مهارته فى التجارة ، ولا عند قدرته فى السياسة ، بل عند إنتاجه العقلى ، ولو اقتصر نشاطه على التجارة والسياسة لانمحى اسمه تماما كما انمحت أمجاد المدينة التى عاش فيها . لقد رأينا أنه خلال انشغاله بالتجارة زار مصر وأعجبته طرق المصريين فى « قياس الأرض » ،فلما ترك التجارة كرس وقت فراغه لدراسة الفلك والرياضيات ، وأطلق على رياضياته اسم « قياس الأرض » لكن نظراً لأنه إغريقى فقد استخدم كلمة geometry . ولقد كان مولعاً بالمعرفة شأن كثير من معاصريه وممن جاءوا بعده ، وكان لهذه المعرفة أن تثمر أعظم نتاج فكرى وصل إليه الجنس البشرى .

التى اتخذت مبادىء منذ البداية أو ثبتت صحتها باستخدام هـذه المبادىء ، ولقد عرف هذا النوع من التفكير بأنه التفكير المبنى على ما يسبقه ، ولعل شكل (١٧) يجعل ذلك أكثر وضوحا .



شكل (١٧)

فى التطبيق العملى يسبق البرهان الاستنتاجى مرحلة إعدادية وتعرف هذه المرحلة التى تجرى عادة فى العقل « بالتحليل »[1] وكما أن الكيماوى عندما يحلل مادة إنما يرجعها إلى العوامل التى تتركب منها ، كذلك عندما يحلل الرياضى مسألة إنما يجرى اختبارات أولية ، ويجزىء النتيجة التى يريد الوصول إليها إلى حقيقة أو حقائق رياضية متفق عليها ، ثم يتقدم فى خطوات منطقية

(١) الكلمة الانجليزية هى analysis والكلمة المقابلة لها فى اليونانية analusis .

حتى يصل إلى الحقيقة المعينة التى يمكن أن يشتق منها النتيجة المطلوبة .

وعند ذلك يعاود رسم خطواته ويضع معاً الحجج التى استعملها فى تحليله بصورة عكسية ، وعملية وضع الحجج معاً هذه تسمى تركيباً[1] .

خلال التقدم الظافر للجيوش الروسية فى الحرب العالمية الثانية غاص بعض المهندسين الروس خلال الليل تحت مياه أحد الأنهر ، ووضعوا تحت الماء أساساً لقنطرة يبتدىء من مكان مناسب للنزول على الشاطىء الذى يحتله العدو ، وينتهى فى الموقع الذى يحتلونه على الشاطىء الآخر ، وبذلك أصبح سهلا عليهم أن يمدوا القنطرة على النهر ، مبتدئين من الناحية التى يحتلونها ، خطوة خطوة على الأساس الذى وضعـــوه فى ترتيب مضاد لذلك الذى اتبعوه عند هجومهم الأول .

إن المرحلة الأولى فى هذه العملية الحربية هى تكامل الخطة فى عقل القائد الروسى ، فلقد فكر فى خطة الهجوم على أساس هدف (وهو الوصول إلى النتيجة من العملية) وأخيراً وصل ، فى عقله ، إلى النقطة التى ينبغى أن تبدأ منها العملية ، إن هذه المرحلة الأولى تناظر التحليل الرياضى للمسألة الهندسية .

أما المرحلة الثانية ــ مرحلة الهجوم الفعلى ــ فإنها تناظر التركيب الرياضى ، إذ أن الغزو قد بدأ من « نقطة الهجوم » وتبع فى ترتيب عكسى الخطوات التى وضعت فى المرحلة الأولى ، حتى تم الوصول إلى « نتيجة » العملية على الشاطىء الذى يحتله العدو .

(١) الكلمة الانجليزية هى synthesis وأصلها يونانى ويعنى : « يضع معا » .

هذا ملخص قصير لما نعنيه « بالتفكير الاستنتاجى » أو الاستنتاج كما يستعمل فى الهندسة ، وفى الرياضيات عموماً ، ولعل سائلا يسأل : « وما فائدة ذلك ؟ » والجواب أنه لولا ذلك لما كانت لدينا رياضيات ، وبدون الرياضيات ما كان لدينا علم أو هندسة كما نعرفها اليوم ، وبالرياضيات تحسب حركة الأرض وتعد التقاويم التى بدونها تصبح حياتنا فوضى ، كما أن الرياضيات تمكن رجال المساحة من رسم الخرائط التى بدونها تتوقف التجارة والسفر ، كما تمكن رجال الأرصاد من التنبؤ بالريح والمطر والجليد والمد والجزر ، كما أن الملاح يعتمد عليها فى السير فى البحار التى لا تعرف أغوارها ، والصحارى التى لا تعرف ممراتها ، ولولا الرياضيات لفقد العالم والمهندس قوته ، ولانتهت الحضارة ، ولتعطل المهندسون المعماريون ، والبناءون والكهربيون وعمال الراديو واللاسلكى وغيرهم ممن لا يحصى عددهم ، ولتجمعت فى كوم مهمل جميع الآلات وأجهزة التليفون والتلغراف والراديو وأشعة إكس والسينما ، وأجهزة الإضاءة والتدفئة وغير ذلك مما لا حصر له من الأدوات الحديثة .

والواقع أن الأساس الذى تقوم عليه جميع هذه الرياضيات هو التفكير الاستنتاجى ، لذلك ينبغى أن نوجه الشكر لرجل الأعمال المتقاعد طاليس لأنه استخدم وقت فراغه استخداما نافعا .

خلافا لغيره من رياضيى الإغريق اهتم طاليس بتطبيق معارفه الهندسية بصورة عملية ، فأدهش المصريين بأن حسب لهم ارتفاع أحد أهرامهم عن طريق قياس ظله ، وطبقا لما ذكره الكاتب پلينى Pliny قام بذلك فى اللحظة التى يكون فيها ارتفاع الشخص مساويا طول ظله ، إلا أنه من المشكوك فيه أن يكون ذلك قد أدهش المصريين ، إذ أنهم عرفوا المزولة منذ عام ١٥٠٠ قبل

الميلاد ، وكانت المسائل المتعلقة بالظلال مألوفة لديهم بالرغم من أنهم لم يعرفوا تشابه المثلثات ، وفى رواية أخرى ذكرها بلوتارخ Plutarch لم يعتمد الحل الذى أجراه طاليس على لحظة القياس ، بل اقتضى معرفة بخواص المثلثات المتشابهة .

كذلك طبق طاليس معرفته بالهندسة فى حساب بعد سفينة فى عرض البحر عن الشاطىء ، ومما لا شك فيه أنه أجرى كثيرا من التطبيقات العملية لهذا العلم ، إلا أننا لا نعرف عن ذلك شيئا ، وبالرغم من عدم وجود كتاب أو وثيقة كتبها طاليس فإن اسمه سيظل عاليا بين الرياضيين للعمل الريادى الذى قام به .

وقبل وفاة طاليس بحوالى ست وثلاثين سنة ، ولد رياضى عظيم آخر على بعد أميال قليلة من محل ميلاد طاليس .

بالقرب من شاطىء آسيا الصغرى توجد جزيرة صغيرة هى جزيرة ساموس تبلغ مساحتها حوالى سبع مساحة لونج ايلند Long Island كان يقطنها أحفاد المستوطنين الإغريق الذين وصلوا إليها حوالى سنة ١٠٠٠ قبل الميلاد .

حوالى عام ٥٨٠ قبل الميلاد (لا يعرف أحد التاريخ على وجه الدقة) ولد فى ساموس صبى اغريقى تجد اسمه اليوم فى كل كتاب من كتب الهندسة هو فيثاغورث ، ولسنا نعرف عن طفولته سوى أنه درس على يد طاليس ، ولعله زار مصر تلبية لنصيحة أستاذه ليدرس « قياس الأرض » على يد الكهنة المصريين ، وعندما بلغ من العمر حوالى خمسين سنة ترك ساموس وذهب ليعيش فى بلدة اسمها كروتونا فى جنوب إيطاليا .

لسنا نعرف الأسباب التى دعت فيثاغورث إلى أن يترك ساموس ، لكنه بمجرد وصوله كروتونا كوّن مدرسة فى فلسفة الرياضيات ،وإن تكن كثير من المعتقدات التى اعتنقها الفيثاغورثيون تبدو لنا أمورا تافهة إلا أن علم الرياضيات مدين دينا كبيرا للعمل الذى قام به أتباع فيثاغورث . ولقد كان للمنتسبين لهذه المدرسة نفوذ كبير فى جميع أجزاء بلاد الإغريق ، ويبدو أنه كان لديهم شيوعية عملية ، ليس بالمعنى الحرفى ، ولا بالمعنى السياسى بالطبع ، ولكن فيما بينهم ، فلم يكونوا يتشاركون أمور الدنيا فقط ، بل أيضا جميع اكتشافاتهم الرياضية والفلسفية ، وكانوا فى بادىء الأمر يقسمون على عدم إذاعة أسرار وتعاليم الجماعة ، وكانت هذه شفوية يحفظها الأعضاء ، ولكنها مع مرور الزمن سجلت كتابة ، ولقد تأثر أفلاطون تأثرا كبيرا بإحدى هذه الوثائق الفيثاغورثية .

ولقد اكتشف فيثاغورث،أو أحد أتباعه،المتوالية التوافقية فى السلم الموسيقى التى تربط بين طول الوتر وتردد النغمة ، ولعل هذا الاكتشاف هو الذى قادهم إلى الاعتقاد أن « الأعداد » هى العناصر التى تنشأ عنها جميع الأشياء ، وأن أى شىء يمكن التعبير عنه بالأعداد .

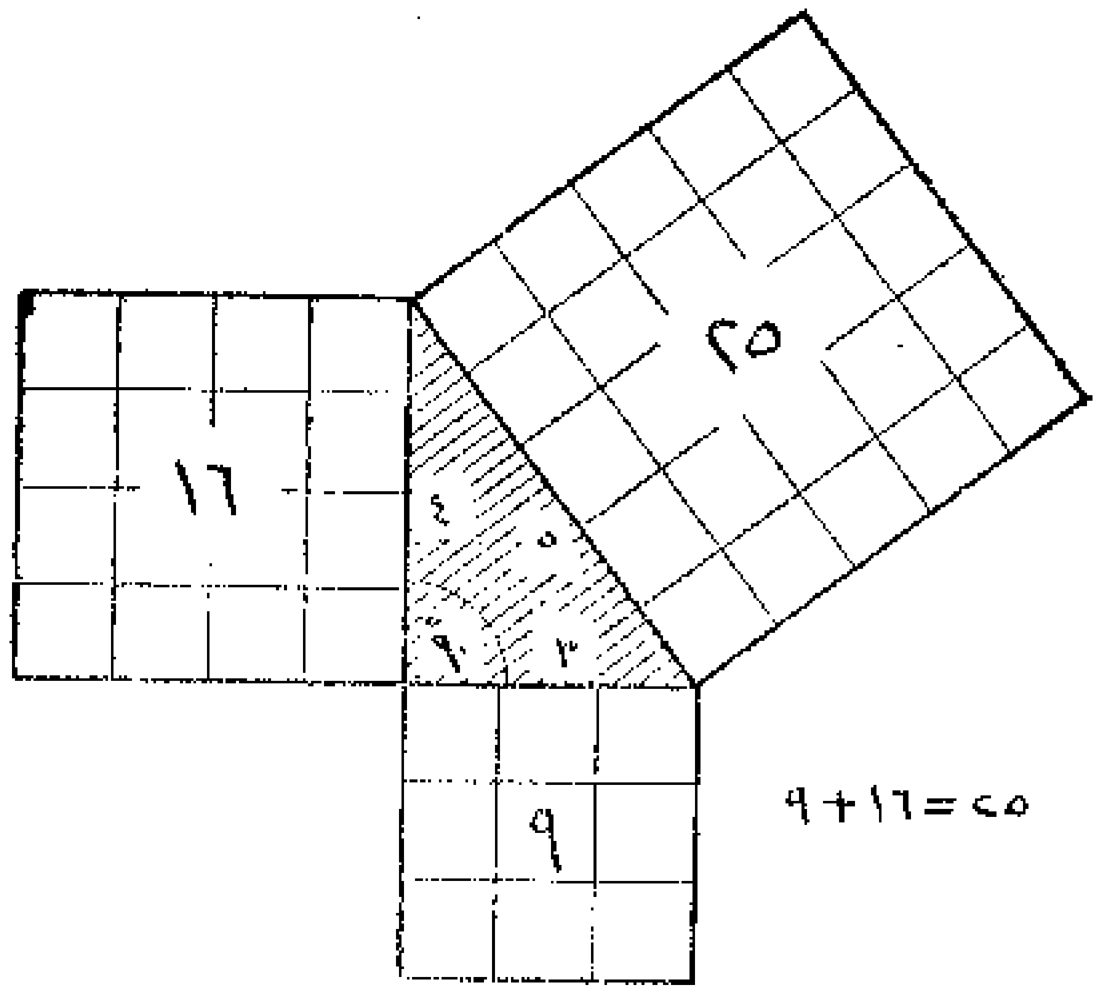
كذلك وضعوا اصطلاحى الأعداد « الفردية والزوجية » واعتبروا الأعداد الفردية مذكرة والزوجية مؤنثة ، ونظراً لأن المجتمع كان مجتمع رجال ، فقد اعتبروا الأعداد الفردية مقدسة ، أما الأعداد الزوجية فغير ذلك ، ومما لا شك فيه أن نساءهم وافقن على أن الأعداد الفردية هى السعيدة الحظ ، وأن الأعداد الزوجية هى السيئة الحظ ، ولقد ظلت هذه الخزعبلات سائدة حتى عصر شكسبير فقد جاء فى رواية « زوجات وندسور المرحات» على لسان فولستاف : « هذه

هى المرة الثالثة ، أرجو أن يكون الحظ السعيد فى الأعداد الفردية . يقولون إن الأعداد الفردية قدسية سواء فى الحياة أو فى الثروة أو فى الموت »

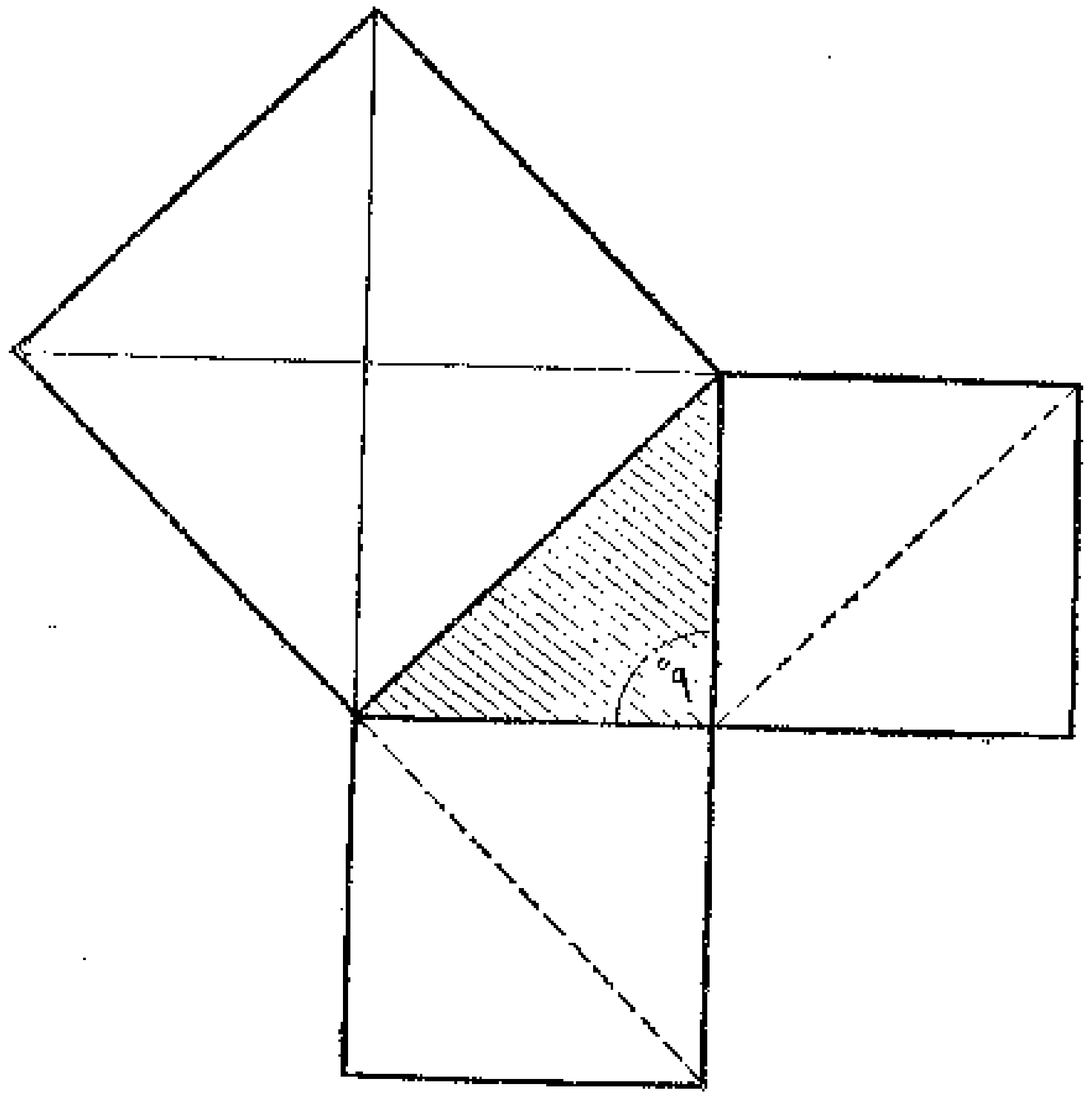
إلا أن الفيثاغورثيين لم يستخدموا الهندسة التى درسوها استخداماً عملياً إنما كان اهتمامهم موجهاً إلى الناحية المجردة للرياضيات ، فتابعوا عمل طاليس ، وتوسعوا فى بناء الأساس الأول للهندسة كما نعرفها نحن ، فوضعوا بالتفكير الاستنتاجى براهين منطقية للحقائق الهندسية .

ولقد أطلق على منطوق الحقيقة وبرهانها اصطلاح نظرية ، وما زال اسم فيثاغورث مرتبطا بالنظرية التى تنص على أن« مساحة المربع المنشأ على أطول ضلع فى المثلث القائم الزاوية تساوى مجموع مساحتى المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين » ، إلا أنه من المشكوك فيه أن الفيثاغورثيين قد توصلوا إلى صحة النظرية لأى مثلث قائم الزاوية ، فبالرغم من أنه قيل إن فيثاغورث قد قدم ثوراً قرباناً لاكتشاف هذه النظرية ، فإنه أكثر احتمالا أنهم قد توصلوا إلى صحة النظرية فى حالات خاصة ، فإذا كانت أضلاع المثلث ٣ ، ٤ ، ٥ أو كان ضلعا القائمة متساويين فإن النظرية تكون واضحة ، فمن السهل حتى على القارىء الذى لا يعرف شيئا عن التفكير الاستنتاجى أن يرى بنفسه أن المربع الأكبر فى شكل ١٨ يكافىء مجموع المربعين الأصغرين .

والواقع أن هذه النظرية توضح السر الغامض فى الحبل ذى العقد الذى كان المصريون يستعملونه .



شكل (١٨)



شكل (١٩)

ويوضح شكل ١٩ الحالة الخاصة الثانية ، فيوضح الجزء المظلل مثلثاً قائم الزاوية متساوى الساقين ، فإذا رسم قطرا المربع الأكبر فى الشكل أمكن ملاحظة أنه يمكن وضع المثلثات الأربعة القائمة الزاوية التى انقسم إليها هذا المربع على المربعين الآخرين تماماً .

وعندما نأتى إلى قصة الجبر سنرى كيف أدت هذه النظرية إلى مشكلة محيرة ومقلقة بالنسبة لأولئك الذين اتخذوا وجهة نظر الفيثاغورثيين فى أن كل شىء يمكن التعبير عنه بالأعداد فى صورة ما ، إذ وجدوا أنهم لا يستطيعون التعبير عن الطول الحقيقى لقطر المربع بأى عدد من أعداد السلم العددى .

وإلى الفيثاغورثيين يرجع الفضل فى كثير من المصطلحات الرياضية ، بل لعلهم أول من استخدم كلمة mathematics إذ أن الكلمة اليونانية mathema تعنى «علم ». وكان الفيثاغورثيون إذا رسموا أشكالاً مخالفة لشكل آخر وتساويه فى المساحة أسموا هذه الحالة Parabole أى مساويا إذا تساوت قاعدتا الشكلين ، وأسموها ellipsis أى أقصر إذا كانت قاعدة الشكل الجديد أقصر من قاعدة الشكل الأصلى ، وأسموها hyperbole أى أزيد إذا كانت قاعدة الشكل الجديد أطول من قاعدة الشكل الأصلى . وبعد مئات من السنين اختار رياضى إغريقى عظيم هو أبولونيوس أسماء parabola و ellipse و hyperbola للدلالة على قطاعات المخروط : المكافىء والناقص والزائد على الترتيب .

ولقد كان الفيثاغورثيون أول من اكتشف أن الأرض كروية ، وذلك عن طريق ملاحظة ظل الأرض على القمر ، وبالرغم من أن هذه الحقيقة أصبحت أمراً عاديا بالنسبة للرياضيين الإغريق فيما بعد ، إلا أن الرجل العادى

لم يقتنع بأن الأرض كروية وغير مسطحة إلا فى عهـد العظماء من رجال البحر وذلك فى القرنين الخامس عشر والسادس عشر .

إن أهم البحوث التى قام بها الفيثاغورثيون فى المجالات الأخرى هى :

(١) البحوث المتصلة بنظرية الأعداد التى سنعالجها فى هـذا الـكتاب فيما بعد .

(٢) البحث عن جواب للأسئلة الآتية : هل يمكن تقسيم أى مستقيمين بحيث تـكون جميع الأجزاء التى ينقسم إليها المستقيمان متساوية ؟

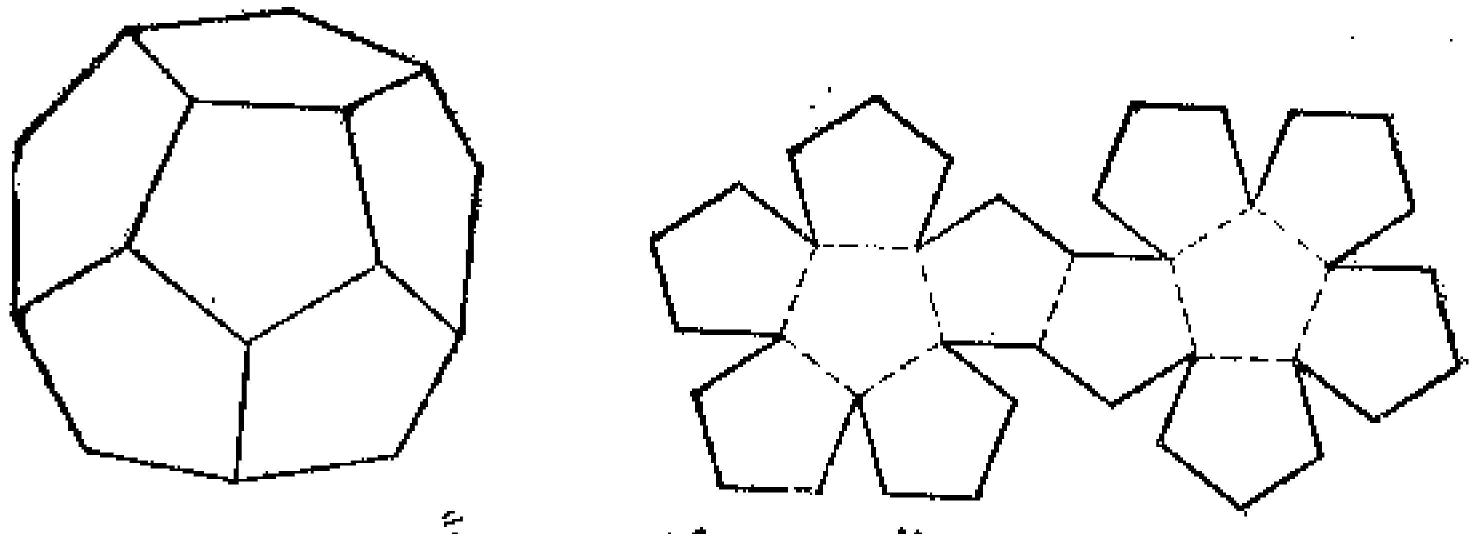
هل يمكن ملء أى شكل مستو معلوم بتكرارات من شكل آخر مثله ؟

هل يمكن ملء أى مجسم بتـكرارات من مجسم معلوم ؟

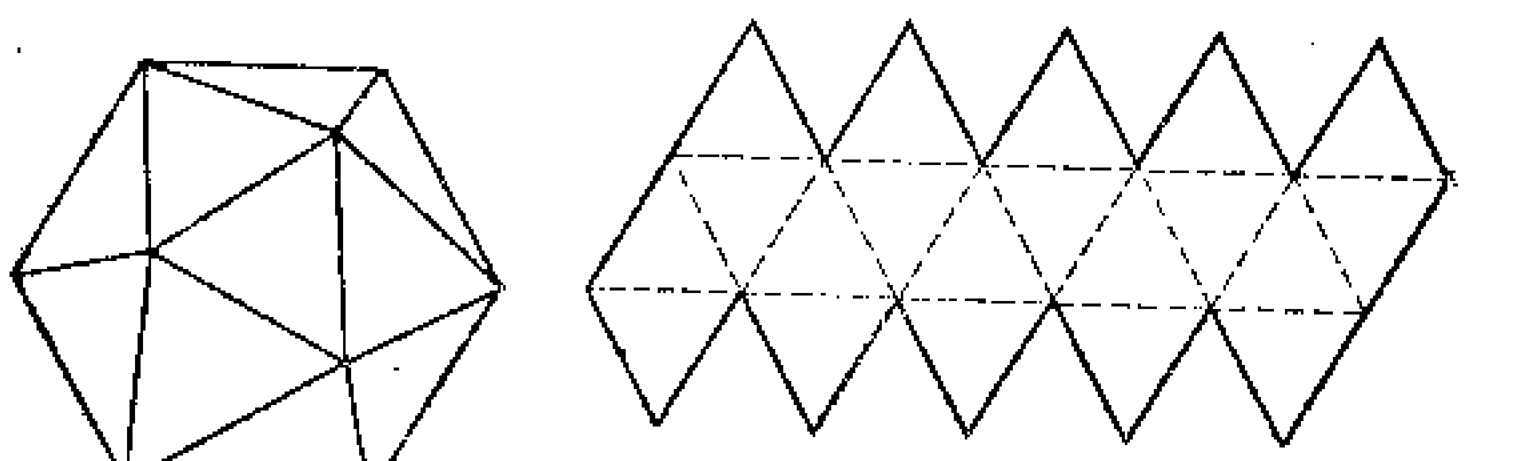
إن الإجابة عن هذه الأسئلة ليست بالبساطة التى تبدو لمن لم يحاول الإجابة عنها ، فلنحاول مثلا أن نجد مقياسا مشتركا لضلع المربع وقطره .

خلال البحث عن إجابات لهذه الأسئلة اكتشف الفيثاغورثيون المجسم المنتظم ذا الاثنى عشر وجهاً والتى كل منها مخمس منتظم ، والمجسم المنتظم ذا العشرين وجها والتى كل منها مثلث متساوى الأضلاع .

إذا رسم القارىء الجزء الأيمن من كل شكل فيما بعد (من الأفضل أن يكون مقياس الرسم كبيراً) على ورق مقوى ثم قصه وطواه عنـد الخطوط المنقطة فإنه يحصل على المجسم الموضح فى الجزء الأيسر من الشكل .



المجسم المنتظم ذو الاثنى عشر وجهاً



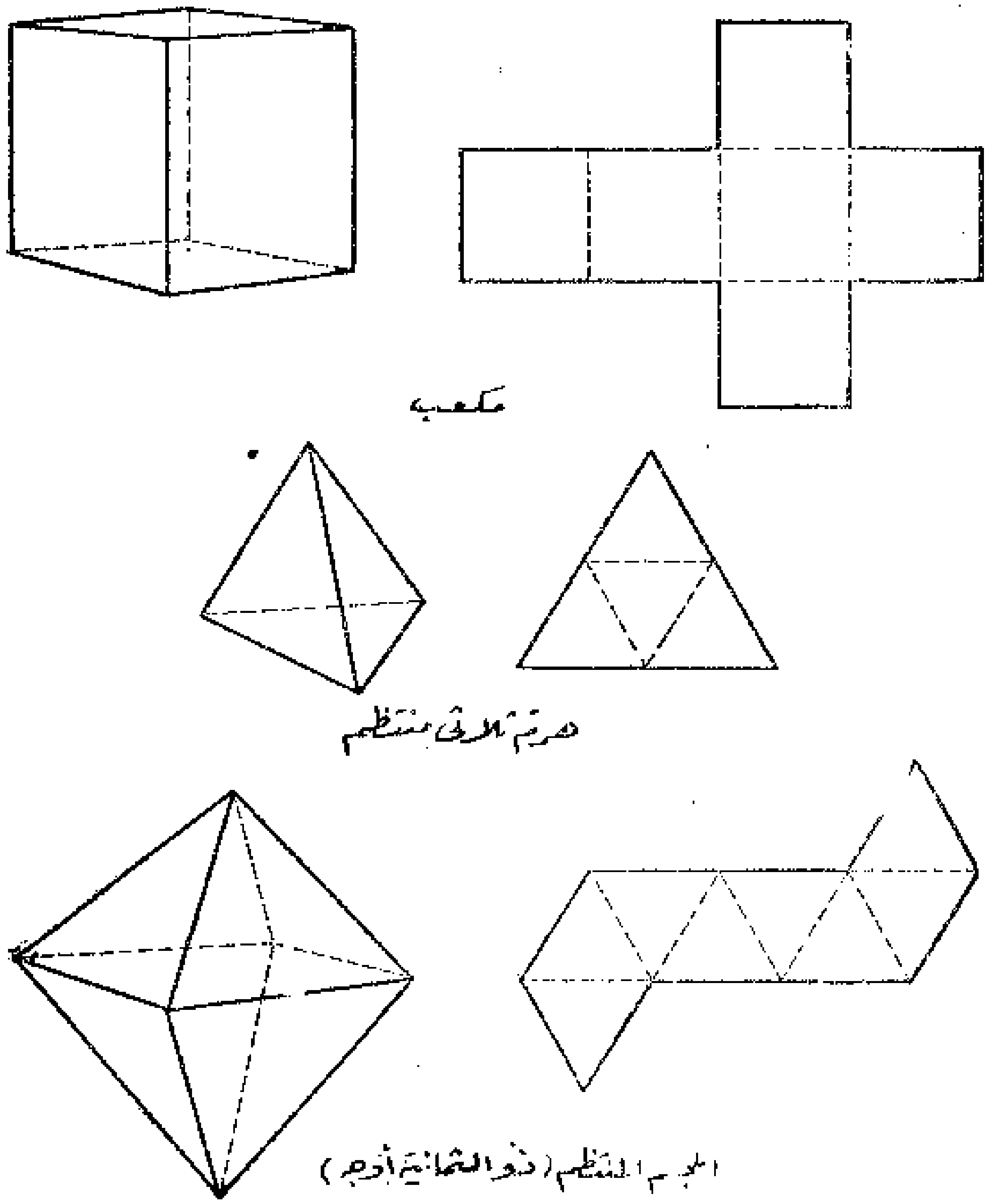
المجسم المنتظم ذو العشرين وجهاً

شكل (٢٠)

هناك خمس فقط من هذه المجسمات المنتظمة ، اكتشف المصريون الثلاثة الباقية منها وهى المـكعب ، والهرم الرباعى وهو مجسم محدود بأربعة مثلثات متساوية الأضلاع ، والمجسم ذو ثمانية أوجه كل منها مثلث متساوى الأضلاع .

بعد ذلك تنتقل قصة الهندسة إلى عام ٤٠٠ قبل الميلاد . فعلى بعد حوالى ميل من أثينا كانت هناك حديقة جميلة يحيط بها سور ، وتخترقها الممرات ، وتنتشر فيها النافورات ، ومن المعتقد أنها كانت ملـكا لرجل اسمه أكاديموس وكانت الحديقة تسمى أكاديميا نسبة إلى صاحبها. فى هذا المـكان والمدة تقرب من خمسين عاما قام فيلسوف عظيم بتعليم فلسفته للناس ، ذلك هو أفلاطون الذى كان يملك ضيعة صغيرة قريبة من هذا المـكان ، ولقد عرفت مدرسته الفلسفية بالأكاديمية نسبة إلى الحديقة التى علم فيها سنوات كثيرة ، ولهذا السبب يطلق على مكان التعلم أحياناً « الأكاديمية » .

وفى عام ٤٠٠ قبل الميلاد كان أهل أثينا أو من كان منهم مهتما بالأمور الجبرية ، فى نفس الموقف الذى يقف فيه رجال الفكر الآن ، فقد كانت أثينا



شكل (٢١)

البلد الديمقراطى مشتبكة فى صراع حياة أو موت مع أسبرطة ، وكانت هذه دويلة عبيد تحكمها قلة من الحكام المطلقين الأقوياء ، وكان الألم يعتصر رجال الفكر فى أثينا نظراً للحياة التى يحياها مواطنوهم الذين عكفوا على مصالحهم الشخصية ، ورفضوا أن يناقشوا أمور السلم والحرب والحكومة الصالحة .

فى مثل هذه الظروف بدأ أفلاطون يعلم فلسفته ، ولقد كان يريد — تماما كما يريد رجال الفكر الآن — أن يجد أفضل الطرق التى يحكم بها البشر . وليس من المناسب فى مثل هذا الكتاب أن نناقش أفكار وتعاليم أفلاطون إلا أنه من الواجب أن نذكر أنه كان يصر على أن يتدرب على الرياضيات كل من يريد أن يكون فى عداد القادة ، ويعنى بالرياضيات الهندسة ، ولم يكن يفكر فى أن هؤلاء يستطيعون الاستفادة العملية من معارفهم الرياضية ، بل كان يرى أنه ينبغى أن يحصلوا على أحسن تدريب للعقل . ولقد اتبع هذه النصيحة،شعورياً أو لاشعورياً ، رجل من أعظم قادة هذا العصر ، ذلك هو إبراهام لنكولن ، فعندما كان فى الأربعين من سنه درس وأتقن ستة كتب من كتب أقليدس بقصد تدريب عقله ليس إلا .

إن آراء أفلاطون فى الطريقة التى ينبغى أن تدرس بها الرياضيات لتبدو حديثة جداً ، فهو يرى أن يصطحب التعليم بالمتعة والسرور حتى تكون المادة مشوقة ، كما ينبغى أن تكون هناك لعب مختلفة كتلك التى تلعب بقطع مختلفة من النقود ، كذلك يجب أن تعالج المسائل بمباريات الملاكمة والمصارعة إذ أن هذه الأشياء — كما يقول أفلاطون — تجعل التلميذ نافعاً لنفسه ، ويقظاً للدراسة .

لقد كان أفلاطون صارماً فى القواعد التى وضعها لأتباعه ، فكان محفوراً على مدخل مدرسته : « لا يدخل أبوابى من لا يعرف الهندسة » ، وكان يصر إصراراً أكثر من إصرار الفيثاغورثيين على أن تبرهن النظريات بالمنطق الشكلى وكى يتجنب العمليات الهندسية التى تنطوى على مشكلة « مالانهاية » اشترط القاعدة القاطعة المانعة (ولعل هذه القاعدة قد وضعت قبل أيامه) ألا تستخدم

فى العمليات إلا المسطرة والفرجار فقط ، وقد ترتب على ذلك أن أتعب الناس رؤوسهم — دون جدوى — مئات من السنين محاولين تثليث الزاوية ، أى تقسيم أى زاوية (وليست الزاوية القائمة التى يمكن تثليثها بسهولة) إلى ثلاثة أقسام متساوية ، مستخدمين فى ذلك المسطرة والفرجار ، كما حاولوا عبثا رسم مربع يكافىء دائرة معلومة ، ورسم مستقيم يساوى ضلع مكعب حجمه ضعف حجم مكعب معلوم ، ولم يكونوا يعلمون أن أياً من هذه العمليات الثلاث لا يمكن إجراؤها باستخدام المسطرة والفرجار فقط ، وعلى كل حال لم يكن البحث الطويل الفاشل عن حلول لها ضياعا للوقت ، إذ أن ذلك قد أدى إلى نشأة عمليات ومفاهيم رياضية فى غاية الأهمية .

ولقد كان الكتاب الذى استخدمه ابراهام لنكولن فى تدريب عقله مكتوبا حوالى ٣٠٠ سنة قبل المسيح،ففى عام ٣٠٠ قبل الميلاد نلتقى برجل اشتهر شهرة لم يشتهرها رياضى آخر ، ولم يكن أعظم رياضى،لكنه كتب أكثر كتب الرياضيات انتشارا ، هذا الكتاب هو كتاب الهندسة الذى استخدم فى أوروبا مدة تزيد عن ألفى عام ، وأخيرا فى أمريكا ، وحتى خمسين عاما فقط كان العنوان الوحيد لكتب الهندسة فى المدارس هو إقليدس .

ولسنا ندرى متى أو أين ولد إقليدس ، ودرايتنا عن حياته لا تكاد تتعدى أنه علم الهندسة فى الإسكندرية فى المدرسة الملكية التى أنشأها بطليموس، الابن غير الشرعى الذى خلف إسكندر الأكبر منشىء الإسكندرية ، ولكننا ندرى أنه بصبر العالم وجهده جمع جميع الحقائق الهندسية المعروفة فى أيامه ، ورتب النظريات المختلفة ترتيبا مناسبا ونقح براهينها عند اللزوم وأضاف إليها نظريات من وضعه .

ولقد كان عقله جباراً فاستطاع جمع أجزاء متضاربة مهوشة من المعارف الرياضية ووضعها معا فى صورة متكاملة ، ولهذا السبب أصبح كتابه أشهر كتاب ظهر .

ولقد كانت هذه التحفة مكونة من ثلاثة عشر كتابا ، كتب كل منها على لفائف منفصلة من الجلد ، وسميت فى مجموعها « الأصول » . ولقد ظلت الكتب الستة الأولى عشرين قرنا مدخل الطلبة إلى الهندسة .

ولقد كانت جميع البراهين التى ضمنها إقليدس كتابه مبنية بالطبع على مبادىء أساسية متفق عليها ، وكانت استنتاجاته صحيحة ماظلت المبادىء متفقاً عليها ، أما إذا كانت بعض المبادىء التى استخدمها فى مناقشاته غير متفق عليها اضطربت بالتالى بعض الاستنتاجات . واليوم تقوم بعض الفروع الراقية فى الرياضيات على هندسة تختلف فى مبادئها الأساسية عن المبادىء التى إختارها إقليدس ، مثل هندسة لوباكيفسكى Lobachevsky وريمان Riemann اللذين عاشا فى النصف الأول من القرن التاسع عشر ، والبناء الهندسى الذى أقامه كل من إقليدس ولوباكيفسكى وريمان منطقى ويلائم مجال الدراسة الخاص به . أما فيما يختص بالحسابات الفلكية فإن هندسة إقليدس لانظير لها .

ومن المشوق أن نتتبع الطريق الذى وصل به كتاب « الأصول » إلى أوروبا فى العصور الوسطى ، فمن الغريب أنه لم يصل مباشرة عن طريق أى مخطوط يونانى ، بل عن طريق اللغة العربية .

فيما بين ٧٥٠ ، ٨٠٠ ميلادية حصل أحد الخلفاء العرب على نسخة من « الأصول » لإقليدس فى لغته الأصلية — اليونانية — جاءته من القسطنطينية

التى لم تكن بعد قد سقطت فى أيدى الهمج عند انحلال الإمبراطورية الرومانية، وترجمت هذه النسخة إلى العربية مرات كثيرة، إحداها فى عهد هارون الرشيد، الذى كتبت فى عهده قصة ألف ليلة وليلة .

فى عام ١١٢٠ ترجم اثلهارد Athelhard الانجليزى النسخة العربية إلى اللاتينية، وتبع هذه ترجمات لاتينية كثيرة قدر لإحداها أن تكون أول كتاب هام يطبع فى الرياضيات ، ولقد نشر فى البندقية عام ١٤٨٢ بأشكال جميلة على هوامشه العريضة .

ولم يترجم كتاب إقليدس إلى الإنجليزية إلا فى عام ١٥٧٠ ، وكان شكسبير حينذاك فى السادســـــة من عمره ، وكان عدد صفحات الكتاب بشروحه ٩٢٨ صفحة .

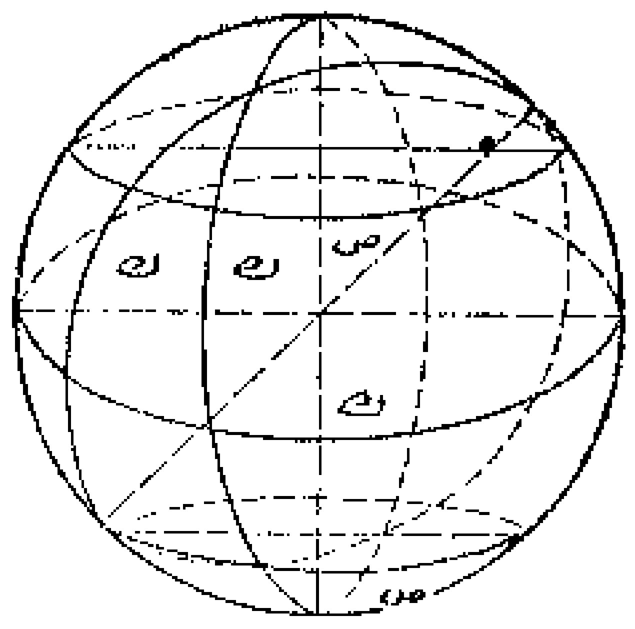
وبعد نشر أول ترجمة إنجليزية وحتى عام ١٩٠٠ ظهرت الطبعة تلو الطبعة من كتاب إقليدس ، بيع منها عـــــدد من النسخ لم يفقه فيها سوى الكتاب المقدس .

ولقد جرتنا قصة « الأصول » إلى العصر الحديث ، لذلك ينبغى أن نعود إلى أيام الإغريق مرة أخرى لنلتقط خيط قصتنا عن بداية الهندسة .

فيما قبل مولد المسيح تعمق الرياضيون الإغريق فى هندسة الكرة، وعرفوا كيف يعالجون الدوائر والمثلثات المرسومة على كرة .

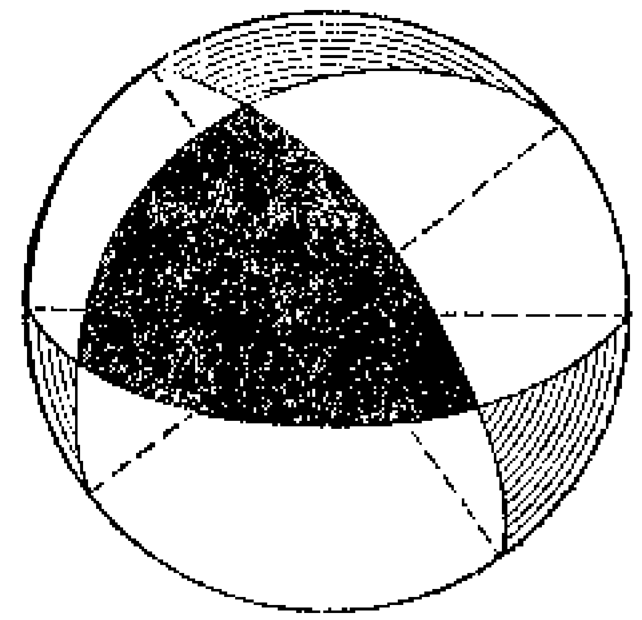
بمجرد التحقق من كروية الأرض ، أصبح من الطبيعى أن تشغل دراسة الكرة مكانا ممتازا فى رياضيات الإغريق ، ولقد نشأت هذه الدراسة عند أذكياء

الإغريق فيما يتصل بشكل وأبعاد الأرض التى يعيشون عليها ، وفى فصل آخر من هذا الكتاب سنعالج بتوسع فروع الرياضيات المعروف بحساب المثلثات الذى



الدوائر المرتبطة بالكرة
(ك) دوائر كبرى
(ص) دوائر صغرى

شكل (٢٢)



المثلثات الكروية تحدها أقواس دوائر كبرى .

شكل (٢٣)

نشأ من دراسة الكرة والدائرة ، أما هنا فسنقتصر على المعارف الهندســـــية البحتة للكرة التى وصل إليها الإغريق ، وكما قيل من قبل ، لعل فيثاغورث هو أول من تحقق أن الأرض كروية. ومن المؤكد أنه فيما قبل أرسطو ، حوالى ٣٤٠ قبل الميلاد ، تمت محاولات لحساب محيط الأرض ، ولقد أجرى إحدى هذه المحاولات رياضى اسمه أيدوكوس Eudoxus .

وحوالى عام ٢٥٠ قبل الميلاد استطاع الرياضى المشهور أرشميدس أن يسجل فى كتاب « المزولة الرملية » أن كتابا معينين « قد ذكروا أن محيط الأرض ٣٠٠٠٠٠ فرسخ » ، ولسوء الحظ كان هناك أكثر من فرسخ لقياس المسافة أحدها حوالى $\frac{1}{10}$ ميل ، فإذا كان هذا قصد أرشميدس كان محيط الأرض ٣٠٠٠٠ ميل ، وإذا أخذنا النتيجة التى وصل إليها ج . ف . هايفورد J. F. Hayford عام ١٩١٠ بأرصاد أجريت فى الولايات المتحدة

الأمريكية (٣٨٨ ر ٦٣٧٨ كيلو مترا عند خط الاستواء) وقمنا ببعض عمليات الضرب والقسمة لوجدنا أن محيط الأرض عند خط الاستواء هو ٢٤٩٠٧ من الأميال . والآن دعنا نر كيف استطاع رياضى إغريقى ، منذ قرنين ونصف قرن قبل مولد المسيح ، أن يحسب محيط الأرض فيجده ٠٠٠ر٢٥٠ فرسخ أى ٢٥٠٠٠ ميل (باعتبار الفرسخ ١/١٠ ميل كما ذكرنا) أى بخطأ قدره ٩٠ ميلا .

فى القرن الثالث قبل الميلاد كان فى الاسكندرية أحسن مكتبات العالم ، أنشأها الملك بطليموس الذى أنشأ مدرسة الرياضيات التى كان إقليدس معلماً بها ونحو النصف الثانى من هذا القرن كان إراتوثنيس Eratosthenes صديق أرشميدس أمينا لها ، وكان هـــذا بدوره رياضيا ، بالرغم من أن غيره من الرياضيين لم يكونوا يعتبرونه من رياضيى الدرجة الأولى، بل اعتبره بيتا β (مما يكشف أن ترتيبنا لطائفة الكليات فى رتب ا ، ب ، جـ . ليس شيئا جديدا) ويستطيع القارىء فى ضوء هذا التصنيف أن يكتشف لنفسه المستوى المرتفع الذى وصل إليه الرياضيون الإغريق منذ ألفى عام .

وبالرغم من أن إراتوثنيس كان من الدرجة الثانية ، استطاع أن يصل إلى نتيجة قريبة جدا لمحيط الأرض ، فاذا كان الفرسخ عنده ١/١٠ ميل تقريبا كان الخطأ عنده ٤ر٠٪ ، وحتى إذا لم تصل نتيجته إلى هذا المدى من الدقة فإن الطريقة التى استخدمها كانت علمية ومبتكرة ، بحيث تضع مكتشفها فى رتبة أعلى من β .

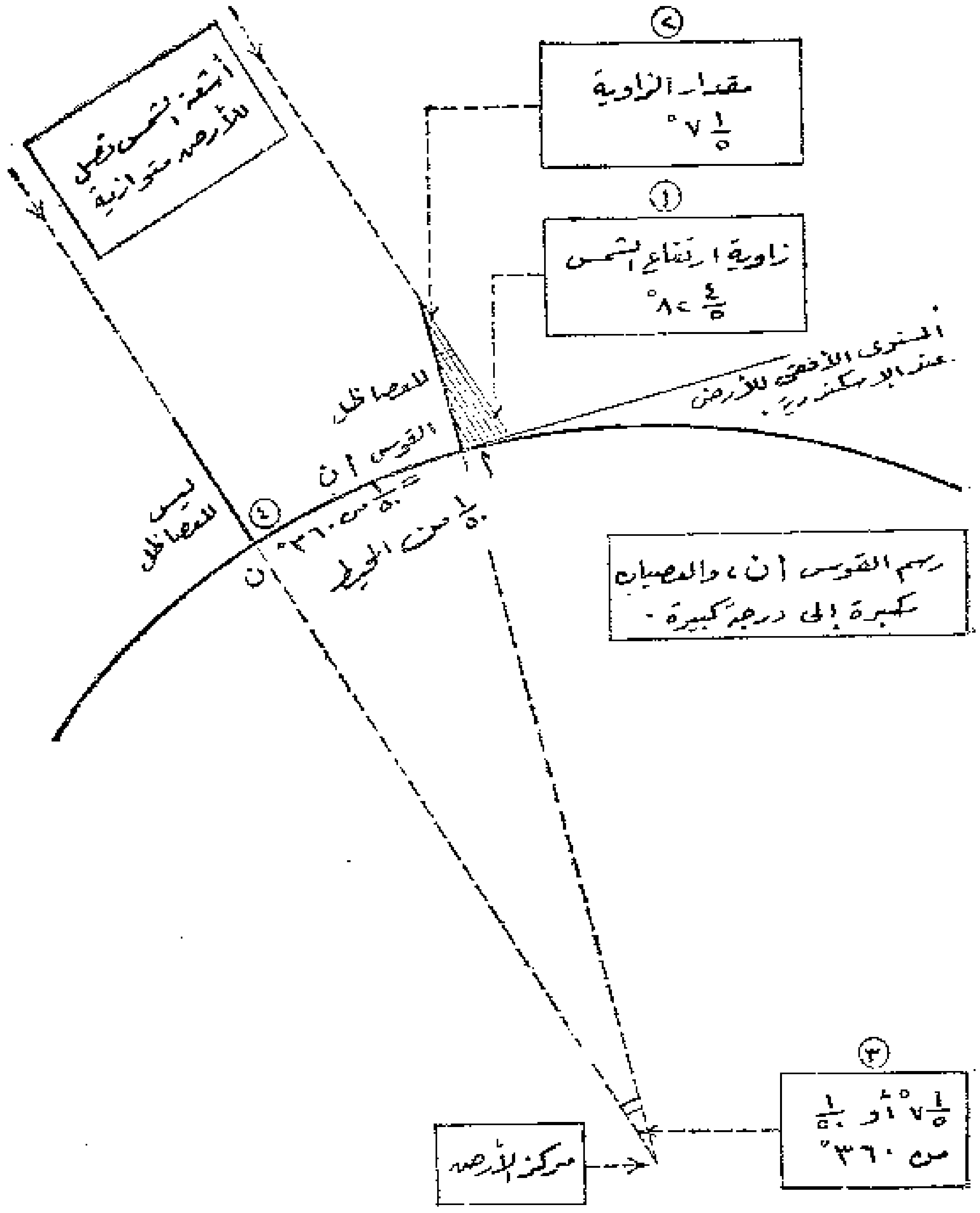
هناك وقتان خلال العام تكون الشمس فيهما أبعد ما تكون عن خط الاستواء ، تعاود بعدهما الاقتراب منه ، أحد هذين الوقتين فى المدار الشتوى (حوالى ٢٢ من ديسمبر) والآخر فى المدار الصيفى (حوالى ٢١ من يونية) . ولقد كان معروفا قبل الإغريق بزمن بعيد أنه إذا ثبت عمود رأسيا على سطح

الأرض فإن ظله عند الظهر (يشير دائما نحو الشمال والجنوب) يكون أطول ما يكون عند المدار الشتوى وأقصرما يكون عند المدار الصيفى .

ولقد وجد إراتوثنيس بطريقة ما ، لعله وجدها فى مكتبته فى وثيقة مصرية قديمة ، أن عصا رأسية إذا وضعت عند أسوان لا يكون لها أى ظل ، وقد تحقق ذلك بملاحظة أن الماء فى بئر عميقة يعكس أشعة الشمس تماما ، وأن جانب البئر لا يكون له ظل على سطح الماء ، وفى نفس اللحظة يكون لعصا رأسية فى الاسكندرية ظل على السطح الأفقى للأرض .

وكان إراتوثنيس يعلم أن أسوان تقع جنوب الاسكندرية ، وأنه عند الظهر يتجه الظل فى الاسكندرية نحو الشمال والجنوب ، فاستنتج من ذلك أن عصا أسوان وعصا الإسكندرية ومركز الأرض ومركز الشمس عندما تكون فوق أسوان مباشرة ، تقع جميعها فى مستوى واحد ، وبذلك استطاع أن يحصل على الصورة المبينة فى شكل ٢٤ .

والآن دعنا نفحص هذا الشكل . الواقع أنه شكل بسيط فقــــد كان إراتوثنيس يعلم أن الأرض كروية ، وبالتالى فإن امتدادى العصوين يتلاقيان فى مركز الأرض ، كما كان يعلم أن أشعة الشمس يمكن اعتبارها متوازية عند سطح الأرض؛ وبذلك لم يعد الأمر يحتاج إلا إلى معرفة بسيطة بهندسة إقليدس للوصول إلى أن الزاوية عند مركز الأرض تساوى الزاوية بين قمة عصا الإسكندرية وأشعة الشمس ، ونظراً لأن القوس الدائر تقاس بالزاوية التى تقبلها عند مركز الدائرة ، ونظراً لأن جميع نقط الشكل فى مستوى واحد ، فإن القوس ب ا تساوى ١/٥٠ من المحيط كله ، وكان إراتوثنيس يعرف سلفاً أن المسافة بين أسوان



شكل (٢٤)

والإسكندرية ٥٠٠٠ فرسخ – فقد حسب مسّاحو الإسكندر الأكبر والملك بطليموس الأبعاد المهمة فى مصر خلال غزوهم لها – وعلى ذلك استنتج إراتوثنيس أن محيط الأرض ٥٠ × ٥٠٠٠ = ٢٥٠٠٠٠ فرسخ ، فإذا كان الفرسخ هو ما أشرنا إليه فيما سبق ، فإن المحيط يكون حوالى ٢٥٠٠٠ ميل .

كل هذا والرجل الذى توصل إليه يعتبر فى المرتبة الثانية بين رياضيي العصر الذهبي للرياضيات عند الإغريق .

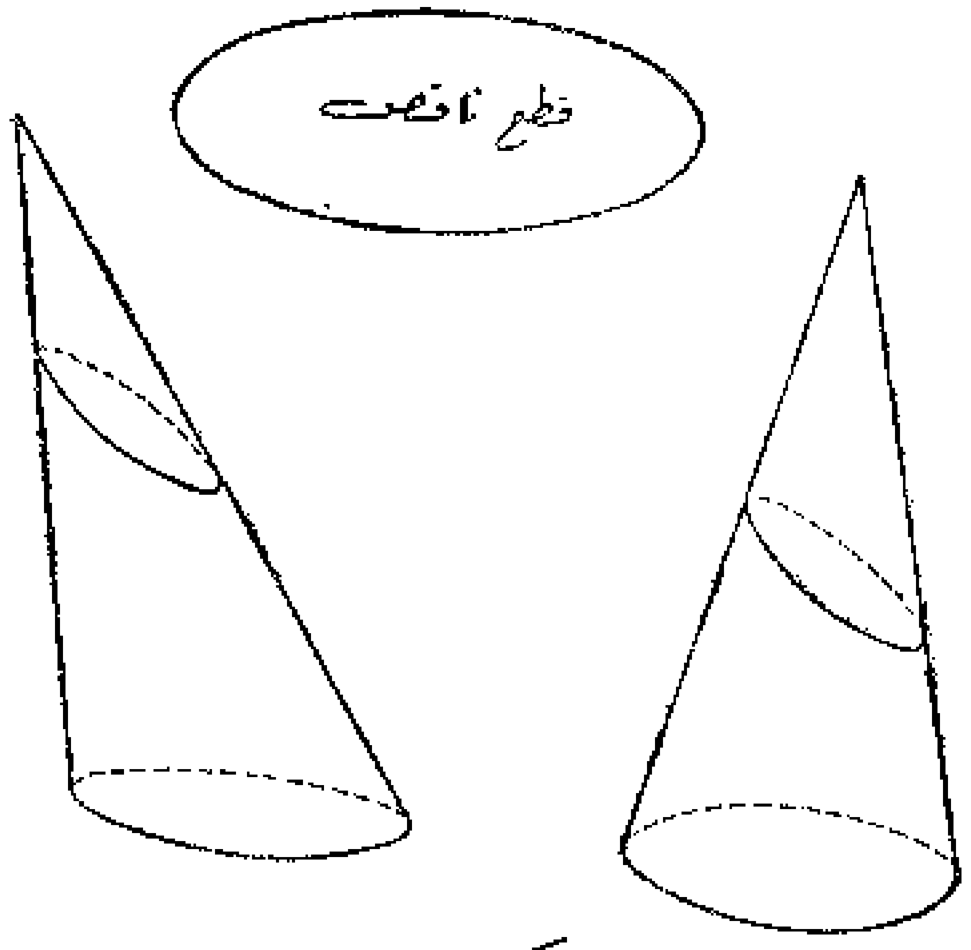
سنذكر فى هذا الفصل رياضيين عظيمين آخرين من رياضيي الإغريق فى

هذا العصر الذهبى ، ثم يجىء ذكر آخرين منهم فى فصول تالية ، ومع كل لن نكون قد ذكرنا إلا عدداً قليلا من الرجال الذين وضعوا الأساس الذى تقوم عليه رياضياتنا الحديثة . نلق بادىء الأمر نظرة على أصغر اثنين من أشهر من عرف من الرياضيين وأقلهما شهرة ، ذلك هو أبولونيوس . لقد ولد بعد حوالى خمسين عاما من تأليف إقليدس لكتاب « الأصول » ولسنا نعرف عن حياته الخاصة سوى أنه درس فى الإسكندرية فى المدرسة التى كان إقليدس فيها معلما وأصبح واحداً من الأنوار المتلألئة فى هذه المدرسة .

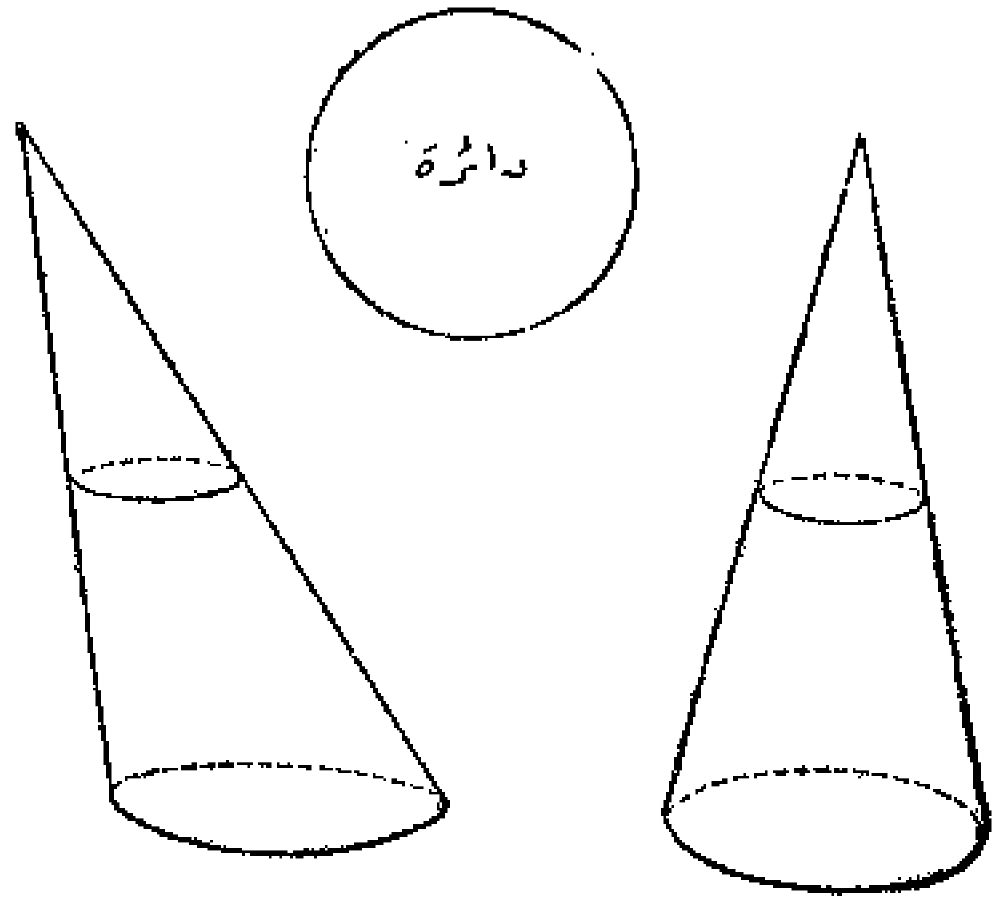
نستطيع أن نتصور أبولونيوس ، متخذاً من إقليدس مثلا ، عازما على جمع وترتيب كل ما كان معروفاً عن فرع من فروع الرياضيات أعجبه إعجاباً خاصا ، ذلك هو « القطوع المخروطية » ، وفى تحقيق هذا الهدف أسهم أبولونيوس فى هذا الفرع أكثر مما أسهم إقليدس فى مبادىء الهندسة ، إذ أنه وضع طريقة جديدة أفضل إلى حد كبير من الطريقة التى كان يتبعها الرياضى مينا كموس « Menaechmus » الذى عاش حوالى ٣٥٠ قبل الميلاد ، وبلغت طريقة أبولونيوس من الكفاية ماجعلها تسيطر على المجال ثمانية عشر قرنا ، حتى عام ١٦٣٧ عندما نشر الرياضى الفرنسى العظيم ديكارت كتابه الذى أحدث ثورة فى هذا الموضوع وفى جميع ما عرفه الإغريق من هندسة ، وسنرى فى فصل تال كيف سهل عمل ديكارت ما كان صعبا ، وكيف أنشأ مفهوما رياضيا يعتبر جذريا فى الرياضيات الحديثة ، ونظراً لأننا لا نستخدم طرق أبولونيوس الآن ، فإننا سنلقى نظرة خاطفة على معنى « قطع مخروطى » ، وهو ما نعالجه اليوم بالتطبيق الجبرى للهندسة التحليلية التى ابتدعها ديكارت .

ويجد القارىء إلى اليسار فى كل شكل من الأشكال الأربعة التالية مخروطا

مائلا ، وهو ما استعمله أبولونيوس ليجعل معالجته للموضوع عامة ، فى حين يجد إلى اليمين مخروطا قائما (أى مخروط يقع رأسه فوق مركز قاعدته تماما) وهو حالة خاصة إلا أنها تعطى القارىء العادى فكرة أوضح عن معنى القطع المخروطى. ليتخيل القارىء مثلثا قائم الزاوية من الورق المقوى وضع رأسيا بحيث يكون أحد ضلعى القائمة أفقيا ، ثم أدير حول الضلع الآخر . الجسم الناتج من الدوران

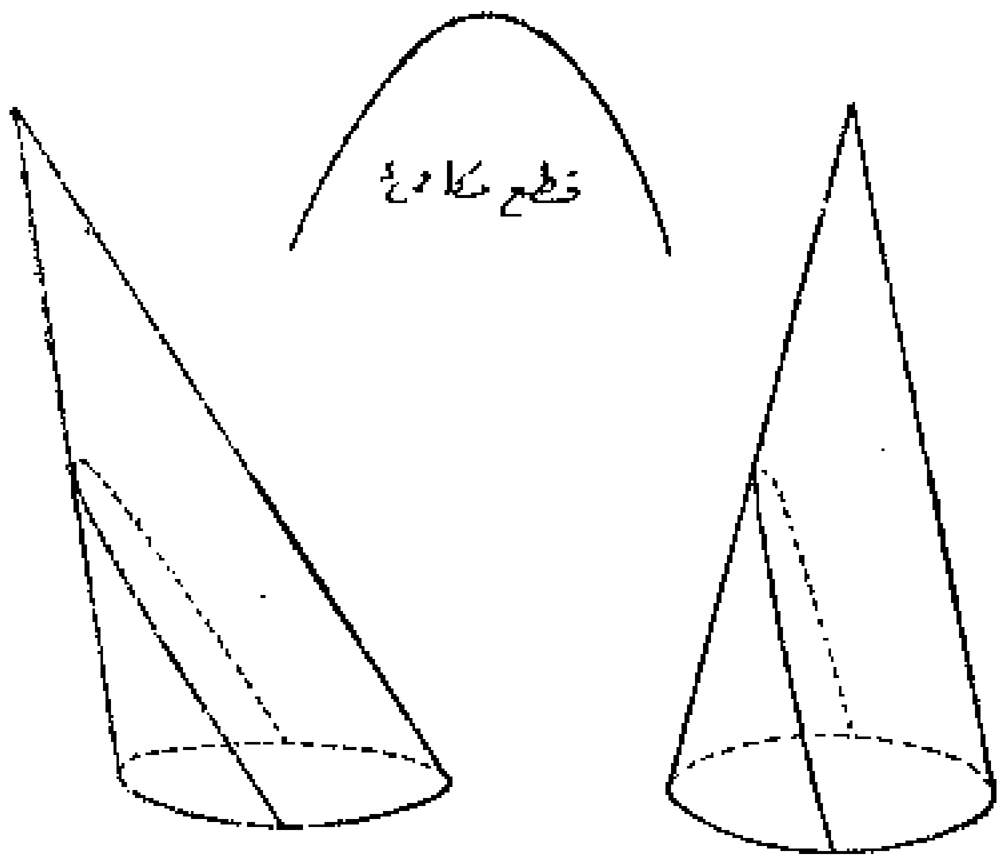


شكل (٢٥)



شكل (٢٦)

مخروط قائم كذلك الذى تراه إلى اليمين فى كل شكل من الأشكال الأربعة السابقة (شكل ٢٥، ٢٦) . والآن تصور هذا الجسم مصنوعا من خشب ، وتصور أنك نشرته بمنشار نشراً مستويا فى أى اتجاه ، يسمى المقطع الحادث قطعا مخروطيا .



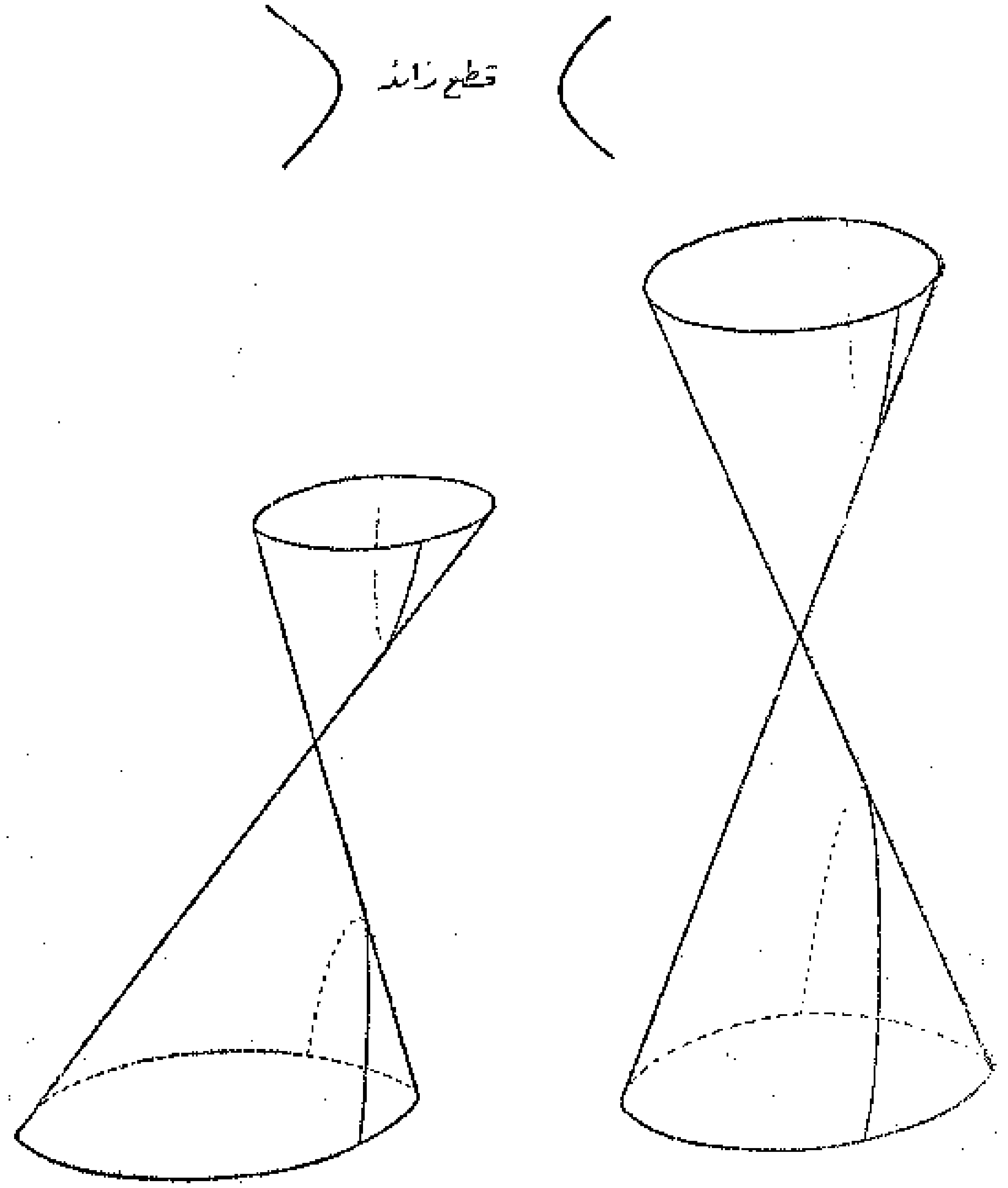
شكل (٢٧)

للحصول على قطع مكافىء ينبغى أن يكون النشر موازيا للحرف المائل فى المخروط .

وللحصول على القطع المخروطى الموضح فى شكل ٢٨ ، يجب أن يكون النشر مشابها له فى حالة القطع المكافىء ، لكنه لا يوازى حرف المخروط ، وإذا مد إلى أعلى فإنه يقطع ما يمكن أن نسميه انعكاس المخروط الأصلى . يعرف الشكلان الناتجان بأنهما فرعا قطع زائد .

ولقد رأينا فى صفحة ٥١ الأسباب التى من أجلها اختار أبولونيوس الأسماء : قطع مكافىء ، وناقص ، وزائد . ولقد أدى عمل أبولونيوس على القطاعات المخروطية به إلى أن يطلق عليه « عالم الهندسة العظيم » .

والآن ننتقل إلى أعظم رياضى فى العهد القديم ، بل إن ثمة من يرون أنه أعظم رياضى عرفته الحياة ، إذا أخذنا فى الاعتبار المعارف الرياضية التى كانت فى متناول يده عندما بدأ عمله وقارناها بما تراكم منها فكان بداية لدراسة الرياضيين فى الثلاثمائة سنوات الماضية .



(شكل ٢٨)

فى جزيرة صقلية ، ثانية جزر البحر المتوسط تقع مدينة سيراكيوز ، التى يرجع تاريخها إلى عام ٧٠٠ قبل الميلاد ، حيث استوطنها مواطنون يونانيون من كورنثوس .

ولد أرشميدس العظيم عام ٢٨٧ قبل الميلاد فى سيراكيوز ، ولقد قدر له أن يكون أشهر أبناء مدينته ، وأعظم علماء الرياضيات فى العالم . ولقد ولد أرشميدس من أسرة مشهورة ، فقد كان أبوه رياضيا وفلكيا ، قريبا لهيرو حاكم سيراكيوز . وفى شبابه ذهب إلى مصر للدراسة فى المدرسة الملكية للرياضيات فى الاسكندرية ، حيث كان إقليدس معلما سنوات كثيرة ، فلما عاد إلى مسقط رأسه ، استطاع بما له من الذكاء والنشاط والقدرة على التطبيق أن يرتفع بالرياضيات فى عصره إلى مستوى توقفت عنده بعد ذلك ثمانية عشرقرنا حينما استجدت أدوات رياضية جديدة ، هى الجبر والهندسة التحليلية .

وكعالم طبيعى استطاع أن ينمى فرع العلوم المتصل بضغط السوائل . واكتشف قوانين الروافع ، واخترع عدداً من المخترعات العلمية ، كآلة رفع الماء إلى مستوى أعلى (الطنبور) ويقال إن إحدى سفن هيرو الثانى حاكم سيراكيوز ، الملقب بالجبار ، امتلأت بالماء فلجأ إلى صديقه الحميم أرشميدس (يقال إنهما كانا قريبين) راجيا أن يجد له وسيلة لتفريغ الماء ، فاخترع أداة تتكون من أنبوبة طويلة مفتوحة فى نهايتيها ، وفى داخلها قطعة حلزونية من المعدن ، تشبه فتاحة سدادات الفلين ، فإذا غمر أحد طرفى الأنبوبة تحت سطح الماء وأدير الحلزون فإن الماء يرتفع داخل الأنبوبة ويخرج من الطرف الآخر .

كذلك استطاع أرشميدس أن يصل إلى طرق يحرك بها الأثقال الكبيرة مستخدما فى ذلك الروافع والبكرات ، ويقال إنه استطاع أن يحرك بها سفينة تقف فى حوض جاف ، كما يقال إنه أعلن لهيرو أن أى ثقل يمكن تحريكه بقوة مهما تكن صغيرة . وأضاف : أعطنى مكانا أقف عليه وأنا كفيل

بتحريك الأرض . ويقول بلوتارك : إن هيرو أصابته الدهشـــة وطلب من أرشميدس أن ينزل بالمسألة إلى مجال التطبيق فيقدم عرضا لثقل كبير تحركه قوة صغيرة ، فأجراه على سفينة من أسطول الملك تنوء تحت ثلاثة قلاع كبار ، وعلى سطحها ركاب كثيرون وحمولة كاملة . فجلس بعيداً ممسكا بنهاية مجموعة مركبة من البكرات ، وبجهد غير كبير ، أخذ يشد الحبل ، فانسحبت السفينة نحوه فى هدوء وأمان ، كما لو كانت تتحرك عبر البحر .

ولقد اخترع مقاليع ترمى إلى مدى طويل أو قصير ، وآلات تقذف الأحجار من فتحات فى أسوار سيراكيوز ، وأعمدة متحركة معلقة على الأسوار تنتهى بقطع مدببة من الحديد ، فإذا اقتربت إحدى سفن العدو رفعت الأعمدة فى الهواء ثم تركت لتسقط فتصطدم بالسفينة وتحطمها . وفى أواخر حياة أرشميدس عندما تعرض الرومان لهذه الأسلحة تملكهم الذعر لدرجة أنهم كانوا إذا رأوا قطعة حبل أو خشب تتأرجح على سور المدينة صاحوا ها هى ذى ، معلنين بذلك أن أرشميدس قد حرك ضدهم آلة من آلاته : وولوا الأدبار هاربين .

ولم يكن أرشميدس يلقى أهمية كبيرة على مثل هذه الآلات ، وليست هذه كما كان يقول سوى ألاعيب الهندسة ، ويضيف بلوتارك : ومع أن هذه الاختراعات هى التى جلبت لاسمه الشهرة إلا أنه لم يكترث بأن يترك وراءه شيئا مكتوبا عنها . ولو أن أرشميدس كان حيا اليوم لكان فى مقدمة العلماء أو الرياضيين الذين يبذلون الجهود للحيلولة دون استخدام ، أو بالأحرى سوء استخدام العلم فى تدمير الحضارة التى وصلنا إليها .

ويعلم كل تلميذ فى المدرسة الثانوية اليوم أن أرشميـــدس توصل إلى اكتشاف عظيم الأهمية ، فقد أرسل الملك هيرو ذهباً إلى أحد الصائغين ليصوغه له تاجا ، فلما انتهى الصائغ من صنع التاج شك الملك فى أن يكون الصائغ قد استبدل الفضة ببعض الذهب ، ونظراً لأنه لم يستطع إثبات ذلك ، فقد طلب إلى أرشميدس أن يجد له وسيلة تكشف عن أمانة أو خيانة الصائغ فى صنع التاج .

ويقول فيترفيوس Vitruvius ، المهنـــدس المعمارى الرومانى : إن أرشميدس اكتشف حلا لمشكلة الملك عندما كان يستحم ورأى ماء المغسل يفيض على جوانبه . إلا أن كل من جرب أثر الاسترخاء فى مغسل ملىء بالماء الدافىء على إثارة التأمل ، يجد للقصة صورة أخرى ، هى أن أرشميدس اكتشف فجأة أن النقص فى وزن جسم عائم على سطح الماء يساوى وزن الماء المزاح حين كان يجرى عرضا عمليا لهذا القانون .

وعلى كل فإنه مهما يكن السبب وراء الكشف الفجائى فإن نجاحه فى حل المشكلة ، فضلا عن وصوله إلى اكتشاف علمى هام ، قد أفقده الاتزان ، فخرج عاريا يجرى فى شوارع سيراكيوز صائحا : وجدتها . . . وجدتها . ولم يذكر التاريخ شيئا عن ثبوت أمانة الصائغ أو خيانته إلا أن ذكراه ظلت خالدة مرتبطة باكتشاف قاعدة أرشميدس .

ويبدو أن أرشميدس كان يقضى ساعات طويلة فى الحمام ، وكان من عادته أنه كان إذا انتهى من الاستحمام يدهن جسمه بالزيت ثم يرسم أشكالا هندسية عليه ، ويستخدمها فى حل مسائل رياضية ، ويستغرق فى استمتاعه بالعلم إلى

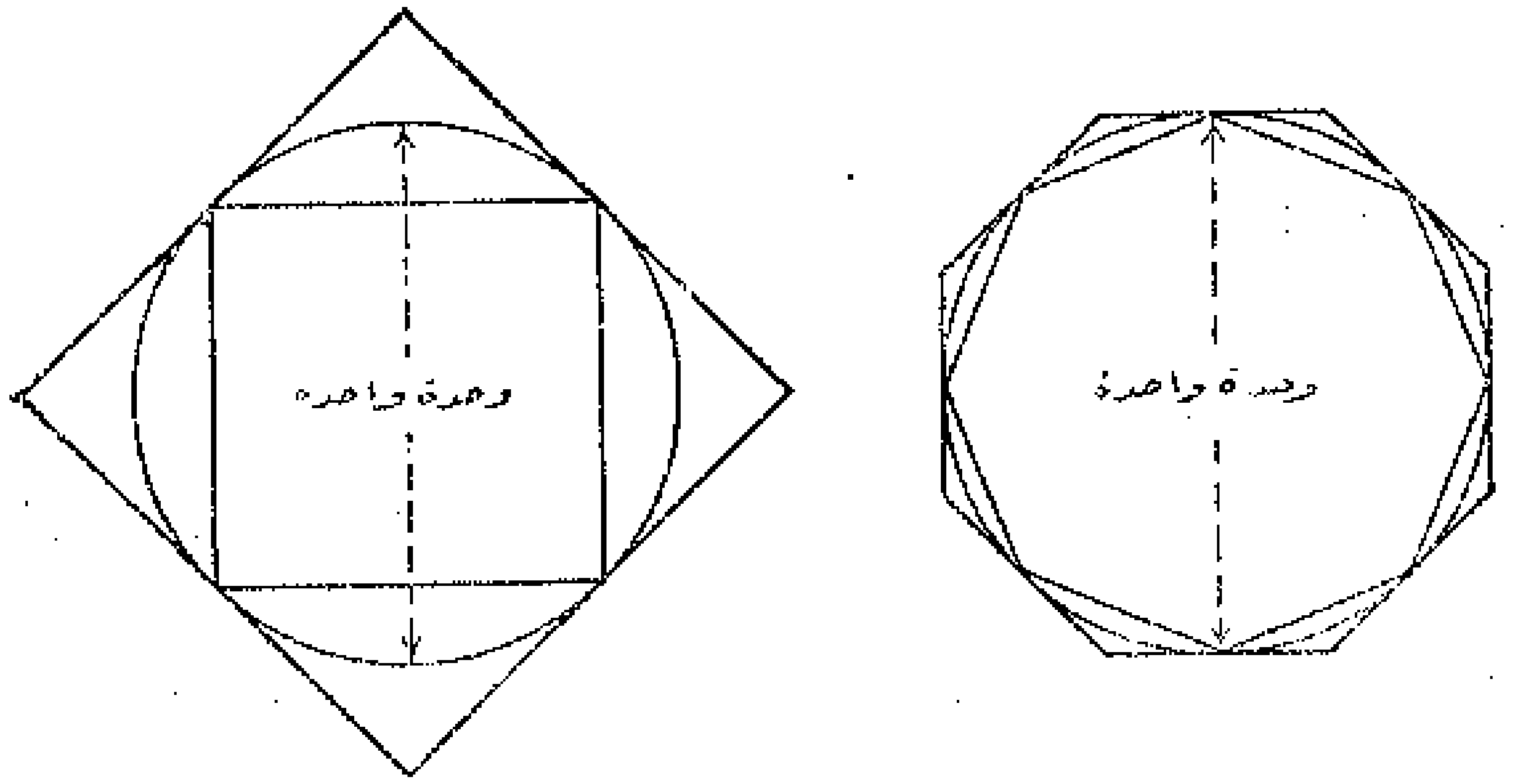
الحد الذي يجعله في نظر بعض الناس نموذجا للأستاذ الذي ينسى طعامه عندما ينهمك في التفكير في مسألة . ولقد رأينا فيما سبق أن الملبس لم يكن يعني شيئا عنده ، ولقد كان يجلس منهمكا بأشكال كان يرسمها على الرماد المتناثر على مدفأته ، في كل هذا لم يكن شخصا يمكن العيش معه ، ولكن لم يصل عقل أي إنسان إلى مثل ما وصل عقله إليه .

وبالرغم من أن أرشميدس يذكر اليوم مرتبطا بما اخترعه من آلات ميكانيكية ، وما وصل إليه في الميكانيكا وإستاتيكا السوائل ، إلا أن أعظم أعماله كانت في الرياضيات البحتة ، إذ أنه كرياضي لم يكن له نظير .

ولقد وضع طريقة لكتابة الأعداد الكبيرة ، وإن كان لم يفكر قط في طريقة أبسط من الطريقة التي استخدمت فيها الحروف الهجائية اليونانية رموزا للأعداد ، كما حسب قيمة النسبة التقريبية « ط » وهي النسبة بين محيط الدائرة وقطرها ، وإن كنا نعلم اليوم أنه لا يمكن إيجاد قيمة محددة لها ، بل يمكن إيجادها إلى أي درجة من درجات التقريب (أوجدها مرة أحد المتحمسين إلى ٧٠٧ أرقام عشرية) . فقد أثبت أرشميدس أن قيمة ط تقع بين $\frac{٢٢٣}{٧١}$ ، $\frac{٢٢٠}{٧٠}$ أو كما نقول الآن ، بين ٣،١٤٠٨٥ و٣،١٤٢٨٦ ويعتبر هذا نصرا عظيما إذا أخذنا في الاعتبار الأدوات الرياضية التي كانت في متناول يده حينذاك . كذلك استطاع بسلسلة طويلة من العمليات الهندسية والحسابية المعقدة أن يشرح طريقة لإيجاد الجذر التربيعي ، واستعمل في ذلك طريقة استعملها قبله بقرنين عالم رياضي اسمه « انتيفون » محاولا « تربيع الدائرة » برسم مربع داخل الدائرة ، ثم تضعيف عدد أضلاع المربع ، وتكرار ذلك حتى تفنى (تقريبا) المساحة المحصورة بين الدائرة

والمربع ، وقد حسن أرشميدس من هذه الطريقة بأن أوجد نهايتين لا بد أن يقع بينهما محيط الدائرة ، وعن طريق تقريب النهايتين إحداهما من الأخرى وجد أرشميدس أن محيط الدائرة أكبر قليلا من $\frac{٢٢٣}{٧١}$ من القطر وأقل قليلا عن $\frac{٢٢٠}{٧٠}$ منه ، ولقد أوجد محيط الدائرة لاستخدامه في تربيع الدائرة نظراً لأنه برهن قبل ذلك أن مساحة الدائرة تساوي مساحة المثلث القائم الزاوية الذي يكون ضلعا القائمة فيه يساويان محيط الدائرة ونصف قطرها .

ويوضح شكل ٢٩ الطريقة العامة التي وضعها أرشميدس .



شكل (٢٩)

ومن الواضح أنه في كل حالة يكون طول المحيط محصورا بين محيطي المضلعين المنتظمين الداخلي والخارجي . ويمكن بالحساب أو بالقياس الدقيق الوصول إلى أنه كلما زاد عدد أضلاع المضلعين اقترب طولا المحيطين أحدهما من الآخر ، أي إن محيط الدائرة يقع بين نهايتين يزداد اقتراب إحداهما من الأخرى .

وسنجد أنه إذا كان قطر الدائرة وحدة واحدة ، فإن محيط الدائرة يقع بين النهايتين كما هو مبين فى الجدول الآتى :

	محيط الضلع الداخلى	محيط الضلع الخارجى	الفرق
(٤ أضلاع)	٢٫٨ وحدة	٤٫٠ وحدة	١٫٢ وحدة
(٨ أضلاع)	٣٫٠ «	٣٫٣ «	٫٣ «
(١٢ ضلعا)	٣٫١ «	٣٫٢ «	٫١ «
(٢٤ ضلعا)	٣٫١٣ «	٣٫١٦ «	٫٠٣ «
(٣٦ ضلعا)	٣٫١٤ «	٣٫١٥ «	٫٠١ «

ولقد استخدم أرشميدس فى إيجاد قيمة ط مضلعا منتظما ذا ٩٦ ضلعا . ويستطيع القارىء أن يجد ترجمة للعمليات الحسابية التى أجراها أرشميدس فى هذا الموضوع فى الصفحات ٥٠ إلى ٥٥ فى الجزء الثانى من كتاب « تاريخ الرياضيات عند الإغريق » من تأليف سير توماس هيث .

كذلك توصل أرشميدس إلى طريقة إيجاد مساحة القطع الناقص ، ومساحة القطعة من القطع المكافىء التى يحصرها أى وتر فيه ، كما توصل إلى طريقة رسم مماس للحلزون عند أى نقطة عليه ، وبالتأكيد لو كان لديه الجبر لابتدع علم التفاضل إذ أن الطريقة التى وصل بها إلى مساحة قطعة القطع المكافىء هى التى استخدمت فى القرن السابع عشر عند نشأة علم التكامل ، كما سنرى فى فصل تال .

ومن بين الكتب الكثيرة التى كتبها أرشميدس كتاب يعالج الكرة

والأسطوانة والمخروط ، ويبدو أنه اعتبر هذا قمة انتصاراته ، فقد أبدى رغبته فى أن تتميز مقبرته بكرة أو أسطوانة .

وبعد حوالى مائة عام من مقتل أرشميدس زار القائد الرومانى سيزار جزيرة صقلية ووجد أن قبر أرشميدس فى بقعة قريبة من إحدى بوابات سيرا كيوز ، مهملا تغطيه الأشواك والحشائش ، فأمر بالاهتمام به ، إلا أننا اليوم لا نعلم أين هو ، فقد ضاع خلال المصائب التى حلت بصقلية فى العصور الوسطى .

ولا يستطيع أحد أن يعرف الأفكار الرياضية التى ماتت عندما قتل أرشميدس عام ٢١٢ قبل الميلاد بيد جندى رومانى . كان هيرو الملك العادل الرحيم قد مات عام ٢١٦ قبل الميلاد وخلفه حفيده هيرونيموس Hieronymus وهذا تحالف مع قرطاجنة التى كانت فى حرب ضروس مع روما ، ومات دون أن يرى مبلغ الضرر الذى تسبب فيه ، فلقد هاجمت روما سيرا كيوز بجيش وأسطول تحت قيادة القائد الرومانى مارسيلوس Marcellus ، فاستطاعت سيرا كيوز أن تردهم أول الأمر مستعينة بالآلات الحربية التى أعدها أرشميدس لاستقبالهم ، ولكن مارسيلوس فاجأ سيرا كيوز إذ كان أهلها يقيمون احتفالا لأرطاميس ألهة القمر والقنص وسقطت المدينة فى أيدى الرومان وتبع ذلك مذبحة هائلة .

ويروى المؤرخ البيزنطى تزتزيس Tzetzes أنه بالرغم من الموقعة الدائرة فى المدينة ، فقد كان أرشميدس جالسا يبحث حل مسألة رياضية على شكل رسمه فى التراب ، فرأى ظلا يقع على الرسم فصاح : « ابتعد عن الرسم » فكان الجواب ما نتوقعه من أحد أنصار « الحق للقوة » . وقد عبر ألفريد هوايتهيد Alfred Whitehead عن ذلك قائلا : « إن موت أرشميدس على يد جندى

رومانى هو رمز لتغير عالمى خطير . . . فلم يحدث فى التاريخ أن فقد رومانى حياته ، لأنه كان مستغرقا فى دراسة شكل رياضى » .

وهكذا مات أعظم رياضيى العصر القديم ، ولعله أعظم الرياضيين فى جميع العصور ، وبموته انتهى العصر الذهبى للرياضيات عند الإغريق نهاية فجائية ، وظل المشعل الذى أضاءه أرشميدس خامدا ثمانية عشر قرنا — أى حتى القرن السابع عشر الميلادى — حينما أضىء فى إنجلترا وألمانيا فى وقت واحد .

الفصل الثالث

نشأة الجبر

إن مسألة من أقدم المسائل هى « هاو ، كلها وسبعها يساوى تسعة عشر » . و « هاو » هذه كلمة استعملها قدماء المصريين للدلالة على أية كمية غير معلومة فى مسألة رياضية ، ونحن اليوم نستعمل س أو أى حرف هجائى آخر بدلا من « هاو » فإذا صغنا المسألة فى لغة العصر لجاءت هكذا « عدد إذا جمع كله على سبعه كان الناتج تسعة عشر » .

لقد وجدت هذه المسألة فى قرطاس أحمس الذى تحدثنا عنه فى صفحة ٢١ . ونظراً لأن هذا القرطاس منقول عن آخر كتب حوالى ٢٢٠٠ عام قبل الميلاد فإن عمر هذه المسألة أكثر من ٤٠٠٠ عام ، وإذا أراد القارىء أن يرى الخطوات المعقدة التى حلت بها هذه المسألة فإنه يجد ترجمة كاملة للنص المصرى فى قرطاس أحمس فى الجزء الثانى من كتاب تاريخ الرياضيات[1] تأليف الدكتور د . أ . سميث ، وهو مرجع لا تكاد تخلو منه مكتبة عامة .

ومن يعرف مبادىء الجبر يرى أن هذه المسألة تحل فى سهولة وسرعة بالمعادلة $س + \frac{س}{٧} = ١٩$. وبمجرد ترجمة المسألة إلى هذه الصورة الرمزية الجبرية المختصرة لا يعترض الحل أية صعوبة ، فنظراً لأن $س + \frac{س}{٧}$ تعادل ١٩ فإن ٧ أمثال الطرف الأيمن تعادل ٧ أمثال الطرف الأيسر ، أى إن ٧س + س

(1) Dr. D. E. Smith : History of Mathematics.

الفصل الثالث

نشأة الجـــبر

إن مسألة من أقدم المسائل هى « هاو ، كلها وسبعها يساوى تسعة عشر » ، و « هاو » هذه كلمة استعملها قدماء المصريين للدلالة على أية كمية غير معلومة فى مسألة رياضية ، ونحن اليوم نستعمل س أو أى حرف هجائى آخر بدلا من « هاو » فإذا صغنا المسألة فى لغة العصر الحاضر جاءت هكذا « عدد إذا جمع كله على سبعه كان الناتج تسعة عشر » .

لقد وجدت هذه المسألة فى قرطاس أحمس الذى تحدثنا عنه فى صفحة ٢١ . ونظراً لأن هذا القرطاس منقول عن آخر كتب حوالى ٢٢٠٠ عام قبل الميلاد فإن عمر هذه المسألة أكثر من ٤٠٠٠ عام ، وإذا أراد القارىء أن يرى الخطوات المعقدة التى حلت بها هذه المسألة فإنه يجد ترجمة كاملة للنص المصرى فى قرطاس أحمس فى الجزء الثانى من كتاب تاريخ الرياضيات[1] تأليف الدكتور د . أ . سميث ، وهو مرجع لا تكاد تخلو منه مكتبة عامة .

ومن يعرف مبادىء الجبر يرى أن هذه المسألة تحل فى سهولة وسرعة بالمعادلة $س + \frac{س}{٧} = ١٩$. وبمجرد ترجمة المسألة إلى هذه الصورة الرمزية الجبرية المختصرة لا يعترض الحل أية صعوبة ، فنظراً لأن $س + \frac{س}{٧}$ تعادل ١٩ فإن ٧ أمثال الطرف الأيمن تعادل ٧ أمثال الطرف الأيسر ، أى إن ٧س + س

(1) Dr. D. E. Smith : History of Mathematics.

(أى ٨ س) تعادل ١٣٣ ، وإذا كان الأمر كذلك فإن ثمن ٨س يعادل ثمن ١٣٣ ، ومن هذا س = ١٦ ⅝ .

ولا تأخذ هذه الطريقة الحديثة فى حل المعادلة سوى عشر الوقت الذى تأخذه فى قراءة الحل كما جاء فى قرطاس أحمس ، فكيف تم الوصول إلى هذه الأداة الرياضية التى توفر الوقت والجهد ، والتى نسميها الجبر الرمزى الحديث. إن هناك ثلاث مراحل واضحة فى قصة تطوره .

١ — كانت المسائل التى بدأ بها معروفة ومدروسة منذ عصر قدماء المصريين ، ولقد كونت هذه المسائل جزءا من علم مجرد هو « علم الأعداد » ، ولم يكن هذا العلم معروفا للجميع ، بل لقلة مختارة وجدت متعة فى التحدى الذى تعرضت له عقولهم ، وظل حل مثل هذه المسألة آلافا من السنين يكتب كقطعة من الجدل الفلسفى .

٢ — بدأت المرحلة الثانية عام ٢٧٥ ميلادية وامتدت حتى القرن السادس عشر ، وظلت الحلول خلال هذه المرحلة تكتب كقطعة من النثر ، إلا أنه قد أدخلت بعض الاختصارات[1] كما استخدمت علامة للطرح وعلامة أو علامتين أخريين .

٣ — المرحلة الثالثة هى المرحلة التى نعيشها الآن حيث لا نستعمل فى الحل كلمات أو اختصارات لها ، بل نترجم العبارات اللفظية إلى صور رياضية مختزلة مكونة من رموز وإشارات. فحالما يتم التمكن من هذه الرموز والإشارات

(١) مثل wrds بدلا من words و etc بدلا من etcetera

فإن عبارة مختزلة تحمل إلى الرياضى ما لا يمكن التعبير عنه لفظياً إلا بعبارة طويلة ومعقدة . وعن طريق التعبير الجبرى بالرموز توفر « نمط » أو « أداة » رياضية توجه العقل فى سرعة وعدم خطأ إلى هدف ، كما يوجه الحز السكين عند القطع ، ولقد بدأ هذا النوع من الجبر فى التطور منذ ثلاثمائة أو أربعمائة سنة فقط ، وفى مراحل تدريجية ، وإذا قورن الجبر فى صورته الحالية بآلاف السنين التى تمت خلالها الأفكار والعمليات الرياضية فى عقول الناس لوجدناه تطوراً حديثاً .

ومن الملاحظ أن الأولى من هذه المراحل الثلاث تشمل العصر الذهبى للرياضيات عند الإغريق ، فقد وصلوا إلى جزء كبير مما نسميه الآن مبادىء الجبر — وبعضها يتعدى المبادىء — وقد تقدم الجبر عن طريق الهندسة بما قدمه بعض الرياضيين اللامعين الذين عرضنا أعمالهم فى الفصل الثانى ، وقد تناول إقليدس فى « الأصول » موضوعى النسبة والتناسب هندسياً ، كما تم بحث كثير من الحقائق التى نعتبرها اليوم متطابقات ، والمتطابقة نوع خاص من المتساوية ، يتساوى الطرفان لأية قيم تأخذها الرموز ، فمثلا ا (ب + حـ) = ا ب + ا حـ ، (ا + ب)^{2} = ا^{2} + ٢ ا ب + ب^{2} ، ولقد برهنت هاتان المتطابقتان وغيرهما من المتطابقات عن طريق أشكال هندسية ، كذلك نجد فى « الأصول » حلا هندسيا لما نسميه الآن معادلة من الدرجة الثانية فى الصورة س^{2} + ا س = ا^{2} ، س^{2} = ا ب ، وليس الحل عدداً بل خط مستقيم ، وفى الجزأين السابع والثامن من الأصول عالج إقليدس ما نسميه الآن « نظرية العادلات » كما يعالج فى الجزء التاسع المتسلسلات والمتواليات معالجة هندسية ، كما يعالج فى الجزء العاشر الأعداد « هندسيا بالطبع » التى أعجزت

(أى ٨س) تعادل ١٣٣ ، وإذا كان الأمر كذلك فإن ثمن ٨س يعادل ثمن ١٣٣ ، ومن هذا س = ١٦ $\frac{٥}{٨}$.

ولا تأخذ هذه الطريقة الحديثة فى حل المعادلة سوى عشر الوقت الذى تأخذه فى قراءة الحل كما جاء فى قرطاس أحمس ، فكيف تم الوصول إلى هذه الأداة الرياضية التى توفر الوقت والجهد ، والتى نسميها الجبر الرمزى الحديث. إن هناك ثلاث مراحل واضحة فى قصة تطوره .

١ — كانت المسائل التى بدأ بها معروفة ومدروسة منذ عصر قدماء المصريين ، ولقد كونت هذه المسائل جزءا من علم مجرد هو « علم الأعداد » ، ولم يكن هذا العلم معروفا للجميع ، بل لقلة مختارة وجدت متعة فى التحدى الذى تعرضت له عقولهم ، وظل حل مثل هذه المسألة آلافا من السنين يكتب كقطعة من الجدل الفلسفى .

٢ — بدأت المرحلة الثانية عام ٢٧٥ ميلادية وامتدت حتى القرن السادس عشر ، وظلت الحلول خلال هذه المرحلة تكتب كقطعة من النثر ، إلا أنه قد أدخلت بعض الاختصارات(١) كما استخدمت علامة للطرح وعلامة أو علامتين أخريين .

٣ — المرحلة الثالثة هى المرحلة التى نعيشها الآن حيث لا نستعمل فى الحل كلمات أو اختصارات لها ، بل نترجم العبارات اللفظية إلى صور رياضية مختزلة مكونة من رموز وإشارات. فحالما يتم التمكن من هذه الرموز والإشارات

(١) مثل wrds بدلا من words و etc بدلا من etcetera

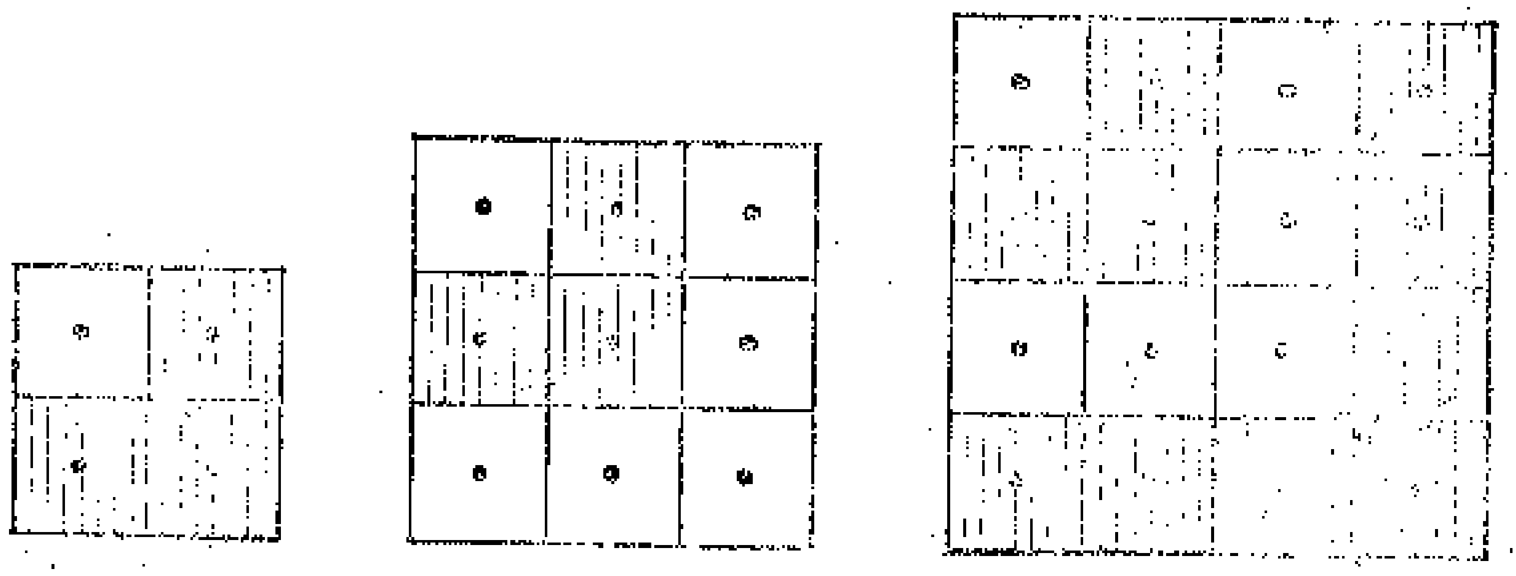
فإن عبارة مختزلة تحمل إلى الرياضى ما لا يمكن التعبير عنه لفظياً إلا بعبارة طويلة ومعقدة . وعن طريق التعبير الجبرى بالرموز توفر « نمط » أو « أداة » رياضية توجه العقل فى سرعة وعدم خطأ إلى هدف ، كما يوجه الحز السكين عند القطع ، ولقد بدأ هذا النوع من الجبر فى التطور منذ ثلاثمائة أو أربعمائة سنة فقط ، وفى مراحل تدريجية ، وإذا قورن الجبر فى صورته الحالية بآلاف السنين التى تمت خلالها الأفكار والعمليات الرياضية فى عقول الناس لوجدناه تطوراً حديثاً .

ومن الملاحظ أن الأولى من هذه المراحل الثلاث تشمل العصر الذهبى للرياضيات عند الإغريق ، فقد وصلوا إلى جزء كبير مما نسمية الآن مبادىء الجبر — وبعضها يتعدى المبادىء — وقد تقدم الجبر عن طريق الهندسة بما قدمه بعض الرياضيين اللامعين الذين عرضنا أعمالهم فى الفصل الثانى ، وقد تناول إقليدس فى « الأصول » موضوعى النسبة والتناسب هندسياً ، كما تم بحث كثير من الحقائق التى نعتبرها اليوم متطابقات ، والمتطابقة نوع خاص من المتساوية ، يتساوى الطرفان لأية قيم تأخذها الرموز ، فمثلا ا (ب + حـ) = ا ب + ا حـ ، (ا + ب)^{٢} = ا^{٢} + ٢ ا ب + ب^{٢} ، ولقد برهنت هاتان المتطابقتان وغيرهما من المتطابقات عن طريق أشكال هندسية ، كذلك نجد فى « الأصول » حلا هندسيا لما نسميه الآن معادلة من الدرجة الثانية فى الصورة س^{٢} + ا س = ا^{٢} ، س^{٢} = ا ب ، وليس الحل عدداً بل خط مستقيم ، وفى الجزأين السابع والثامن من الأصول عالج إقليدس ما نسميه الآن « نظرية المعادلات » كما يعالج فى الجزء التاسع المتسلسلات والمتواليات معالجة هندسية ، كما يعالج فى الجزء العاشر الأعداد « هندسيا بالطبع » التى أعجزت

الفيثاغورثيين ، تلك هي الأعداد غير الجذرية . ولقد عرضنا محتويات الأصول لنبين أن كثيراً من المفاهيم التي نعتبرها جبرية كان لها أساس في هندسة إقليدس، ذلك عدا الرصيد الضخم الذي أضافه العلماء الإغريق الذين جاءوا بعده.

وقبل عصر إقليدس بزمن طويل وضع الفيثاغورثيون أسس نظرية الأعداد وليس هذا الموضوع سهلا الآن ، لكنه من السهل والممتع أن نعرف بعض الأشياء التي اكتشفها الفيثاغورثيون عن الأعداد ، غير مفهومهم الغريب عنها باعتبارها مذكرة ومؤنثة ، ذات حظ حسن وذات حظ سيء ، مقدسة وغير مقدسة وما إلى ذلك .

ولقد سموا الأعداد ٤ ، ٩ ، ١٦ ، . . الخ « أعداداً مربعة » ويمثل شكل ٣٠ ما كان يعتمل في عقولهم في تصنيف الأعداد بهذه الصورة (أهمل الأجزاء المظللة الآن) .



(شكل ٣٠)

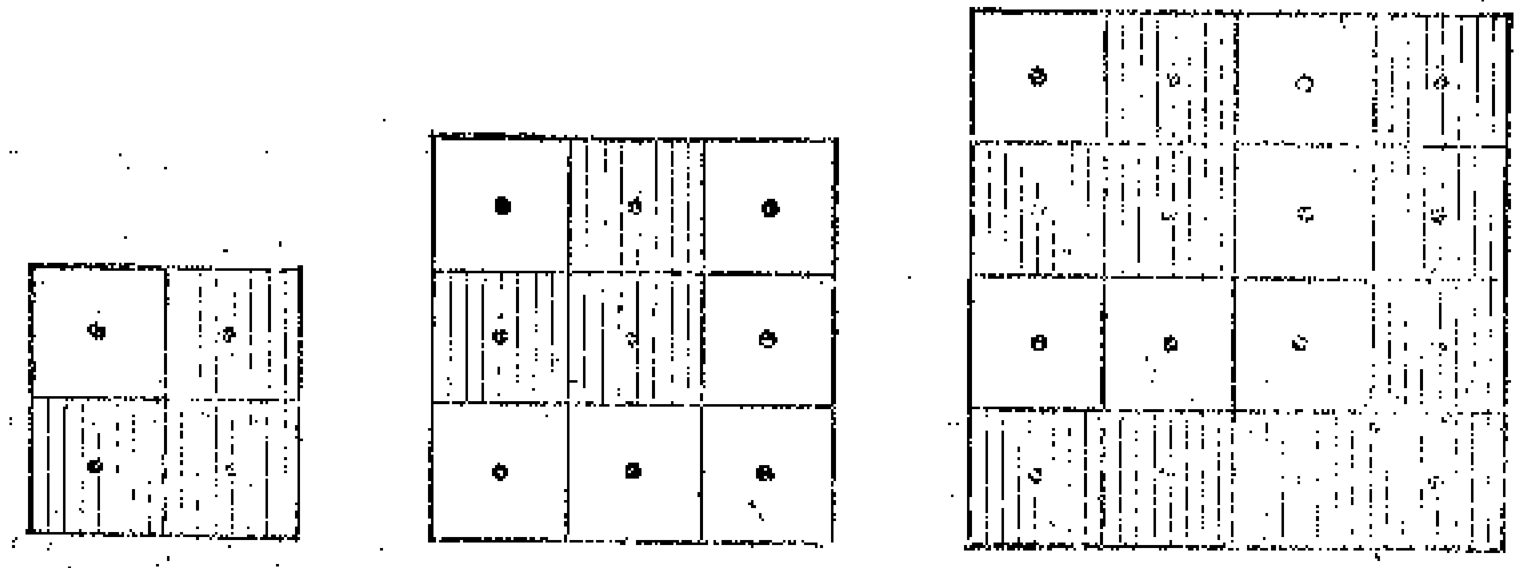
لاحظ بعض الحقائق الغريبة عن هذه « الأعداد المربعة » الأجزاء المظللة ذات نفع الآن :

العدد المربع الأول ٤ يساوي مجموع العددين المفردين الأولين أي إن ١ + ٣ تعطي العدد المربع الذي ضلعه ٢ .

الفيثاغورثيين ، تلك هى الأعداد غير الجذرية . ولقد عرضنا محتويات الأصول لنبين أن كثيراً من المفاهيم التى نعتبرها جبرية كان لها أساس فى هندسة إقليدس، ذلك عدا الرصيد الضخم الذى أضافه العلماء الإغريق الذين جاءوا بعده.

وقبل عصر إقليدس بزمن طويل وضع الفيثاغورثيون أسس نظرية الأعداد وليس هذا الموضوع سهلا الآن ، لكنه من السهل والممتع أن نعرف بعض الأشياء التى اكتشفها الفيثاغورثيون عن الأعداد ، غير مفهومهم الغريب عنها باعتبارها مذكرة ومؤنثة ، ذات حظ حسن وذات حظ سيء ، مقدسة وغير مقدسة وما إلى ذلك .

ولقد سموا الأعداد ٤ ، ٩ ، ١٦ ، . . الخ « أعداداً مربعة » ويمثل شكل ٣٠ ما كان يعتمل فى عقولهم فى تصنيف الأعداد بهذه الصورة (أهمل الأجزاء المظللة الآن) .



(شكل ٣٠)

لاحظ بعض الحقائق الغريبة عن هذه « الأعداد المربعة » الأجزاء المظللة ذات نفع الآن :

العدد المربع الأول ٤ يساوى مجموع العددين الفرديين الأوليين أى إن ١ + ٣ تعطى العدد المربع الذى ضلعه ٢ .

العدد المربع التالى ٩ يساوى مجموع الأعداد الفردية الثلاثة الأولى أى إن ١ + ٣ + ٥ تعطى العدد المربع الذى ضلعه ٣ .

العدد المربع التالى ١٦ يساوى مجموع الأعداد الفردية الأولية الأولى أى إن ١ + ٣ + ٥ + ٧ تعطى العدد المربع الذى ضلعه ٤ .

والآن لنتقدم خطوة إلى الأمام :

مجموع العددين الفرديين الأولين يعطى العدد المربع « اثنين فى اثنين » ، أى ٤ .

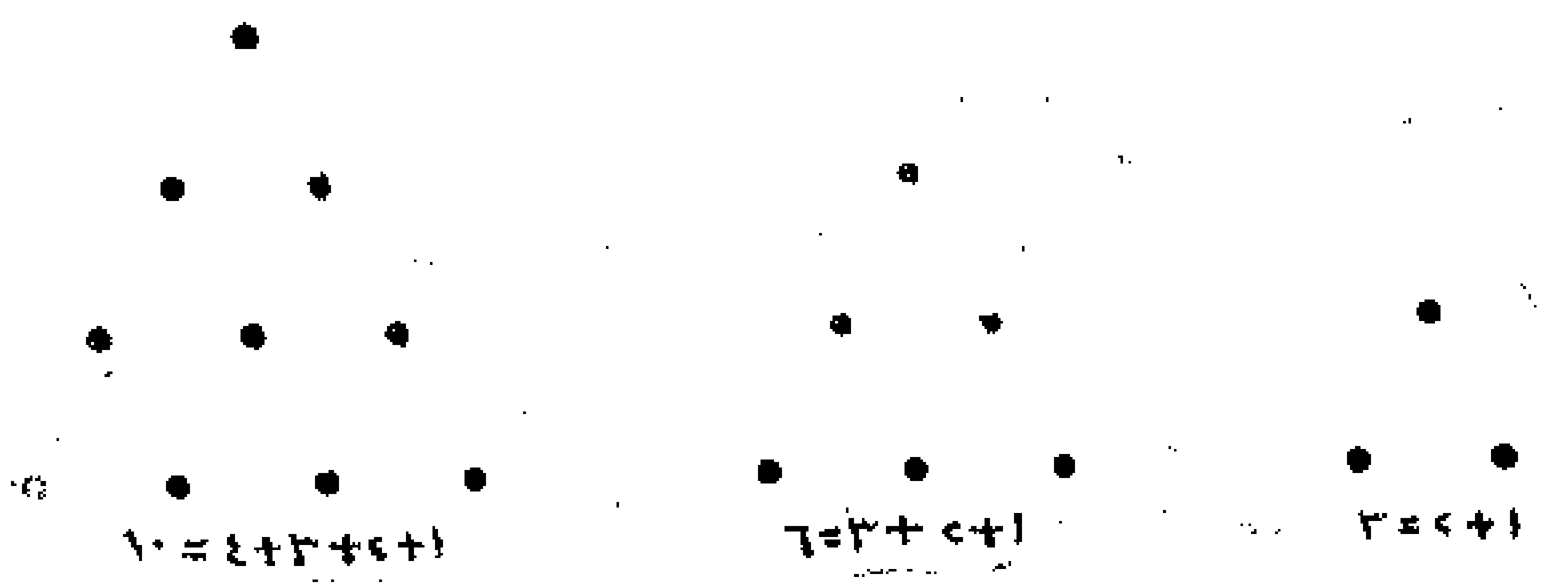
مجموع الأعداد الفردية الثلاثة الأولى يعطى العدد المربع « ثلاثة فى ثلاثة » أى ٩ .

مجموع الأعداد الفردية الأربعة الأولى يعطى العدد المربع « أربعة فى أربعة » أى ١٦ .

تدل هذه النتيجة على أن — ولنأخذ أى عدد — مجموع الأعداد الفردية المائتين الأولى يعطى العدد المربع « مائتين فى مائتين » أى ٤٠٠٠٠ .

ويمكن جبريا أن نوضح أنه إذا كانت ه رمزاً لعدد ما فإن المجموع (م) للأعداد الفردية الأولى التى عددها ه يساوى ه × ه أى إن $م = ه^{٢}$ ، وبهذا « القانون الجبرى » نستطيع مثلا إيجاد مجموع الألف عدد فردى الأولى دون أن نجمعها ، أو حتى أن نكتبها . هذا مثال لما يؤديه التعبير الرمزى فى الجبر من توفير للوقت والجهد ، فالقانون $م = ه^{٢}$ أداة رياضية تمكننا من حل عدد لا حصر له من المسائل التى تتشابه فى طبيعتها دون أن نفكر فى كل مسألة على حدة .

ولقد كان الفيثاغورثيون يسمون أعداداً معينة «الأعداد المثلثية» . ويتضح فى شكل ٣١ لماذا اعتبرت الأعداد ٣ ، ٦ ، ١٠ مثلثية .



(شكل ٣١)

لاحظ بعض الحقائق الغريبة المرتبطة بهذه الأعداد المثلثية الثلاثة :

مجموع العددين الأولين ١ + ٢ يعطى العدد المثلثى الأول ٣ .

مجموع الأعداد الثلاثة الأولى ١ + ٢ + ٣ يعطى العدد المثلثى الثانى ٦ .

مجموع الأعداد الأربعة الأولى ١ + ٢ + ٣ + ٤ يعطى العدد المثلثى الثالث ١٠ .

والآن لننتقل خطوة إلى الأمام . فلنسم كل مجموعة من الأعداد مثل ١ + ٢ ، ١ + ٢ + ٣ ، ١ + ٢ + ٣ + ٤ « متسلسلات » ولنسم أى عدد فى أى منها حداً .

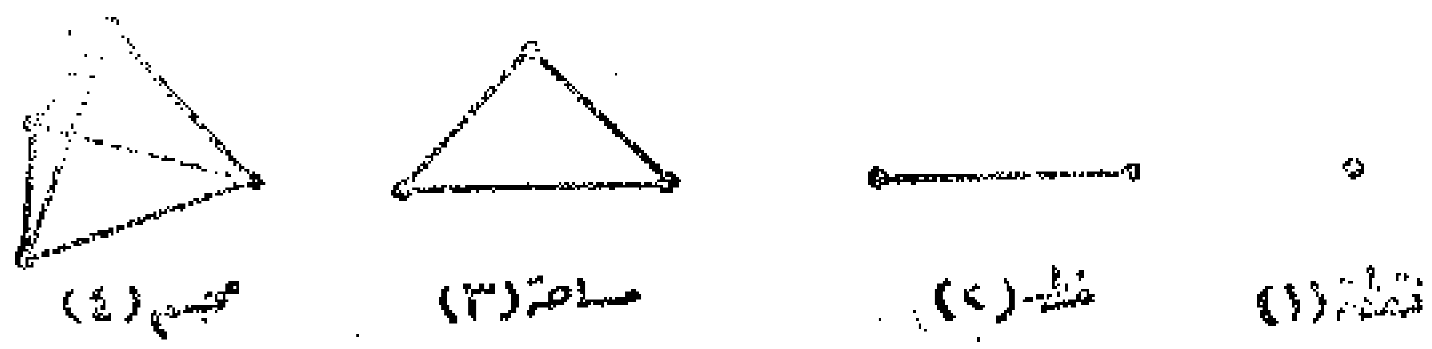
خذ أى واحدة من هذه المتسلسلات الثلاث . اضرب مجموع الحدين الأول والأخير فى عدد حدود المتسلسلة واقسم الناتج على ٢ تحصل على العدد المثلثى الذى يساوى مجموع حدود المتسلسلة .

ويمكن جبريا الوصول إلى أنه فى أى مجموعة من الأعداد المتتالية (ليس شرطاً أن يكون أولها ١) إذا دلت ا على العدد الأول فى المتسلسلة ، ل على

الحد الأخير ، ن على عدد الحدود فان مجموع الحدود (م) يمكن الحصول عليه من المعادلة $م = \frac{ن(ا+ل)}{٢}$ أى نصف مجموع ا، ل مضروبا فى ن ، ويسمى الرياضيون مثل هذه المتسلسلة من الأعداد « متوالية حسابية » ، ومثل كثير من المصطلحات الرياضية ليست بالصعوبة التى تبدو بها ، فيستطيع القارئ غير المتعمق فى الرياضيات أن يرى كم هو سهل أن يوجد مثلا مجموع جميع الأعداد التى أولها ٦٠٠ وآخرها ١٤٠٠ . والنقطة الوحيدة التى يمكن أن تعترض الطريق هى إيجاد قيمة ن . فمثلا هناك ثلاثة حدود فى المتوالية ٥ ، ٦ ، ٧ أى إن عدد الحدود يزيد واحداً عن الفرق بين الحدين الأول والأخير .

ها نحن أولاء الآن قد بدأنا نرى فائدة المادة التى نسميها الجبر الحديث .

يعتبر الفيثاغورثيون أن عشرة هو العدد « الكامل » وعشرة هى مجموع ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ وهى الأعداد التى تشمل النسب التى تعطى الفواصل الموسيقية التى اكتشفها فيثاغورث، أو واحد من أتباعه، وهى ٢/١ (الضعف)، ٣/٢ (الخمس)، ٤/٣ (الربع) ، وهى أيضا تدل عند أتباعه على نقطة (١) ، مستقيم (٢) ومثلث أو شكل مستو (٣) ، وهرم أو شكل مجسم (٤) كما يلى :



(شكل ٣٢)

ولقد ربطوا أعداداً معينة بالأوضاع المختلفة ، فقد لاحظوا أن عدداً من

النجوم يكون شكلا يبدو كالثور ، بينما تكون مجموعة أخرى شكلا كالعنقود وهكذا . . .

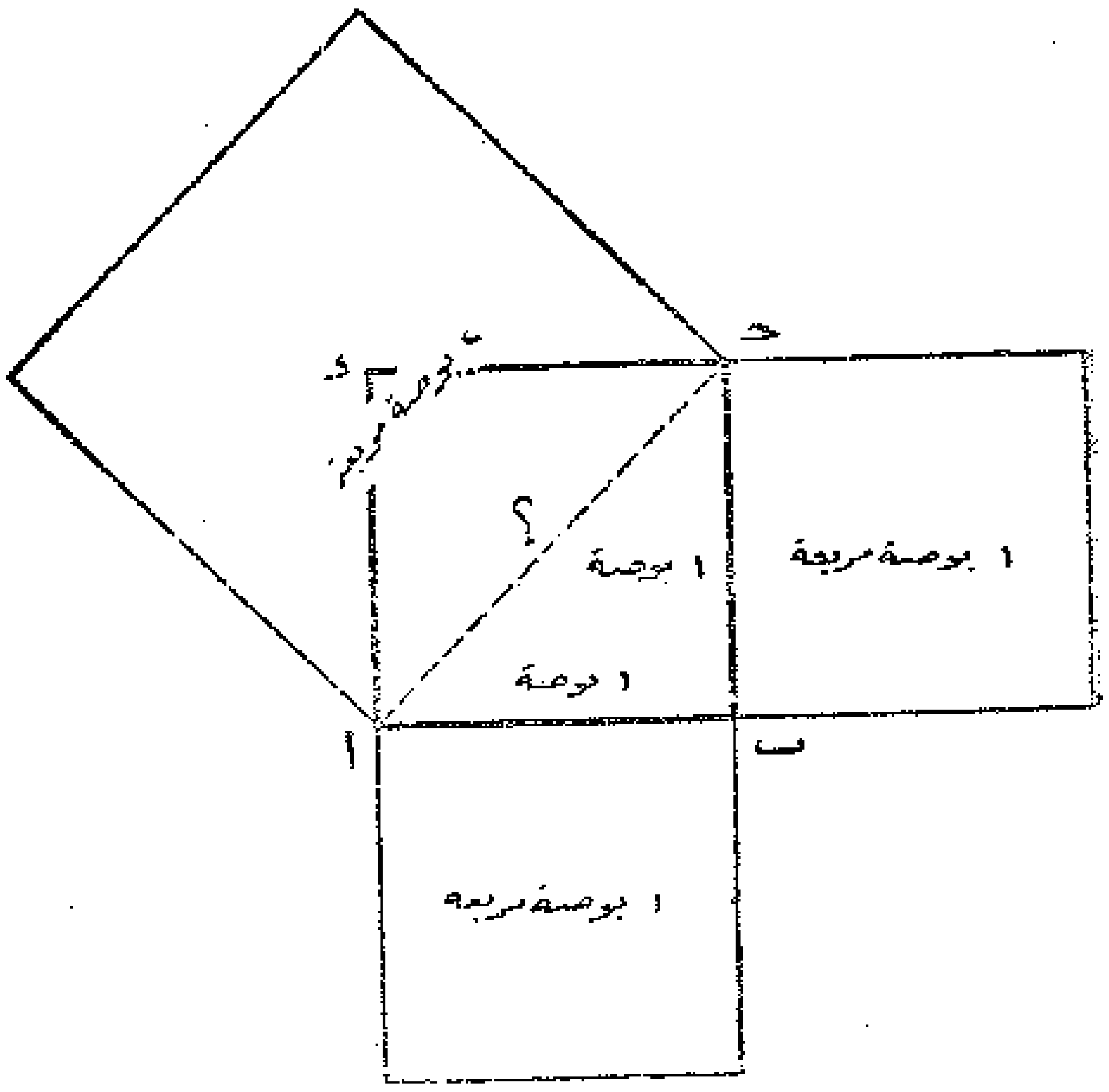
وهكذا اعتقد الفيثاغورثيون أن كل شيء في الكون مرتبط بشكل ما بعدد يشترك مع الأعداد الأخرى في بعض النواحي ، فاعتقدوا مثلا أن أي طولين لا بد يشتركان في طول محدد . فإذا قسمت ٣½ بوصات إلى سبعة أقسام متساوية ، ٥ بوصات إلى عشرة أقسام متساوية ، فإن الأقسام السبعة والأقسام العشرة تكون متساوية أي إن ٣½ ، ٥ لهما مقياس مشترك هو ½ ، وأخذوه أمراً مسلما به أن أي أطوال (أو الأعداد التي تدل على هذين الطولين) يمكن التعبير عنها بنفس الوحدات إذا أجريت عمليات التقسيم المناسبة ، إلا أن مشكلة عويصة واجهت الفيثاغورثيين وأعجزتهم (وما زال كثيرون يفشلون في فهمها) بادئ الأمر ، تلك هي مشكلة عدم وجود مقياس مشترك بين ضلع المربع وقطره .

ولقد رأينا في الفصل الثاني أنه مع أنهم لم يعرفوا البرهان العام « لنظرية فيثاغورث » لا بد أنهم عرفوا الحالة الخاصة التي يتساوى فيها الضلعان القصيران في المثلث القائم الزاوية . فلو رسم المربع ا ب حـ ء طول ضلعه بوصة واحدة ، ولنبحث كيف نستطيع حساب طول القطر ا حـ دون اللجوء إلى القياس لأنه لا يمكن أن يكون الرسم والقياس صحيحين صحة مطلقة .

نظراً لأن ا ب حـ ء مربع فإن كل زاوية من زواياه قائمة ، وعلى ذلك فإن المثلث ا ب حـ قائم الزاوية ، فإذا رسمنا مربعات على ا حـ ، ا ب ، حـ ب فتكون

على

مساحة المربع الأكبر تساوى مجموع مساحتى المربعين الآخرين ، ونظراً لأن مساحة المربع تساوى طوله × عرضه فإن مساحة كل من المربعين الأصغرين تساوى ١×١ أى بوصة مربعة واحدة ، كما أن مساحة المربع الأكبر المرسوم على ا حـ ، تساوى بوصتين مربعتين ، وإذن فما طول ضلعه ا حـ ؟



شكل (٣٢)

ينبغى أن يكون عدداً إذا ضرب فى نفسه كان الناتج ٢ ، إلا أنه يستحيل وجود هذا العدد . ولكننا نعرف أنه يقع على السلم العددى بين ١٫٤١ ، ١٫٤٢ أو يمكن أن نتقدم خطوة أخرى ونقول إنه يقع على السلم العددى بين ١٫٤١٤ ، ١٫٤١٥ أو خطوة أخرى : يقع بين ١٫٤١٤٢ ، ١٫٤١٤٣ وهكذا من غير نهاية .

فإذا تصورنا السلم العددى خطاً مستقيماً مدرجاً . ١ ، ٢ ، ٣ ، .. فإننا

نستمر فى تقسيم هذا الخط إلى أقسام أصغر وأصغر دون أن نصل إلى أجزاء صغيرة يمكن أن تمثل العدد الذى إذا ضرب فى نفسه كان الناتج ٢ تمثيلا صحيحاً . ولقد كان هذا كله صدمة للفيثاغورثيين ، فقد كانوا يعتقدون أن من الممكن أن تحدد كم مرة يحتوى قياس قياسا آخر . فمثلا إذا كان طول خط ٤ وحدات وخط آخر وحدة واحدة من هذه الوحدات ، فإن الخط الأول يكون ٤ أمثال الخط الثانى . أى إن النسبة بين الخطين ٤/١ . ولكن تبين للفيثاغورثيين أنه إذا كان من غير الميسور التعبير عن طول قطر المربع بعدد فإنه من غير الممكن مقارنة هذا الطول بأى طول آخر ، أى إن طول قطر المربع لا يمكن التعبير عنه بنسبة مثل ٤/١ .

والآن نسمى كل عدد يمكن التعبير عنه فى صورة نسبة مثل (٣/٢ أو ٣/١ أو ٤،٨ أو ٤٨/١٠) عدداً نسبيا ، وأى عدد لا يمكن التعبير عنه (كالعدد الذى إذا ضرب فى نفسه كان الناتج ٢) عددا غير نسبى .

ولقد اهتز الفيثاغورثيون لفشل اعتقادهم أن جميع الأعداد بينها مقياس مشترك لدرجة أنه قيل إنهم هددوا بالموت أى عضو منهم يفشى هذا السر المقلق ، فمضت مائة وخمسون سنة على وفاة فيثاغورث قبل أن يجد الرياضى الإغريقى يودكسوس Eudoxus طريقة هندسية لحل المسائل التى تنطوى على أعداد غير نسبية .

ونقول الآن إن طول أ حـ فى شكل ٣٣ هو « الجذر التربيعى لاثنين من البوصات » وتكتب هكذا « √٢ من البوصات » والواقع أن الرمز √ حديث بعض الشىء ، ولنفهم أصله ينبغى أن نعرف أولا كيف دخلت كلمة جذر إلى

الرياضيات. الواقع أن الإغريق لم يستعملوا هذا الاصطلاح ، بل استعملوا «ضلع العدد المربع » فسموا ٣ ضلع العدد المربع ٩ ، ٤ ضلع العدد المربع ١٦ وهكذا . فلما تبنى العرب الرموز العددية الهندسية البسيطة والسهلة الاستعمال ، أصبحت الأعداد أساس تفكيرهم الرياضى بدلا من الأشكال الهندسية ، وعلى ذلك فبدلا من أن يقولوا إن ضلع ١٦ هو ٤ أسقطوا التعبير الهندسى ، واعتبروا العدد كالنبات « ينمو » من « جذر » ، فاعتبروا ١٦ « ناميا» من الجذر ٤[1] .

وبعد أن وصل إلى أوروبا كتاب الخوارزمى « العد » نقل الرياضيون الأوروبيون فكرة العرب عن « الجذر » وترجموا الكلمة العربية إلى الكلمة اللاتينية radix ، كما استعملوا كلمتى « استخراج » أو « سحب » الجذر بدلا من كلمة « إيجاد » .

وقرب نهاية العصور الوسطى ، خلال فترة استحداث الرموز الجبرية ، اختصرت كلمة radix إلى الرمز R ، وهو الرمز الذى لا يزال يستعمل فى روشتات الأطباء ، فأصبح 5 = R 25 ، وحوالى ١٠٠ عام قبل دخول الطباعة استخدم حرف r بدلا من R فأصبح 5 = r 25 ويعتقد أن علامة الجذر √[2] هى صورة من حرف r كما كتبه أحد النساخ قبل اختراع الطباعة ، وهكذا تكتب « الجذر التربيعى للعدد ٢ » فى الصورة √2 .

ولنرجع الآن إلى آخر عهد الفيثاغورثيين ، فلقد اكتشفوا أن هناك أعداداً

(١) يتضح من هذا أن كلمة الجذر التى تستعملها الآن قد تحورت من كلمة جذر بكسر الجيم . (المترجم) .

(٢) فى الكتابة العربية نكتب √ فى الصورة √ (المترجم) .

لا حصر لها مثل $\sqrt{٢}$ لا يمكن التعبير عنها بأعداد ، وينطبق هذا على «ضامع »أى عدد ليس « عددا مربعا » .

وهناك قصة ممتعة تتصل بالاسم الذى أطلقه الرياضيون الإغريق على الأعداد التى مثل $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٥}$ ، . . . فقد استعمل الإغريق الكلمة logos التى تعنى « كلمة » كما تعنى « العقل الذى يقع خلف الكلمة » للدلالة على كل عدد يمكن التعبير عنه فى صورة نسبة ، أما أى عدد لا يمكن التعبير عنه فى صورة نسبة فأطلقوا عليه a-logos أى عدد « لا نسبى » وهنا نقفز حوالى ١٠٠٠ سنة لنتابع قصة a-logos .

لقد استخدم الخوارزمى ، الرياضى العربى ، الترجمة العربية لإنتاج أحد الرياضيين الإغريق وهذا استخدم بالطبع كلمة a-logos فى معناها الفنى للدلالة على « عدد لا نسبى » إلا أن من ترجم إلى العربية استخدم المعنى الحرفى لكلمة a-logos أى « بدون أى كلمة» مترجما إياها « أصم » بدلا من معناها الفنى ، ولذلك فإن الخوارزمى قد سمى $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، . . . الخ جذورا صماء، وبعد حوالى ٣٠٠ سنة نقل المترجم الأوروبى جيرادو Gherado إلى اللاتينية أحد كتب الخوارزمى ، فلما جاء ذكر الأعداد التى توصف فى النص العربى بأنها « صماء » ترجمها إلى الكلمة اللاتينية Surdus التى تعنى « صماء »[1].

لقد أخذتنا قصة الأعداد اللانسبية إلى المرحلة الثانية من قصة الجبر ، فلنعد الآن إلى العصر الذهبى للرياضيات عند الإغريق . وقد أطلق الرياضيون الإغريق على « علم الأعداد » عندهم الكلمة arithmetike ، وذلك لأن كلمة

(١) يسمى الجذر الأصم فى الأنجليزية Surd مع ما فى ذلك من صلة لا معنى لها بالصمم.

arithmos تعنى « عــدد » كما تعنى كلمة techne « علم » . وهنا ينبغى ألا يخدعنا الاستعمال الحالى لكلمة arithmetic فنظن أن arithmétiké لها أية صلة فى الأصل بالعمليات التى نجريها الآن ونطلق عليها هذا الأسم، فلقد أطلق الإغريق على هذه العمليات اسم logistic ونظرا لارتباط ذلك بالعمليات اليومية الدارجة فقد اعتبروه غير جدير بالدراسة أو الاهتمام ، وعلى ذلك توقف إطلاق اسم arithmétikè او arithmetica كما كان يكتب فى العصور الوسطى على « علم الأعداد » واستبدلت به الكلمة العربية « الجبر » . ولم يعد اسم arithmetic للظهور حتى القرن الثامن عشر عندما لم يعد يطلق على النوع الراقى من الرياضيات الذى كان يمثله بل على ال logistic أو على العمليات ، وهو ما كان ينظر اليه بعين الاحتقار ، ومنذ القرن الثامن عشر تستعمل كلمة arithmetic فى المعنى الذى تستعمل فيه الآن ، ولعل ، (وإن لم يكن مؤكدا) هـذا التغيير الكبير فى معنى الكلمة قد جاء نتيجة لخطأ فى اشتقاقها ، إذ أن الكلمة تردفى القرن الثامن عشر فى الصورة ars-metrica كما لو أنها جاءت من الأصل اللاتينى من ars أى « فن » ، و « metrica » أى قياس بدلا من الأصل اليونانى arithmos-techne كما سبق أن رأينا ، وعلى كل فمهما يكن التغير الكبير فى المعنى ، فإن الكلمة اليوم ترتبط « بفن القياس » .

ولنرجع الآن إلى الرياضيين الإغريق وأعمالهم ، خلال القرون الخمسة التى مرت بعد أن كتب إقليدس كتاب « الأصول » بدأوا يحلون مسائل معينة مستعملين فى ذلك الأعداد بدلا من الأشكال الهندسية ، وكانت غالبية هذه المسائل مما نقول عنه الآن إنه يؤدى إلى معادلات ، وهنا لابد أن نتذكر

أنهم لم يكونوا قد عرفوا التعبير الرمزى الجبرى كما نعرفه الآن ، بل كانوا يكتبون الحلول كاملة فى صورة لفظية .

وهناك مجموعة مشهورة من الأشعار اليونانية الممتعة القديمة[1] ، من بينها ست وأربعون تحكى مسائل عددية ، ومن المعتقد أن بعضها قد كتب قبل أن تجمع المجموعة فى عام ٥٠٠ ميلادية بألف عام ، وكانت جميع هذه المسائل تؤدى إلى نوع أو آخر من أنواع المعادلات وفيما يلى واحدة منها

« إذا أعطى رجل ثلث عدد من التفاح ، وأعطى آخر ثمن هذا العدد ، وأعطى ثالث ربع العدد ، وأعطى رابع خمس العدد ،فإن الرجل الخامس يحصل على ١٠ تفاحات بينما لا يحصل السادس إلا على تفاحة واحدة . كم تفاحة نلزم؟»

فإذا أخذنا س للدلالة على الكمية المجهولة ، أى على عدد التفاحات واستعملنا « اختزالنا » الجبرى الحديث ، فإنه يمكن ترجمة هذه المسألة إلى المعادلة $\frac{س}{٣}+\frac{س}{٨}+\frac{س}{٤}+\frac{س}{٥}+١٠+١=س$

وهذه تحل فى سهولة إذا ضربنا كل حد من حدود المعادلة فى ١٢٠ أى فى أصغر عدد يقبل القسمة على ٣ ، ٨ ، ٤ ، ٥ أى فى « المضاعف المشترك الأصغر » لهذه الأعداد .

إلا أن مثل هذه المعادلة تكون بالغة الصعوبة لو أنه لم تكن لدينا الرموز الجبرية والأساليب الحديثة فى التعامل ، ولقد كانت مثل هذه المعادلة —

(1) Greek Anthology.

حتى القرن السابع عشر — تحل بطريق شبيهة بتلك التى جاءت فى قرطاس أحمس .

لنعد إلى المسألة المصرية التى ذكرناها فى صفحة ٧٥ والواقع أنها أسهل من تلك التى أخذناها من الأشعار اليونانية ، إلا أنها مثلها لا يمكن حلها مالم نستعمل الرموز والطرق الحديثة.

وفيما يلى ملخص للطريقة القديمة التى كانت المسألة المصرية تحل بها حتى القرن السابع عشر ، وينبغى هنا أن نتذكر أن الرموز والطرق الحديثة فى إجراء العمليات سهلت الأمر كثيراً عما كان عليه قبل إدخالها .

والمسألة المصرية القديمة هى إيجاد العدد الذى إذا جمع على سبعه كان الناتج ١٩ .

أولا خذ عدداً يتفق مع بعض الحقائق المعطاة ، (فى قرطاس أحمس اختير العدد ٧) ثم ابحث عما إذا كان هذا العدد يحقق الحقائق المعطاة . من الواضح أن العدد المجهول ليس ٧ نظراً لأنك إذا جمعت ٧ على سبعها حصلت على ٨ فقط ، وليس على ١٩ ، إلا أن ١٩ تساوى $٢\frac{٣}{٨}$ مضروبة فى ٨ ، وعلى ذلك فإن القيمة الحقيقية للعدد المجهول تكون $٢\frac{٣}{٨}$ مرة القيمة الخاطئة ٧ التى بدأنا بها العمل ، أى إن القيمة الحقيقية هى $٢\frac{٣}{٨} \times ٧ = ١٦\frac{٥}{٨}$.

ولقد أطلق فى العصور الوسطى على هذه الطريقة طريقة الوضع الكاذب[1] ولقد وردت السطور الآتية فى كتاب Grounde of Artes

(١) فى الأصل الإنجليزى Rule of False Position or Rule of False

الذى كتبه الرياضى الانجليزى روبرت ريكورد Robert Recorde فى منتصف القرن السابع عشر :

افترض وادرس ما يؤدى إليه افتراضك

فقد تتقدم من المصادفة إلى الحقيقة

واسترشد أولا بالسؤال

بالرغم من أن الحقيقة لا تظهر فيه

فإن هذا الزيف أساس طيب

يؤدى إلى ظهور الحقيقة

ولقد استخدمت هذه الطريقة ، التى تبدأ بافتراض عدد (تعلم فى أغلب الأحيان أنه غير صحيـــح) حتى ثلاثمائة عام مضى . حاول أن تحل مسألة التفاح التى ذكرناها باستخدام هـــذه الطريقة ، واحسب الزمن الذى يتطلبه ذلك .

ولننتقل الآن إلى المرحلة الثانية من قصة تطور الجبر . فى حوالى ٢٥٠ ميلادية اشتهر رياضى فى الإسكندرية اسمه ديوفانتوس Diophantus ، ولسنا نعلم متى ولد ولا نكاد نعرف شيئا عن حياته الشخصية فيما عدا ما ذكر فى إحدى المقطوعات الشعرية اليونانية التى أشرنا إليها . وهذه تروى أن طفولته استمرت سدس حياته ، وأن لحيته نبتت بعد ذلك بمدة تعادل $\frac{١}{١٢}$ من طول عمره ، وأنه تزوج بعد ذلك بمدة تعادل $\frac{١}{٧}$ عمره ، وأن ابنه ولد بعد ٥ سنوات من زواجه ، وأن الابن عاش نصف عمر أبيه ، وأن الوالد مات بعد ٤ سنوات من موت ابنه . كم كان عمر ديوفانتوس عندما مات ؟

ونظراً لأنه من الممتع أن نعرف كم سنة عاشها هذا الرياضى ، فإنه يحسن أن نحل هذه المسألة ، إلا أننا فى ذلك لا نستعمل طريقة الوضع الكاذب التى استخدمها خلال العصور الوسطى جميع من قاموا بحساب عمره .

فإذا رمزنا لعمر ديوفانتوس بالرمز س ، واستخدمنا الرمز ∴ بدلا من إذن .

$$\therefore\ \frac{س}{٦} + \frac{س}{١٢} + \frac{س}{٧} + ٥ + \frac{س}{٢} + ٤ = س$$

اضرب كل حد فى ٨٤ ، وهى المضاعف المشترك الأصغر للمقامات :

$$\therefore\ ١٤\,س + ٧\,س + ١٢\,س + ٤٢٠ + ٤٢\,س + ٣٣٦ = ٨٤\,س$$

$$\therefore\ ٧٥٦ = ٩\,س$$

$$\therefore\ س = ٨٤$$

فإذا كان ما ذكر فى المقطوعة الشعرية صدقا فإننا على الأقل نعلم أن ديوفانتوس قد عاش إلى سن الشيخوخة .

ولقد كسب لنفسه خلال سنيه الأربع والثمانين لقب أبو الجبر ، وإن يكن هذا اللقب قد أطلق عليه بعد موته بوقت طويل ، إلا أنه من الصعب تأييد أحقيته فى هذا اللقب ، فبالرغم من أنه كتب كتاب Arithmetica الذى يعد دون شك من أعظم كتب الرياضيات ـ وقد ساعد فى صقل عقل فرمات Fermat أحد الرياضيين الفرنسيين العظام ، بعد مضى أربعة عشر قرنا ـ ولقد كان أصلا مكونا من ثلاثة عشر جزءاً ، شأنه فى ذلك شأن كتاب إقليدس الأصول ، إلا أن ستة أجزاء فقط هى التى اشتهرت ، وهى تعالج المسائل العددية التى تؤدى إلى معادلات — بعضها فى غاية الصعوبة — ومنها معادلات الدرجة الثانية والثالثة والرابعة ، وكثير من هذه المعادلات غير معينة Indeterminate أى إنه

يحتوى على أكثر من مجهول واحد . بالرغم من كل هذا فإن اثنين من الثقات فى رياضيات الإغريق وهما الدكتور نسيلمـــــــان Nesselmann ، والسير توماس هيث Heath يؤكدان أنه ليس أول من حل معادلات مثل هذه كما أنه لا يمكن القول بأن الطرق التى استخدمها أدت إلى الأساليب الجبرية الحديثة ، فإن هذه لم تظهر إلا بعده بألف وخمسمائة سنة .

إن الخاصية العظمى البارزة للجبر الحديث هى أنه يزد الرياضيين بلغة بسيطة مختصرة فى صورة مختزلة ، يمكن بها التعبير عن المصطلحات والعمليات الرياضية . إن هذا الاختزال الرياضى يستخدم رموزا وإشارات لا تتصل فى ظاهرها بما تمثله ، كما أنه يمكن التحكم فيه بجهد قليل على الذاكرة إلى جانب أنه يمكن أولئك الذين يفهمونه من حل المسائل والتعبير عنها دون استخدام الكلمات فيما عدا كلمات الربط مثل بما أن أو إذن . وبالرغم من أهمية هذا العمل فإنه لا يمكن أن يقال إن ديوفانتوس وضع مثل هذا النظام ، مع أن كثيرين ينسبون إليه هذا الفضل ، إذ أن ما استخدمه من رموز لا يتعدى اختصارات للكلمات ، وهذه ينقصها التعميم والقوة وهما ماتتميز بهما رموزنا الحديثة .

وكما رأينا هناك ثلاث مراحل منفصلة فى قصة تطور الجبر ، امتدت الأولى من أزمنة قدماء المصريين حتى عصر ديوفانتوس حوالى ٢٥٠ ميلادية ، وفى هذه المرحلة كتبت المسائل كاملة فى كلمات وجمل كقطعة من النثر أو الجدل الفلسفى . وخلال القرون الأربعة الأخيرة فى هذه المرحلة استعمل الإغريق كلمة arithmos (الكلمة اليونانية للعدد) للدلالة على العدد المجهول فى المسألة ، وقد كتبوا الكلمة كاملة حيث نستعمل نحن الآن رمزاً مثل س .

ويبدو أن ديوفانتوس أصابه الملل من تكرار كتابه [illegible] arithmos للدلالة على الكمية المجهولة فاختصرها إلى الحرفين الأولين [illegible] لكنهما باليونانية αρ ، وخلال كتابته للحرفين آلاف المرات أدمجهما فى الصورة [illegible] ثم فى الصورة S وأخيرا ς .(هذه هى النظرية التى وضعها السير توماس هيث ، وهى ليست مقبولة عند جميع مؤرخى الرياضيات) .

كذلك عندما احتاج ديوفانتوس إلى التعبير عن arithmos مضروبا فى arithmos ، أو كما نقول نحن الآن مربع عدد غير معلوم ، كتب الحرفين الأولين من الكلمة اليونانية dunamis التى تعنى قوة (قارن هذه الكلمات ديناميت ، وديناميكا ، وديتمو) معتبراً أن arithmos مضروبا فى arithmos أكثر قوة من arithmos واستخدم فى ذلك الرمزين Δ^T . وعلى ذلك فإن ΔT فى كتابه تعنى ς مضروبة فى ς ، وهى ما نعبر عنها الآن فى الصورة س^2 حيث تدل س على العدد المجهول .

كذلك نظراً لأن حجم المكعب يساوى طوله مضروبا فى عرضه مضروبا فى ارتفاعه ، وأن هذه الأبعاد الثلاثة متساوية فقد أطلق على arithmos مضروبا فى arithmos مضروبا فى arithmos مكعب كما نسميها الآن . ونظراً لأن الكلمة اليونانية للمكعب هى ΚΥΒΟΣ كما تكتب بالحروف الكبيرة فقد اختصرها إلى K^T .

والآن نطلق على س^2 « س تربيع » أو «القوة الثانية للرمز س » وفى هذا نتبع خطوات ديوفانتوس . ولكننا نتقدم عليه فلانطلق على س^3 «س تكعيب» فقط بل كذلك « القوة الثالثة للرمز س » وعلى س^4 « القوة الرابعة للرمز س »

وهكذا . كذلك فإن هذه التعبيرات لا تقتصر على العدد المجهول ، بل تطبق على أى عدد أو رمز يدل على عدد .

وحتى عصر ديوفانتوس كان الإغريق يكتبون (١٠ — ١) أى عشرة ناقصا واحد فى الصورة ι Λειπσις α. وكانت الكلمة التى تربط ١٠ و ١ هى leipsis أى ناقصا ، فاختصرها ديوفانتوس بأن كتب الحرف الأول من كلمة ناقصا (باليونانية) وهو Λ ، ولكى يوضح أن الحرف اختصار لكلمة وضع داخله خط فجاء فى الصورة ⋔ وهكذا استخدم Λ للدلالة على الطرح ، وبذلك كتب ι Λ α. حيث نكتب نحن الآن ١٠ — ١ ، وهنا يجب ألا نتصور أن ديوفانتوس قد وضع علامة تناظر علامة النقص عندنا ، فقد كان يستطيع أن يكتب ما نعبر عنه فى الصورة ١٠ — ١ ، ولكنه (١ — ١٠) لم تكن ذات معنى عنده ، بل إنه قد مضت خمسة قرون على عصر ديوفانتوس حتى دخل مفهوم الكميات الموجبة والسالبة إلى الرياضيات ، وبذلك أصبح للعبارة (١ — ١٠) معنى ، وسنعالج هذا المفهوم فى فصل تال .

وعلينا الآن أن نعرف كيف حلت كلمة algebra محل كلمة arithmetica عنوانا « لعلم الأعداد » . لقد كتب الرياضى العربى الخوارزمى إلى جانب كتابه عن الرموز العربية الهندية للأعداد ، كتابا فى حل المعادلات ، وجعل له عنوان (الجبر والمقابلة) للدلالة على العمليتين الأساسيتين اللتين تستخدمان فى حل مسائل المعادلات ، فيتضمن الجبر تجميع الحدود التى تنطوى على المجهول ، والمقابلة مواجهة الكمية المجهولة (فى صورتها الموحدة) بعدد معلوم ، فمثلا عند حل « ثلاثة أمثال عدد مضافا إليه نصف هذا العدد يساوى ٧ » فإننا نجمع : ثلاثة

أمثال المجهول على نصف المجهول فنحصل على «٣½ المجهول» ثم نواجه هذا الناتج بالعدد ٧ فنحصل على ما نعبر عنه بالصورة $\frac{٧ س}{٢} = ٧$.

ولقد ترجم هذا الكتاب إلى اللاتينية تحت عنوان «مدرسة الجبر والمقابلة» وبالتدريج اختصر هذا العنوان الغريب إلى الكلمة الدارجة « الجبر» ، وبذلك حلت الكلمة العربية محل الكلمة اليونانية arithmètiké التي ظلت مستعملة زمنا طويلا .

ومن الممتع أن نعرف كيف وجدت الكلمة العربية « الجبر »طريقها إلى أوروبا عن طريق الأندلس ، فهناك استعملت الكلمة في معنى غير رياضي على الإطلاق ، فكان أمرا عاديا في إسبانيا أن يسمى الحلاق نفسه جابرا للكسور فقد كان الحلاقون في العصور الوسطى يحترفون جبر العظام وفصد الدم إلى جانب مهنتهم الأصلية ، ويدل على ذلك ما كتبه هال Halle عام ١٥٦٥ ، عندما كان عمر شكسبير سنة واحدة إذ يقول : « إن الكلمة العربية الجبر تعني إعادة كسور العظام إلى حالتها الأصلية ».

وخلال العصور الوسطى ترجمت أعمال الخوارزمي في الجبر إلى اللاتينية مرات ، إحداها قام بها المترجم المعروف جيرادو Gherado ، والأخرى قام بها رجل إنجليزي هو روبرت تشستر Robert Chester ، وهذه ترجمها إلى الإنجليزية عام ١٩١٥ كاربنسكي L. C. Karpinski ويمكن الاطلاع عليها في المكتبات الكبيرة .

ولقد اتسمت الأعوام من عام ٨٠٠ إلى عام ١٤٥٠ التي تعرف بالعصور الوسطى بجمود فكري تام شل تقدم الرياضيات ، وألقى ظلاله على الرياضيين

الأوروبين كغيرهم من المفكرين ، إلا شعاعاً ضئيلا من النور ظهر حوالى عام ١٢٠٠ — عندما كتب ليوناردو فيبوناكى Leonardo Fibonacci كتابا فى الجبر والرموز العربية الهندية للأعداد .

ولقد ولد فيبوناكى فى بيزا فى شمال إيطاليا ، ولكنه تلقى تعاليمه فى شمال أفريقيا حيث عمل والده فى أحد الجمارك ، لذلك قابلته فى الحياة الرموز العربية للأعداد ، وفى عام ١٢٠٢ نشر كتابا عن « الجبر والمقابلة عند الخوارزمى » شرح فيه الرموز العربية للأعداد ، وبين أفضليتها على الرموز الرومانية ، وإلى جانب معالجته للجبر ، قام فيبوناكى بحساب قيمة ط مقربة بين ٣,١٤١٠ و ٣,١٤٢٧ وهذه أدق من القيمة التى توصل إليها أرشميدس ، كذلك حاول تفسير معنى العبارة « ٥ ناقصا ٨ » واعتبرها « دينا قدره ٣ » وكانت هذه إحدى المحاولات الأولى للوصول إلى معنى مانسميه نحن الآن عددا سالبا ، كذلك استفاد من التقدم الذى وصل اليه العرب فى حساب المثلثات ، وهو ما نعالجه فى فصل تال .

إلا أن هذا البصيص من النور سرعان ماخبا ، ولم يبدأ ظلام العصور الوسطى فى الانقشاع إلا فى منتصف القرن السادس عشر وعلى وجه التحديد عام ١٥٤٥ ، بل تحول الظلام إلى وهج من النور فاق فى لمعانه العصر الذهبى للرياضيات عند الإغريق ، فمنذ أيام أرشميدس حتى منتصف القرن الخامس عشر لم يحدث فى المعرفة الرياضية سوى تقدم لايكاد يذكر ، ولكن فجأة بدأت المعرفة تزدهر ، فبين عامى ١٦٠٠ و ١٧٠٠ بدأت التطورات الحديثة الكبيرة فى الرياضيات تأخذ طريقها واستمرت منذ ذلك التاريخ . كيف

حدثت هذه اليقظة الفجائية ؟ كى نفهم مبعثها ينبغى أن نرجع إلى الوراء ونتأمل فى بعض الحوادث التاريخية التى حدثت فى أوروبا .

لقد حدث التحول من العصور الوسطى إلى العصر الحديث فى النصف الثانى من القرن الخامس عشر ، وتعرف هذه الفترة بعصر النهضة ، أو بالفترة التى عاد فيها الفكر والتعلم إلى الحياة ، ولقد حدثت أربع حوادث هامة ، وإن تكن تبدو لأول وهلة متباعدة ، إلا أنها أدت إلى النهوض من ظلمات العصور الوسطى .

أول هذه الحوادث سقوط القسطنطينية فى أيدى الأتراك عام ١٤٥٣ ، فقد ظلت ترد حتى هذا التاريخ هجمات الانجليز ، والسكسونيين ، والقوطيين وغيرهم من القبائل على الجزء الشرقى من الامبراطورية الرومانية ، ذلك الجزء الذى كانت عاصمته القسطنطينية .

ولقد ظلت الثقافة والمعرفة التى ورثها الرومان عن الإغريق حية فى هذه المدينة التى أنشأها الامبراطور الرومانى قسطنطين على أطلال بيزنطة ، ولقد وصل رجال العلم فيها إلى المخطوطات اليونانية التى امتلأت بها مكتباتها ، ومن هذه المخطوطات حصل أحد الخلفاء العرب على نسخة من « الأصول » لإقليدس كما رأينا فى الفصل الثانى .

ولقد ظلت القسطنطينية ألف عام بعد إنشائها تصد غازياً بعد غاز ، إلا أنه فى عام ١٤٥٣ سقطت تحت هجمات الأتراك ، وكان لسقوطها آثار عملية وعقلية فى أوروبا الغربية .

ونظراً لأنها بوابة بين الشرق والغرب ، فقد أصبحت القسطنطينية خلال العصور الوسطى أكبر مدينة تجارية فى العالم ، إلا أن هذه البوابة قد أغلقت الآن ، وسرعان ما يفتح غيرها ، وفى البحث عن غيرها اكتشف عالم جديد غير مجرى التاريخ .

خلال القرن الرابع عشر اكتشف الصينيون الإبرة المغناطيسية ، وانتقل إلى أوروبا استعمالها فى بوصلة الملاحة ، وبذلك لم يعد البحارة ملزمين بالسير بحذاء الشاطىء بل اتجهوا إلى البحار المفتوحة ، واثقين فى القدرة العجيبة لما نسميه الآن مغناطيسية .

وفى هذا يدين العالم للأمير البرتغالى هنرى الملاح الذى لم يكن كغيره من الأمراء يقضى عمره فى تقتيل وسرقة أبناء وطنه ، بل قضاه فى تشجيع الكشف والملاحة ، فبالرغم من أن كلا من البابا والامبراطور وملك إنجلترا دعوه لتولى قيادة جيشه ، إلا أن الأمير هنرى فضل أن يعيش على الرأس الصخرى فى ساجرس Sagres فى أقصى الجنوب الغربى للبرتغال ليدرس الرياضيات والفلك ، علّه يستطيع أن يطور علوم الملاحة ورسم الخرائط ، ولقد استخدم أمواله الطائلة فى تشجيع الكشف عن طريق تسيير أجرأ وأمهر البحارة فى العالم فى الرحلات التى كان ينظمها ، وكان هدفه الأساسى أن يجد طريقاً بحرياً إلى الهند حول أفريقيا ، وبعد سقوط القسطنطينية تضاعفت جهوده ولكن عمله لم يتوج بالنجاح إلا بعد وفاته عندما أبحر فاسكودى جاما يوم ٨ من يولية عام ١٤٩٧ ومر بناتال فى يوم عيد الميلاد ، وأخيراً بلغ الهند يوم ٢٠ من مايو فى العام التالى .

وقبل هذه الرحلة العظيمة كان اكتشاف الدنيا الجديدة موضع دهشة أوروبا ، ففى ١٣ من أغسطس عام ١٤٧٦ تحطمت سفينة بحار من جنوا بالقرب من الرأس الصخرى الذى يعيش عليه الأمير هنرى ، فسبح إلى الشاطىء ، وكان عمر البحار حينذاك ٢٥ سنة ، وظل سنين كثيرة حتى تمكن من فن رسم الخرائط ، واشتعلت فيه الرغبة فى الكشف أكثر مما كانت تشتعل فى نفوس البرتغاليين من رجال البحر والتجارة ، وكان اسم هذا الشاب كريستوفر كولومبس ، ولقد كان للرحلة الهامة التى قامت بها السفن الثلاث سانتا ماريا ونينا وبينتا عام ١٤٩٢ دور عظيم فى إثارة شوق الرجال ، وتوسيع مداركهم ، وفى تمهيد الطريق لاكتشافات جديدة ليست بحرية وبرية فقط ، ولكن عقلية أيضاً .

أما الحدث الثالث الذى أدى إلى التحرر من ظلمات العصور الوسطى فقد نشأ أيضاً من سقوط القسطنطينية ، ذلك هو طرد وهروب كثير من رجال العلم الذين كانوا فى هذه المدينة ، ولقد وجد عدد كبير منهم ملجأ فى إيطاليا ، وبذلك وصلوا إلى أوروبا وقد أقفرت دور العلم فيها ، فكانت التربة صالحة لتطوير أفضل ما وصل إليه الفكر فى العصور الوسطى فى ضوء أفضل ما وصل إليه الفكر فى اليونان القديمة ، وبدأت أوروبا بمعاونة هؤلاء اللاجئين من رجال العلم بما معهم من مخطوطات لا تقدر بثمن فى اكتشاف أمجاد الإغريق ، وخلال هذا تولدت فيهم الثقة بقدرتهم على التفكير المستقل ، وجاء عصر نسميه عصر إحياء العلوم .

ولقد ساعد حدث رابع جاء فى السنوات الأخيرة من القرن الخامس عشر على الإسراع فى إحياء المعرفة ، ذلك هو إدخال الطباعة إلى أوروبا ، فلقد أدت

القوة الكبيرة للمطابع ، بالإضافة إلى إحلال الورق محل الرق غالى الثمن ، إلى زيادة هائلة فى عدد الكتب التى يمكن توزيعها يناظرها نقص كبير فى التكاليف .

والآن وقد تأملنا باختصار التغيرات الكبيرة ذات الأثر التى حدثت فى أوروبا حوالى عام ١٥٠٠ أصبحنا فى مركز أفضل يمكننا من فهم سبب هذا الفيضان من الأفكار والاكتشافات الرياضية ، الفيضان الذى تسير اليوم على مياهه العالية سفن العلم والهندسة والطيران .

كانت أولى موجات هذا الفيضان فى عام ١٥٤٥ ، فى شمال إيطاليا تقع المدينة القديمة بافيا Pavia على ضفاف نهر تيسينو Ticino . بعد سقوط الامبراطورية الرومانية ضربت المرة بعد المرة وفى كل مرة تقوم من رقادها .

فى عام ١٥٠١ ولد فى المدينة ولد اسمه جيرولامو كاردان Girolamo Cardan ابناً غير شرعى لمحام ، وقد قدر لهذا الطفل أن يشتهر كعالم فى الرياضة والطبيعة والفلك ، وكمقامر وكرجل لايحترم كلمته ، ولقد بدأ دراسته طالباً فى جامعة بافيا ولكنه أنهاها بشهادة فى الطب من جامعة بادوا Padua . ولقد باءت محاولته ليبنى لنفسه مستقبلا فى الطب بالفشل لدرجة أنه لجأ هو وزوجته إلى ملجأ للفقراء ليعيشا فيه ، ولكن الحظ ابتسم له بعد ذلك ، فقد نجح فى شفاء طفل لنائب عن ميلانو ، ورداً لهذا الجميل سعى النائب لدى المسئولين للسماح لكاردان للعمل بالطب وإلغاء وقفه السابق الذى كان مبنياً على ميلاده غير الشرعى . ولكن ما إن سمح له بمزاولة المهنة حتى أخذ يصرف كثيراً من وقته فى المقامرة وفى أمور خارج مهنته ، الأمر الذى كان له أثر كبير فى عمله ، ولكن مرة أخرى ابتسم له الحظ فعين أستاذاً للطب فى بادوا .

ولم تكن ميول كاردان مقصورة على الطب ، فبدأ يكتب فى الرياضيات وأدى به ميله هذا إلى مراسلة رياضى اسمه نيكولو فونتانا Niccolo Fontana ويعرف « تارتاجليا » أى « المتلعثم » ، وهذا ولد عام ١٥٠٠ فى بريسيا Brescia وبعد اثنى عشر عاماً عندما استولى الفرنسيون على المدينة ذبح فى الكاتدرائية عدد كبير من سكانها فيما بينهم والد تارتاجليا ، وترك الغزاة نيكولو على أنه ميت ، إلا أن والدته شقت طريقها خلال المقابر وحملت جسده المحطم ، وبالرغم من أن جمجمته وفكيه وسقف فمه كانت مهشمة ، فإن رعاية أمه أنقذت حياته لكنه ظل طوال عمره يتلعثم نظراً للجرح الذى أصابه فى أعلى حلقه . ولقد كان تارتاجليا وأمه فقيرين إلى الحد الذى اضطره إلى استخدام أحجار المقابر كألواح يحل عليها التمرينات من كتاب استطاع الحصول عليه ، وبالرغم من عقبة هذا الفقر — أو مستثاراً بهذا الفقر — علم نفسه بنفسه حتى استطاع أن يكون محاضراً ، ثم أستاذاً فى فينيسيا ، وخلال وجوده هناك اكتشف طريقة لحل المعادلة ذات الدرجة الثالثة أى معادلة مثل $س^{٣} + ا\,س^{٢} = ب$ حيث ا ، ب ثابتان ، وكان أمراً عاديا فى أيامه أن يتحدى الرياضيون رياضيين آخرين أن يحلوا المسائل ، فلما أعلن تارتاجليا أنه يستطيع حل المعادلة $س^{٣} + ا\,س^{٢} = ب$ استدعى إلى سباق مع شخص اسمه فيور Fiore ، وعلى كل منهما أن يختار ثلاثين مسألة ويقدمها إلى منافسه ، ومن منهما يحل أكبر عدد من المسائل خلال ثلاثين يوما يعتبر فائزاً ويحصل على مبلغ من المال أودع لدى محام ، ولقد كانت قائمة المسائل المعطاة لتارتاجليا معادلات من الدرجة الثالثة من التى وضع لها قاعدة عامة ، دون أن يعرف منافسه ذلك . ففى أقل من ساعتين حل جميع المسائل ، أما منافسه فلم يستطع حل أى واحدة مما قدم له تارتاجليا .

ولقد ظل تارتاجليا محتفظا بطريقته فى حل المعادلات ذات الدرجة الثالثة سرا لنفسه ، لكن بعد إلحاح كثير كشف عنها لكاردان الذى وعد ألا يفشى السر .

وبعد بضع سنوات نشر كاردان طريقة تارتاجليا للحل فى كتاب اسمه Ars Magna نشر فى نورمبرج عام ١٥٤٥ ، ولشد ما كان ذلك مدهشا لتارتاجليا وغير سار له ، ولقد نتج عن ذلك خلاف مرير طويل ، وبالرغم من أن كاردان قد نسب لتارتاجليا الفضل فى الدور الذى لعبه ، فإنه مما لا شك فيه أن كاردان قد أخلف عامدا وعده ، وعلى كل فليس هذا هو العراك الحاد غير المشرف الأخير بين الرياضيين الذى يقابلنا .

لقد عالج كتاب Ars Magna باستفاضة — إلى جانب حل المعادلات المكعبة — الموضوعات الجبرية التى كانت معروفة فى عصر كاردان ، وكان أول كتاب يعترف بما نسميه الآن جذوراً سالبة للمعادلة ، وأول كتاب يعالج فى وضوح الأعداد السالبة ، وبالرغم من أن الكتاب لم يكتب بالرموز الجبرية الحديثة فإنه يعد بداية لمرحلة جديدة فى الرياضيات .

واليوم لا يذكر كاردان إلا متصلا بالطريقة التى وضعها تارتاجليا لحل المعادلات المكعبة ، إلا أن الشهرة التى اكتسبها فى عصره ترجع إلى كتاب ألفه فى التنجيم ، ولقد كان الناس فى العصور الوسطى يعتبرون التنجيم علما لاشك فيه ، لدرجة أن كثيرا من الجامعات الأوروبية كانت لاتدرس الرياضيات إلا مرتبطة بهذا العلم ، أما فى اكسفورد فقد كان المنهج يشمل الفلك وليس التنجيم ، إلى جانب الكتابين الأولين لإقليدس ، ونرى أن كثيرين من

الرياضيين البارزين حتى القرن الثامن عشر ، كانوا يعتبرون التنجيم علما يستحق الدراسة العميقة ، ولم يقض عليه فى انجلترا إلا عام ١٧٠٨ برواية ساخرة كتبها سويفت Swift بعنوان « تنبؤات عام ١٧٠٨ لاسحق بيكرستاف » . أما فى عهد كاردان فقد كان ينظر للتنجيم باحترام وتقدير ، ولقد ظهر خلق كاردان فى أنه غير تاريخ ميلاد لوثر ، فقد كان يكرهه ، حتى يستطيع أن يجد له طالعا سيئا .

ولقد كتب كاردان كذلك كتابين فى العلوم الطبيعية اتسع انتشارها فى عصره ، وإن تكن آراؤه حينذاك تبدو اليوم غريبة إلا أنه على كل حال قد اعترف بوجود قانون طبيعى خلف الطبيعة .

ومما لاشك فيه أن الشهرة التى اكتسبها كاردان من كتاباته — وليست تلك التى اكتسبها من عمله الطبى — هى التى جذبت إليه أنظار كثير من الشخصيات البارزة . من هؤلاء رئيس أساقفة سانت اندروز فى اسكتلندا الذى كان يعانى مرضا يهد قواه ، فاستدعى كاردان على أساس ادعاء سابق له أنه يستطيع علاج هذا المرض ، إلا أنه لحسن حظ رئيس الأساقفة ، واستمرارا لشهرة كاردان ، تبين أنه غير مصاب بهذا المرض ، وفى طريق عودته من اسكتلاندا استقبله فى لندن الملك الشاب ادوارد السادس فزور له طالعاً ، تنبأ له فيه بالسعادة وبمستقبل مشرق ، إلا أن هذه التنبؤات لم يكتب لها التحقيق، فقد مات الملك بعد عام واحد .

بعد هذه المرحلة السارة التى استطاع فيها كاردان أن يشفى رئيس الأساقفة من مرض لم يكن يشكو منه ، وبعد أن ظهرت مهارته فى قراءة النجوم ، توقف نجمه عن اللمعان ، وأصبحت البقية الباقية من حياته سلسلة من الكوارث ، فقد

نزل أبناؤه باسمه إلى الحضيض ، فأعدم أحدهم فى جريمة قتل ، واستسلم هو للقمار واختل عقله ، وفقد مركزه كأستاذ ، وبعد أن عاش سنوات كثيرة على معاش ضئيل منحه إياه البابا لسبب لا يعلمه أحد ، مات عام ١٥٧٦ وترك وراءه أكداساً من المخطوطات لم يقدر سوى لخمسها أن يطبع ، ولا يرجع اهتمامنا بكاردان إلى ما توصل إليه كرياضى ، بل إلى الطريقة التى مهد بها الطريق لاكتشافات طغت على أعماله هو .

والواقع أن الميول المتشعبة التى كانت لكاردان — ولنهمل الميول التى لا تشرف — هى نموذج لما كان عليه كثيرون من الرياضيين العظام الذين نلقاهم فى الفصول التالية ، فحتى بداية القرن التاسع عشر — إن لم يكن بعد ذلك — كان من الممكن للشخص الواحد أن يبرز ويبتكر فى الرياضيات وفى العلوم ، بل إن بعض هؤلاء كانوا يبرزون أيضا فى الفلسفة واللاهوت ، أما اليوم فقد اتسع المجال وازدادت الفروع العليا من الرياضيات تخصصا لدرجة لم يعد يستطيع الفرد أن يكون خبيرا خارج مجال تخصصه ، ولم يعد يستطيع أن يعرف « قليلا من كل شىء أو كل شىء عن شىء معين » فى مجال الرياضيات والعلوم .

ها نحن أولاء ، قد بلغنا المرحلة الثالثة والأخيرة فى حديثنا عن تطور الجبر ، تلك هى نشأة الرمزية فيه ، ويبقى هنا أن ندقق البصر فى الثمار الأولى ليقظة الفكر كما ظهرت فى أعمال كبار الرياضيين ، ولسنا فى حاجة أن نذكر أسماءهم جميعا ، فلم تكن أعمالهم الفردية بالغة العظمة ، إلا أن مجموع ما أسهموا به قد قدم لنا الرمزية فى الجبر ، وهى التى أحدثت ثورة فى كثير من فروع الرياضيات .

وبدلا من أن نضع قائمة بالرموز والمفاهيم الرياضية الحديثة ثم نعالج كلا منها

على حدة ، فإننا سنختار عدداً من المعادلات كما وردت مكتوبة فى كتب القرنين السادس عشر والسابع عشر ، ثم نناقش الرموز كما وردت ، وقد أخذنا هذه الأمثلة من قائمة طويلة وردت فى الصفحات ٤٢٧ — ٤٣١ من الجزء الثانى من كتاب « تاريخ الرياضيات » تأليف الدكتور سميث Dr. D.E. Smith ويستطيع القارىء — إذا أراد الحصول على تفاصيل أكثر عن المؤلف وعنوان الكتاب .. الخ — أن يرجع إليه .

أولا ، لنتأمل العبارة الغامضة الآتية ، وليست هى إلا معادلة كتبت عام

1◊P6ρP9[1◊P3ρP24

شكل (٣٤)

١٥٥٩ ، ثم نحاول فك طلاسمها . أولا تأمل الحرف اليونانى ρ (رو) . إنه رمز للكمية المجهولة ، يناظر الرمز ς الذى استخدمه ديوفانتوس ، كما يناظر رمزنا الحديث « س » .

تأمل الرمز ◊ ، إنه يناظر الرمز Δ^Y الذى استخدمه ديوفانتوس ويناظر رمزنا الحديث « س² » الذى يدل على القوة الثانية للكمية المجهولة .

أما الرمز الذى يشبه القوس المربع [فيعتقد أنه من وضع الكاتب للدلالة على علامة « يساوى » عندنا .

ويستطيع القارىء أن يخمن معنى الحرف P الذى يرد أربع مرات ، فهو الحرف الأول من الكلمة اللاتينية Plus ويناظر الرمز + عندنا ، للدلالة على عملية الجمع .

وعلى ذلك فبدلا من هذه العبارة الغامضة فى شكل ٣٤ يمكن أن نكتب

١ س^٣ + ٦ س + ٩ = ١ س^٢ + ٣ س + ١٤ ، أو س^٣ + ٦ س + ٩ = س٢ + ٣ س + ١٤ نظرا لأن س^٢ تدل على ١ س^٢ .

ومثالنا التالى مأخوذ من كتاب إيطالى كتب فى عام ١٥٧٢ :

1 ⑥ p. 8 ③ eguale à 20

شكل (٣٥)

هنا لا نجد علامة للتساوى ، بل نجد eguale á مكتوبة بالكامل . وهذا خطوة كبيرة نحو الرمزية الحديثة التى نعرفها ، بل إن هذا المؤلف يكاد يكون قد وضع طريقتنا فى كتابة نفس الرمز بأسس مختلفة للدلالة على قوى الكمية المجهولة ، بدلا من استخدام رموز مختلفة للقوى المختلفة ، كما رأيناه فى كتابات ديوفانتوس وحتى عام ١٥٥٩ (انظر شكل ٣٤) . فى شكل ٣٥ تدل ⑥ على س^٦ عندنا وتدل ③ على س^٣ ، كما أن هذا الكاتب يستخدم ① للدلالة على الكمية المجهولة س (إذا أردنا أن نكتب س بأس فإنها تكتب س^١) ، ② للدلالة على س^٢ وهكذا .

أى إن شكل ٣٥ يدل على المعادلة س^٦ + ٨ س^٣ = ٢٠ .

ولنأخذ الآن مثالا ثالثا كتبه رياضى فرنسى عام ١٦٢٩ .

$$1\ (4) + 35\ (2) + 24 = 10\ (3) + 50\ (1)$$

لابد أنك ستلاحظ مباشرة أن المعادلة تحتوى على رمزنا الحديث + للدلالة على الجمع . ولقد كان الكتاب فى العصور الوسطى يستعملون أحيانا الكلمة اللاتينية et للدلالة على جمع عدد على عدد آخر كما فى « 5 et 8 » وأحيانا

أخرى كانوا يستعملون الرمز & ، وهذا الرمز إذا كتب بسرعة يصبح + وهو ما نكتبه الآن + . وعلى كل حال لم يكن أصل علامة + رياضيا ، بل إن التجار استخدموها حتى القرن الخامس عشر قبل أن يبدأ استعمالها فى الرياضيات، فكانت تستخدم فى المخازن للدلالة على زيادة ، فإذا زاد وزن بالة من البضاعة ٢ (أرطال أو غيرهـــا) فى حين ينبغى أن يكون ١٥ كتبت العلامة « ١٥ + ٢ » .

كذلك يلاحظ أن هذه المعادلة تحتوى على علامة التساوى = ، ونستطيع أن نحدد التاريخ المضبوط الذى بدأ فيه استعمال هذه العلامة . فى كتاب عنوانه Whetstone of Witte ، وهو أول كتاب فى الجبر كتب باللغة الانجليزية (١٥٥٧) يشرح مؤلفه روبرت ريكورد Robert Recorde أنه وضع الرمز = « للدلالة على أن صنفين متساويان » . ولقد تلقى ريكورد هذا تعليمه فى اكسفورد وكامبريدج وحصل على درجة فى الطب من كامبريدج عام ١٥٤٥ ، ثم أصبح طبيبا الملك ادوارد الرابع والملكة مارى ، كما أنه شغل منصبا حكوميا فى ايرلندا ، وقد كانت خاتمة الكتاب الحوار المؤثر التالى :

السيد : ماذا يعنى هذا الطرق العجل على الباب ؟

الخادم : إنه رسول .

السيد : ما هى الرسالة ؟ أخبرنى فى أذنى . أهذا هو الأمر ! أليس هناك علاج سوى أن أهمل الدرس والتعليم حتى أتحاشى هذه الأخطار ، لقد كان حظى غير سعيد ، إذ لم أترك لأرتاح لمدة أطول .

ولقد أخـــذ ريكورد إلى السجن حيث مات ، ويقول بعضهم إنه

سجن لدين عليه . ويقول آخرون لشكوى خلقية ضده خلال إقامته في إيرلندا .

ولنعد إلى المعادلة التي كتبت عام ١٦٢٩ . تمثل الأعداد بين الأقواس الأسس التي تدل على القوى المختلفة لكمية المجهول ، وفي بعض الأحيان تستعمل الدوائر بدلا من الأقواس ، وعلى ذلك فإن المعادلة هي :

$$س^{٤} + ٣٥ س^{٢} + ٢٤ = ١٠ س^{٣} + ٥٠ س$$

والآن لنتأمل معادلة وضعها الرياضي الفرنسي العظيم ديكارت عام ١٦٣٧ ، فهي تنطوي على عدد من النقاط الهامة :

$$yy \propto cy - \frac{cx}{b} y + ay - ac$$

لقد استعمل ديكارت دائماً الرمز $\propto$ للدلالة على التساوي ، إذ أن علامة = التي استعملها ريكورد لم يعم انتشارها في القرن السابع عشر ، بل إن الرمز الذي استخدمه ديكارت هو الرمز الذي كان شائعاً في عصره .

والنقطة التالية التي نلاحظها هي استخدام إشارة للدلالة على (ناقص) ، ولا يعرف حتى الآن أصل الإشارة - إلا أن التجار كانوا يستخدمونها للدلالة على (نقص) قبل أن يستخدمها الرياضيون بوقت طويل ، فإن (٨ — ٣) مكتوبة على بالة تدل على نقص ٣ (ياردات أو غيرها) ، ولم يكن من الممكن بالطبع لأي تاجر أن يمر بالتعبير « ٣ — ٨ » إذ أن هذا كان يعني أن ما تحتويه البالة يقل ٨ ياردات عن الطول المضبوط ٣ ، وليس لهذا أي معنى إلا أن الرياضيين منذ أبعد العصور التقوا بمثل هذه العبارات في أثناء حلهم لمسائل المعادلات ، وظلوا قروناً طويلة يجهلون معناها ، ونظراً لتعاملهم بالأعداد

الطبيعية ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ... فقط فقد عجزوا عن تفسير هذه العبارة ، لذلك فإن ديوفانتوس في كتابه Arithmetica أهمل المعادلة ٤ س + ٢٠ = ٤ (بالرموز الحديثة) معتبراً أنها «سخيفة» إذ لم يكن هناك عدد على السلم العددي الذي عرفه ديوفانتوس يصبح قيمة للمجهول س ، وقبل أن يصبح للعبارة : (٣—٨) أي معنى ، كان لا بد لمفهوم رياضي آخر أن ينشأ ، ذلك هو فكرة الإتجاه على السلم العددي ، ومن المألوف في الرياضيات أن يعتبر الرياضيون في عصر من العصور إحدى الأفكار الرياضية سخيفة لأنهم لا يجدون لها معنى ، ولا تلبث بعد ذلك أن تصبح الفكرة نفسها واضحة تمام الوضوح في عصر تال . وكل ما حدث هو أن شخصا قد فكر في الأمر باتجاه جديد ، أو أنشأ أداة رياضية جعلت الفكرة واضحة تماما ، ولعل أحفادنا يضحكون عندما يقرأون فيما بعد أن عدداً قليلا جداً استطاع أن يفهم نظرية أينشتين في النسبية عام ١٩٤٨ وسنرى أن ديكارت بجلال قدره قد أطلق على بعض الأعداد « تخيلية » في حين نعرف نحن الآن أنها ليست تخيلية إطلاقا .

ولنعد إلى معادلة ديكارت :

$$yy \propto cy - \frac{cx}{b} y + ay - ac$$

نرى أنه استعمل أكثر من حرف ، والواقع أنه إذا استخدم الأحرف الخمسة a, x, b, c, y ، كل منها رمزاً لعدد ، ولقد كان فيتا Vieta أول من استخدم هذه الصورة من التعبير الرمزي عام ١٥٩٠ . كان أمرا عاديا أن يستخدم رمزاً وأكثر من الحروف الهجائية الأخيرة للدلالة على المجهول ، والحروف الأخرى للدلالة على الأعداد المعلومة ، فمثلا الصورة م = ص٢ نمط من أنماط المعادلات ، يمكن فيه إيجاد قيمة المجهول م إذا علمت القيمة العددية للحرف ص

وقد رأينا فى صفحة ٧٩ كيف استطعنا عن طريق هذه المعادلة إيجاد مجموع أية سلسلة من الأعداد الفردية التى تبدأ بالواحد الصحيح ، فهنا يدل المجهول على المجموع المطلوب ، أما الرمز ن^2 فإنه يدلنا على أنه لإيجاد م تضرب عدد حدود المتوالية (ن) فى نفسه ، وللرمز هنا قيمة (مرنة) إذ أنه يمكن أن يدل على أى عدد ، صغيراً كان أم كبيراً ، وهكذا عن طريق التعبير الرمزى أمدنا الجبر بعدد لا يحصى من (الأدوات) الرياضية مثل هذه الصورة م = ن^2 ، ولقد سبق أن رأينا أن هذه الأدوات تقود عقولنا فى حلنا لمسائل كان حلها دون ذلك معقداً ومجهداً أو فى بعض الأحيان مستحيلا .

ومن الملاحظ أن ديكارت لم يستعمل الأس ٢ للدلالة على (ص مضروبة فى ص) أى على القوة الثانية للرمز ص بل كتب ص مرتين متتابعتين ، وهذا من الأمثلة الأولى للأسلوب الحديث فى التعبير عن رمزين مضروبين فى بعضهما فهما هنا يكتبان معاً دون أن تفصلهما إشارة + أو — ، وهكذا يكتب ا مضروبا فى ب فى الصورة ا ب ، وينبغى أن نلاحظ أن هذه الطريقة تختلف تماماً عنها فى الحساب ، إذ أن حـء تعنى حـ مضروبة فى ء . أما ٥٦ فلا تعنى ٦ مضروبة فى ٥ ، بل تعنى — طبقا لنظام الرموز العددية الهندسية العربية — ٥ عشرات مجموعة على ٦ وحدات كذلك ، فى حين أن ٣$\frac{1}{2}$ تعنى ٣ + $\frac{1}{2}$.

ولقد ظلت طريقة ديكارت فى التعبير عن ص مضروبة فى ص بالصورة ص ص متبعة حتى قرنين مضيا فقط ، وكانت س^2 تكتب فى الكليات الأمريكية فى الصورة س س كما كانت س^3 تكتب س س س .

والآن دعنا ننظر كيف تغلب الرياضيون على الصعوبة التى جعلت

ديوفانتوس يعلن أن المعادلة ٤ س + ٢٠ = ٤ سخيفة ، وسنرى أن الصعوبة ليست فى المعادلة ، بل فى عدم إمكان السلم العددى التعامل بأعداد غير تلك التى تبدأ بالصفر وتصعد إلى ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، . . . . إلى مالا نهاية . بعد أن اعتبرت المعادلات الشبيهة بتلك التى ذكرناها سخيفة آلافاً من السنين ظهر للرياضيين أن المشكلة ليست مشكلة مقدار ، بل مشكلة ترتيب ، ويستطيع القارىء غير الرياضى بمثال بسيط أن يدرك فكرة المفهوم الجديد الذى أدخل على السلم العددى العادى ، وعن طريق هذا المفهوم الجديد ربطت فكرتا « الاتجاه » و « الوضع النسبى » بالسلم العددى ، وبذلك امتد السلم ، فأصبح ولا بداية أو نهاية له .

تصور أننا بين جمهرة من الناس نرقب حريقا فى فندق كبير ، وأننا نسمع صرخة أنين ثم يندفع شخص من شباك فى الدور السادس إلى سلم النجاة ، يصعد ١٨ درجة ، ثم يحملق فى الشباك فلا يرى شيئا ، فينزل ٥ خطوات ويحملق فى شباك آخر ، لنتركه هنا فلسنا نهتم — كرياضيين — إلا بالعمليات الرياضية .

حتى الطفل الصغير يعلم أن موقع هذا الشخص الآن ١٣ خطوة فوق النقطة التى بدأ منها . كيف يعرف الطفل هذا ؟ عن طريق العملية الصحيحة ١٨ — ٥ = ١٣ ، وسيقول كما قال ديوفانتوس إن إشارة الناقص هنا تدل على أن ٥ تطرح من ١٨ .

إلا أن هناك تفسيراً آخر يختلف تمام الاختلاف ، إذ أن ما عرفناه من الحقائق يوضح أنه فى العبارة ١٨ — ٥ = ١٣ يدل العدد ١٨ فى هذه المسألة بالذات على حركة إلى أعلى ، كما يدل العدد —٥ على حركة إلى أسفل . وبذلك

ديوفانتوس يعلن أن المعادلة ٤ س + ٢٠ = ٤ سخيفة ، وسنرى أن الصعوبة ليست فى المعادلة ، بل فى عدم إمكان السلم العددى التعامل بأعداد غير تلك التى تبدأ بالصفر وتصعد إلى ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، . . . إلى مالا نهاية . بعد أن اعتبرت المعادلات الشبيهة بتلك التى ذكرناها سخيفة آلافاً من السنين ظهر للرياضيين أن المشكلة ليست مشكلة مقدار ، بل مشكلة ترتيب ، ويستطيع القارىء غير الرياضى بمثال بسيط أن يدرك فكرة المفهوم الجديد الذى أدخل على السلم العددى العادى ، وعن طريق هذا المفهوم الجديد ربطت فكرتا « الاتجاه » و « الوضع النسبى » بالسلم العددى ، وبذلك امتد السلم ، فأصبح ولا بداية أو نهاية له .

تصور أننا بين جمهرة من الناس نرقب حريقاً فى فندق كبير ، وأننا نسمع صرخة أنين ثم يندفع شخص من شباك فى الدور السادس إلى سلم النجاة ، يصعد ١٨ درجة ، ثم يحملق فى الشباك فلا يرى شيئاً ، فينزل ٥ خطوات ويحملق فى شباك آخر ، لنتركه هنا فلسنا نهتم — كرياضيين — إلا بالعمليات الرياضية .

حتى الطفل الصغير يعلم أن موقع هذا الشخص الآن ١٣ خطوة فوق النقطة التى بدأ منها . كيف يعرف الطفل هـــذا ؟ عن طريق العملية الصحيحة ١٨ — ٥ = ١٣ ، وسيقول كما قال ديوفانتوس إن إشارة الناقص هنا تدل على أن ٥ تطرح من ١٨ .

إلا أن هناك تفسيراً آخر يختلف تمام الاختلاف ، إذ أن ما عرفناه من الحقائق يوضح أنه فى العبارة ١٨ — ٥ = ١٣ يدل العدد ١٨ فى هذه المسألة الذات على حركة إلى أعلى ، كما يدل العدد —٥ على حركة إلى أسفل . وبذلك

يمكن اعتبار إشارة الناقص دليلا على أن العدد التالى لهـا ينبغى أن يقاس فى اتجاه مضاد لذلك الذى يدل عايه العدد ١٨ .

كيف تـكون الحال لو أن الشخص الباحث عن النجاة قد صعد ٥ درجات إلى أعلى ثم ١٨ درجة إلى أسفل ؟ فى هـــذه الحالة تمثل حركاته عن طريق ٥ — ١٨ ، وبذلك نحصل على مسألة من النوع الذى حير الرياضيين القدامى، فإذا دلت إشارة الناقص على طرح فقط ، فإننا سنظل مثلهم فى حيرة ، ولـكن نظراً لأننا قد اتفقنا على أن إشارة الناقص تدل أيضا على تغير فى الاتجاه فإن العبارة تـكون ذات معنى ، إذ أنها تدل على أن الرجل قد صعد ٥ درجات ثم تحرك ١٨ درجة فى الاتجاه المضاد . والآن هل للعبارة « ٥ — ١٨ » أى جواب ؟

دع الشخص يخط خطواته ال ١٨ إلى أسفل فى مرحلتين أولاهما ٥ خطوات إلى أسفل ، والثانية الـ ١٣ خطوات الباقية إلى أسفل أيضاً ، ونستطيع الآن أن نقول إن عدد الدرجات من النقطة التى بدأ منها إلى تلك التى أنهى عندها حركاته الثلاث يمـكن التعبير عنه فى الصورة ٥ — ٥ — ١٣ ، ومن الواضح أن الحركتين الأوليين تعيده إلى النقطة التى بدأ منها ، وعلى ذلك يمـكن إهمال الجزء (٥ — ٥) من الحركة ، ويكون الجواب — ١٣ أى إن ٥ — ١٨ = — ١٣ ، لـكن ما معنى — ١٣ هذه ؟ . من الواضح أنها تدل على عدد الدرجات — تحت نقطة البداية — التى انتهى إليها ، وعلى ذلك فإذا اتفقنا عند حساب المسافات إلى أعلى وإلى أسفل على سلم أو أى طريق مدرج على أن تدل علامة الناقص على حركة إلى أسفل أو على موضع تحت نقطة الابتداء.

فإن التعبير ٥ — ١٨ = — ١٣ يدل على معنى لم يـكن يدل عليه بالسلم العددى الحسابى .

والآن لنأخذ حالة أخرى : إذا افترضنا أن الرجل صعد ٤ درجات ، ثم صعد ٧ درجات أخرى فإننا نستطيع أن نحسب موضعه الأخير بالنسبة إلى نقطة الابتداء هكذا: ٤ + ٧ = ١١ ، ماذا تعنى إشارة + هنا ؟ إنها عند ديوفانتوس تعنى إضافة ، أما نحن فإننا نوافق على ذلك ونضيف أنه يمكن أن تدل على حركة إلى أعـلى ، وعلى ذلك فإذا اتفقنا على أن إشارة الناقص تدل على حركة إلى أسفل أو على موضع تحت نقطة بداية معينة فإن إشارة الزائد تدل على حركة إلى أعلى، أو على موضع أعلى من نقطة البداية ، فإذا اعتبرنا نقطة البداية صفراً فإن الدرجات التى تعلوها تـكون + ١ ، + ٢ ، + ٣ ، + ٤ ، . . . وتـكون الدرجات التى تقع تحتها — ١ ، — ٢ ، — ٣ ، — ٤ ، . . . تسمى الأعداد المرقمة كذلك أعداداً ذات اتجاه أو أعداداً ذات إشارة ، ويسمى العدد الذى إشارته + عددا موجبا ، والذى إشارته — عدداً سالباً . ولقد كان كاردان — كما رأينا فيما سبق — أول رياضى يعالج معنى الأعداد السالبة .

لنعد الآن الى المعادلة ٤س + ٢٠ = ٤ التى اعتبرها ديوفانتوس سخيفة . إذا استعملنا المفهوم الجديد فمن الواضح أن س تمثل عدداً سالباً هو — ٤ ، والمسألة التى يمكن أن تؤدى الى هذه المعادلة هى : « ما هى الحركة التى يقوم بها رجل يقف على سلم ، إذا كانت أربعة أمثال الحركة مع عشرين درجة إلى أعلى تصل بالرجل إلى ٤ درجات فوق النقطة التى بدأ منها ؟ » .

نظراً لأن الجواب هو : « ٤ درجات الى أسفل » فإن المعادلة معنى سليماً.

يمكن اعتبار إشارة الناقص دليلا على أن العدد التالى لهـا ينبغى أن يقاس فى اتجاه مضاد لذلك الذى يدل عليه العدد ١٨ .

كيف تـكون الحال لو أن الشخص الباحث عن النجاة قد صعد ٥ درجات إلى أعلى ثم ١٨ درجة إلى أسفل ؟ فى هـــذه الحالة تمثل حركاته عن طريق ٥ — ١٨ ، وبذلك نحصل على مسألة من النوع الذى حير الرياضيين القدامى، فإذا دلت إشارة الناقص على طرح فقط ، فإننا سنظل متاهم فى حيرة ، ولـكن نظراً لأننا قد اتفقنا على أن إشارة الناقص تدل أيضا على تغير فى الاتجاه فإن العبارة تـكون ذات معنى ، إذ أنها تدل على أن الرجل قد صعد ٥ درجات ثم تحرك ١٨ درجة فى الاتجاه المضاد . والآن هل للعبارة « ٥ — ١٨ » أى جواب ؟

دع الشخص يخط خطواته ال ١٨ إلى أسفل فى مرحلتين أولاهما ٥ خطوات إلى أسفل ، والثانية الـ ١٣ خطوات الباقية إلى أسفل أيضاً ، ونستطيع الآن أن نقول إن عدد الدرجات من النقطة التى بدأ منها إلى تلك التى انتهى عندها حركاته الثلاث يمـكن التعبير عنه فى الصورة ٥ — ٥ — ١٣ ، ومن الواضح أن الحركتين الأوليين تعيده إلى النقطة التى بدأ منها ، وعلى ذلك يمـكن إهمال الجزء (٥ — ٥) من الحركة ، ويـكون الجواب — ١٣ أى إن ٥ — ١٨ = — ١٣ ، لـكن ما معنى — ١٣ هذه ؟ . من الواضح أنها تدل على عدد الدرجات — تحت نقطة البداية — التى انتهى إليها ، وعلى ذلك فإذا اتفقنا عند حساب المسافات إلى أعلى وإلى أسفل على سلم أو أى طريق مدرج على أن تدل علامة الناقص على حركة إلى أسفل أو على موضع تحت نقطة الابتداء،

فإن التعبير ٥ — ١٨ = — ١٣ يدل على معنى لم يـكن يدل عليه بالسلم العددى الحسابى .

والآن لنأخذ حالة أخرى : إذا افترضنا أن الرجل صعد ٤ درجات ، ثم صعد ٧ درجات أخرى فإننا نستطيع أن نحسب موضعه الأخير بالنسبة إلى نقطة الابتداء هكذا: ٤ + ٧ = ١١ ، ماذا تعنى إشارة + هنا ؟ إنها عند ديوفانتوس تعنى إضافة ، أما نحن فإننا نوافق على ذلك ونضيف أنه يمكن أن تدل على حركة إلى أعلى ، وعلى ذلك فإذا اتفقنا على أن إشارة الناقص تدل على حركة إلى أسفل أو على موضع تحت نقطة بداية معينة فإن إشارة الزائد تدل على حركة إلى أعلى، أو على موضع أعلى من نقطة البداية ، فإذا اعتبرنا نقطة البداية صفراً فإن الدرجات التى تعلوها تـكون + ١ ، + ٢ ، + ٣ ، + ٤ ، . . . وتـكون الدرجات التى تقع تحتها — ١ ، — ٢ ، — ٣ ، — ٤ ، . . . تسمى الأعداد المرقمة كذلك أعداداً ذات اتجاه أو أعداداً ذات إشارة ، ويسمى العدد الذى إشارته + عددا موجبا ، والذى إشارته — عدداً سالباً . ولقد كان كاردان — كما رأينا فيما سبق — أول رياضى يعالج معنى الأعداد السالبة .

لنعد الآن الى المعادلة ٤س + ٢٠ = ٤ التى اعتبرها ديوفانتوس سخيفة . إذا استعملنا المفهوم الجديد فمن الواضح أن س تمثل عدداً سالباً هو — ٤ ، والمسألة التى يمكن أن تؤدى الى هذه المعادلة هى : « ما هى الحركة التى يقوم بها رجل يقف على سلم ، إذا كانت أربعة أمثال الحركة مع عشرين درجة إلى أعلى تصل بالرجل إلى ٤ درجات فوق النقطة التى بدأ منها ؟ » .

نظراً لأن الجواب هو : « ٤ درجات الى أسفل » فإن المعادلة معنى سليماً.

تستعمل هذه الأعداد ذات الاتجاه أو ذات الإشارة ، حينما تحدث حركتان فى اتجاهين متضادين ، وعلى ذلك فإن الحركات التى إلى اليمين على سلم أفقى أو المواضع التى تقع إلى اليمين من نقطة معينة تدل عليها أعداد موجبة ، فى حين أن الحركات التى إلى اليسار أو المواضع التى تقع إلى اليسار من النقطة المعينة تدل عليها أعداد سالبة .

كذلك إذا دار مستقيم حول نقطة ثابتة مع عقرب الساعة (عقرب الدقائق فى الساعة مثلا) تعتبر الزاوية التى دارها المستقيم سالبة ، وإذا دار المستقيم فى اتجاه ضد عقرب الساعة اعتبرت الزاوية موجبة . وواضح أن مفهوم الموجب والسالب يقوم على فكرة الحركات إلى الأمام وإلى الخلف أو المواضع التى تنتج عن هذه الحركات ، لذلك فقد فتح مفهوم الأعداد ذات الإشارة مجالا جديداً واسعا للبحث فى الرياضيات ، مجالا كان مغلقا على الرياضيين الذين لم يكن لديهم هذا المفهوم ، ومن الصعب تحديد تاريخ نشأة المفهوم الحديث للأعداد ذات الإشارة . لقد ذكرنا أن كاردان فى القرن السادس عشر استعمل الأعداد السالبة ، وسنرى من عبارة كتبها نابيير Napier (الفصل الخامس) أنه فى عام ١٦١٤ كانت الأعداد السالبة تعتبر « أقل من الصفر » كما أننا سنرى أن نابيير بالتأكيد قد ربط هذه الأعداد بنقطة تتحرك فى اتجاه ضد ذلك التى تعين به الأعداد الموجبة ، ومن الممكن جداً أن يكون هذا التطبيق الذى أجراه نابيير ، والذى ظهر فى كتاب قرأه كل رياضى عظيم فى أوروبا ، هو الذى أدى إلى مفهومنا الحالى عن الأعداد « ذات الاتجاه » .

ولا يمكن لقصة نشأة الرموز الجبرية أن تتم دون الإشارة الى فرنسى بارز

هو فرانسوا ڤيتا Francois Vieta . لقد ولد عام ١٥٤٠ فى المقاطعة الفرنسية بواتو Poitou ، ولقد كان ثريا وتقلد مناصب مختلفة زمنا طويلا ، ولكنه أنفق وقت فراغه — شأنه فى ذلك شأن طاليس — فى الرياضيات ، ولقد كان ڤيتا كريما شفوقاً ، يدل على ذلك أنه استضاف عالما يخالفه فى الرأى أسابيع عدة ، بل إنه دفع النفقات التى تكلفتها أسفار ضيفه ، ويؤكد كرمه وعدم أنانيته أنه كان يرسل نسخا مما يكتبه فى الرياضيات للمهتمين بها فى جميع أنحاء أوروبا ، ونظراً لغناه فقد كان يطبع ما يكتبه على نفقته الخاصة ، الأمر الذى لم يكن يستطيعه أغلب الرياضيين فى عصره .

لم تتضمن العينات التى أشرنا اليها فى الصفحات السابقة استخدام ڤيتا للرموز الجبرية مع أهميته البالغة ، وذلك نظراً لأن الرياضيين فى عصره لم يوافقوا عليها ، وعلى كل لقد رأينا كيف استخدم ديكارت (١٥٩٦ — ١٦٥٠) الحروف الهجائية كرموز ، ويرجع الفضل فى هذا المفهوم إلى ڤيتا الذى كان يستخدم عام ١٥٩٠ الحروف رموزاً للكميات الثابتة والمجهول فى المعادلة ، إلا أن ڤيتا استعمل قاعدة جامدة هى أنه كان يستخدم الحروف المتحركة a،e،i،o،u (مع y) للدلالة على الكميات المجهولة ، ويستخدم الحروف الساكنة للدلالة على الكميات الثابتة . ومع أن الرياضيين قد أهملوا هذه القاعدة الجامدة إلا أن ڤيتا هو المسئول عن الاستخدام الحديث للحروف للدلالة على الأعداد . يعترف بهذا الرياضى الإنجليزى المشهور جون واليس John Wallis (١٦١٦ — ١٧٠٣) الذى كان أستاذاً للهندسة فى اكسفورد ، والذى كان لعمله أثر كبير فى نيوتن العظيم . فى تتبع تطور الجبر يقول واليس إن أوترد Oughtred الرياضى الانجليزى (حوالى ١٦٣٠) الذى « كان يعرض المادة التى يدرسها فى صورة

تستعمل هذه الأعداد ذات الاتجاه أو ذات الإشارة ، حينما تحدث حركتان في اتجاهين متضادين ، وعلى ذلك فإن الحركات التي إلى اليمين على سلم أفقي أو المواضع التي تقع إلى اليمين من نقطة معينة تدل عليها أعداد موجبة ، في حين أن الحركات التي إلى اليسار أو المواضع التي تقع إلى اليسار من النقطة المعينة تدل عليها أعداد سالبة .

كذلك إذا دار مستقيم حول نقطة ثابتة مع عقرب الساعة (عقرب الدقائق في الساعة مثلا) تعتبر الزاوية التي دارها المستقيم سالبة ، وإذا دار المستقيم في اتجاه ضد عقرب الساعة اعتبرت الزاوية موجبة . واضح أن مفهوم الموجب والسالب يقوم على فكرة الحركات إلى الأمام وإلى الخلف أو المواضع التي تنتج عن هذه الحركات ، لذلك فقـــد فتح مفهوم الأعداد ذات الإشارة مجالا جديداً واسعا للبحث في الرياضيات ، مجالا كان مغلقا على الرياضيين الذين لم يكن لديهم هذا المفهوم ، ومن الصعب تحديد تاريخ نشأة المفهوم الحديث للأعداد ذات الإشارة . لقد ذكرنا أن كاردان في القرن السادس عشر استعمل الأعداد السالبة ، وسنرى من عبارة كتبها نابيير Napier (الفصل الخامس) أنه في عام ١٦١٤ كانت الأعداد السالبة تعتبر « أقل من الصفر » كما أننا سنرى أن نابيير بالتأكيد قد ربط هذه الأعداد بنقطة تتحرك في اتجاه ضد ذلك التي تعين به الأعداد الموجبة ، ومن الممكن جداً أن يكون هذا التطبيق الذي أجراه نابيير ، والذي ظهر في كتاب قرأه كل رياضي عظيم في أوروبا ، هو الذي أدى إلى مفهومنا الحالي عن الأعداد « ذات الاتجاه » .

ولا تمكن لقصة نشأة الرموز الجبرية أن تتم دون الإشارة الى فرنسي بارز

هو فرانسوا ڤيتا Francois Vieta . لقد ولد عام ١٥٤٠ فى المقاطعة الفرنسية بواتو Poitou ، ولقد كان ثريا وتقلدمناصب مختلفة زمنا طويلا ، ولكنه أنفق وقت فراغه — شأنه فى ذلك شأن طاليس — فى الرياضيات ، ولقد كان ڤيتا كريما شفوقاً ، يدل على ذلك أنه استضاف عالما يخالفه فى الرأى أسابيع عدة ، بل إنه دفع النفقات التى تكلفتها أسفار ضيفه ، ويؤكد كرمه وعدم أنانيته أنه كان يرسل نسخا مما يكتبه فى الرياضيات للمهتمين بها فى جميع أنحاء أوروبا ، ونظراً لغناه فقد كان يطبع ما يكتبه على نفقته الخاصة ، الأمر الذى لم يكن يستطيعه أغلب الرياضيين فى عصره .

لم تتضمن العينات التى أشرنا اليها فى الصفحات السابقة استخـــدام ڤيتا للرموز الجبرية مع أهميته البالغة ، وذلك نظراً لأن الرياضيين فى عصره لم يوافقوا عليها ، وعلى كل لقد رأينا كيف استخدم ديكارت (١٥٩٦ — ١٦٥٠) الحروف الهجائية كرموز ، ويرجع الفضل فى هذا المفهوم إلى ڤيتا الذى كان يستخدم عام ١٥٩٠ الحروف رموزاً للكميات الثابتة والمجهول فى المعادلة ، إلا أن ڤيتا استعمل قاعدة جامدة هى أنه كان يستخدم الحروف المتحركة a، o، i، o، u (مع y) للدلالة على الكميات المجهولة ، ويستخدم الحروف الساكنة للدلالة على الكميات الثابتة . ومع أن الرياضيين قد أهملوا هذه القاعدة الجامدة إلا أن ڤيتا هو المسئول عن الاستخدام الحديث للحروف للدلالة على الأعداد . يعترف بهذا الرياضى الإنجليزى المشهور جون واليس John Wallis (١٦١٦ — ١٧٠٣) الذى كان أستاذاً للهندسة فى اكسفورد ، والذى كان لعمله أثر كبير فى نيوتن العظيم . وفى تتبع تطور الجبر يقول واليس إن أوترد Oughtred الرياضى الإنجليزى (حوالى ١٦٣٠) الذى « كان يعرض المادة التى يدرسها فى صورة

هو فرانسوا ڤيتا Francois Vieta . لقد ولد عام ١٥٤٠ فى المقاطعة الفرنسية پواتو Poitou ، ولقد كان ثريا وتقلد مناصب مختلفة زمنا طويلا ، ولكنه أنفق وقت فراغه — شأنه فى ذلك شأن طاليس — فى الرياضيات ، ولقد كان ڤيتا كريما شفوقاً ، يدل على ذلك أنه استضاف عالما يخالفه فى الرأى أسابيع عدة ، بل إنه دفع النفقات التى تكلفتها أسفار ضيفه ، ويؤكد كرمه وعدم أنانيته أنه كان يرسل نسخا مما يكتبه فى الرياضيات للمهتمين بها فى جميع أنحاء أوروبا ، ونظراً لغناه فقد كان يطبع ما يكتبه على نفقته الخاصة ، الأمر الذى لم يكن يستطيعه أغلب الرياضيين فى عصره .

لم تتضمن العينات التى أشرنا اليها فى الصفحات السابقة استخـــدام ڤيتا للرموز الجبرية مع أهميته البالغة ، وذلك نظراً لأن الرياضيين فى عصره لم يوافقوا عليها ، وعلى كل لقد رأينا كيف استخدم ديكارت (١٥٩٦ — ١٦٥٠) الحروف الهجائية كرموز ، ويرجع الفضل فى هذا المفهوم إلى ڤيتا الذى كان يستخدم عام ١٥٩٠ الحروف رموزاً للكميات الثابتة وللمجهول فى المعادلة ، إلا أن ڤيتا استعمل قاعدة جامدة هى أنه كان يستخدم الحروف المتحركة a، e، i، o، u (مع y) للدلالة على الكميات المجهولة ، ويستخدم الحروف الساكنة للدلالة على الكميات الثابتة . ومع أن الرياضيين قد أهملوا هذه القاعدة الجامدة إلا أن ڤيتا هو المسئول عن الاستخدام الحديث للحروف للدلالة على الأعداد . يعترف بهذا الرياضى الإنجليزى المشهور جون واليس John Wallis (١٦١٦ — ١٧٠٣) الذى كان أستاذاً للهندسة فى اكسفورد ، والذى كان لعمله أثر كبير فى نيوتن العظيم . فى تتبع تطور الجبر يقول واليس إن أوترد Oughtred الرياضى الانجليزى (حوالى ١٦٣٠) الذى « كان يعرض المادة التى يدرسها فى صورة

غاية فى الاختصار ، ويحول كل شيء إلى صورة مختصرة » قد تابع التحسين الذى قام به ڤيتا . فما كان يكتبه ڤيتا فى الصورة

$$\frac{\text{A quadrate, into B cube}}{\text{CDE solid}} \text{ Equal to FG plane,}$$

أصبح أوترد يكتبه فى الصورة $\frac{AqBc}{CDE} = FG$. ولقد اختصر فى تعبيرنا الرمزى الحديث الرمزان الدالان على « مربع » و « مكعب » فأصبحت العبارة تكتب $\frac{A^2 B^3}{CDE} = FG$

وسنلتقى بڤيتا مرة أخرى عندما نعالج التطور الذى حدث فى حساب المثلثات فى النصف الثانى من القرن السادس عشر ، أما فى الجبر فلم يحسن التعبير الرمزى كما رأينا فحسب ، بل كتب أيضاً كتاباً هاماً فى الجبر عنوانه « مقدمة لفن التحليل (١) » ، وهو أول عمل فى الجبر استخدمت فيه الرموز ، كما كتب كتاباً آخر فى نظرية المعادلات لم ينشر إلا بعد وفاته ، ولقد كان ڤيتا أول من وضع قانوناً لمجموع ما نسميه الآن متوالية لانهائية مثل :

$$١ + \frac{١}{٤} + \left(\frac{١}{٤}\right)^{٢} + \left(\frac{١}{٤}\right)^{٣} + \dots + \left(\frac{١}{٤}\right)^{\text{ن}} + \dots$$

ولقد حل أرشميدس هذه المتوالية فى صورة هندسية . أما قانون ڤيتا فيمكن من إيجاد مجموع أى متوالية مثل هذه ، فاذا كان الحد الأول ا والأساس ر ، أى النسبة بين أى حد والحد الذى يسبقه ، فإنه (بالتعبير الرمزى الحديث) :

$$\text{ا} + \text{ار} + \text{ار}^{٢} + \text{ار}^{٣} + \dots \text{ار}^{\text{ن}} + \dots = \frac{\text{ا}}{١ - \text{ر}}$$

(١) عنوان الكتاب هو : In Artem Analyticam Isagoge

حيث ر كسر (أقل من ١) وبذلك يكون ڤيتا من أوائل الرياضيين الذين عرفوا أن بعض الصور الجبرية لها « نمط » خاص كما أن للأشكال الهندسية أنماطها الخاصة ، وقد أدى هذا إلى تطورات هامة فى القرن السابع عشر والقرون التالية له .

ولقد كان ڤيتا أول من أوضح أنه يمكن إيجاد قيمة ط بقانون بدلا من إيجادها من شكل هندسى معقد ، وكان هذا القانون :

$$\frac{٢}{\text{ط}} = \sqrt{\frac{١}{٢}} \sqrt{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\sqrt{\frac{١}{٢}}} \sqrt{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\sqrt{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\sqrt{\frac{١}{٢}}}}$$

ولقد مهد تطور الجبر الطريق لتطور التحليل وهو أهم عنصر أساسى فى الرياضيات الحديثة . من الصعب تعيين الحد الفاصل بين الحساب والجبر ، ولعل المثال البسيط التالى يكشف الفرق الأساسى بين المادتين : إن مساحة المستطيل الذى طوله ٤ بوصات وعرضه ٣ بوصات يمكن الحصول عليها عن طريق تقسيم هذا المستطيل إلى مربعات مساحة كل منها بوصة مربعة واحدة . ويحتوى المستطيل على ثلاثة صفوف منها فى كل صف أربعة مربعات ، والخطوة العقلية التالية هى ملاحظة أنه فى هذه المسألة بالذات يمكن الحصول على نفس الجواب بضرب ٤ فى ٣ وإهمال جميع الخطوات الوسطى ، ثم يجيء بعد ذلك التحول إلى الجبر ، فلا ينصب الانتباه على العددين ٤ ، ٣ بل على العملية الضرورية التى جاءت بعد ذلك ، تلك أنه إذا دلت م على مساحة المستطيل بالوحدات المربعة ، ل ، ع على طول وعرض المستطيل على الترتيب بالوحدات الطولية المناظرة فإن القانون م = ل ع يدل على مساحة أى مستطيل .

غاية فى الاختصار ، ويحول كل شيء إلى صورة مختصرة » قد تابع التحسين الذى قام به ڤيتا . فما كان يكتبه ڤيتا فى الصورة

$$\frac{A\ quadrate,\ into\ B\ cube}{CDE\ solid}\ Eqval\ to\ FG\ plane,$$

أصبح أوترد يكتبه فى الصورة $\frac{AqBc}{CDE} = FG$. ولقد اختصر فى تعبيرنا الرمزى الحديث الرمزان الدالان على « مربع » و « مكعب » فأصبحت العبارة تكتب $\frac{A^2 B^3}{CDE} = FG$

وسنلتقى بڤيتا مرة أخرى عندما نعالج التطور الذى حدث فى حساب المثلثات فى النصف الثانى من القرن السادس عشر ، أما فى الجبر فلم يحسن التعبير الرمزى كما رأينا فحسب ، بل كتب أيضاً كتاباً هاماً فى الجبر عنوانه « مقدمة لفن التحليل[١] » ، وهو أول عمل فى الجبر استخدمت فيه الرموز ، كما كتب كتاباً آخر فى نظرية المعادلات لم ينشر إلا بعد وفاته ، ولقد كان ڤيتا أول من وضع قانوناً لمجموع ما نسميه الآن متوالية لانهائية مثل :

$$١ + \frac{١}{٤} + \left(\frac{١}{٤}\right)^٢ + \left(\frac{١}{٤}\right)^٣ + \cdots + \left(\frac{١}{٤}\right)^ن + \cdots$$

ولقد حل أرشميدس هذه المتوالية فى صورة هندسية . أما قانون ڤيتا فيمكن من إيجاد مجموع أى متوالية مثل هذه ، فاذا كان الحد الأول ا والأساس ر ، أى النسبة بين أى حد والحد الذى يسبقه ، فإنه (بالتعبير الرمزى الحديث) :

$$ا + ار + ار^٢ + ار^٣ + \cdots + ار^ن + \cdots = \frac{ا}{١ - ر}$$

(١) عنوان الكتاب هو : In Artem Analyticam Isagoge

حيث ر كسر (أقل من ١) وبذلك يكون ڤيتا من أوائل الرياضيين الذين عرفوا أن بعض الصور الجبرية لها « نمط » خاص كما أن للأشكال الهندسية أنماطها الخاصة ، وقد أدى هذا إلى تطورات هامة فى القرن السابع عشر والقرون التالية له .

ولقد كان ڤيتا أول من أوضح أنه يمكن إيجاد قيمة ط بقانون بدلا من إيجادها من شكل هندسى معقد ، وكان هذا القانون :

$$\frac{٢}{\text{ط}} = \sqrt{\frac{١}{٢}} \sqrt{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\sqrt{\frac{١}{٢}}} \sqrt{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\sqrt{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\sqrt{\frac{١}{٢}}}}$$

ولقد مهد تطور الجبر الطريق لتطور التحليل وهو أهم عنصر أساسى فى الرياضيات الحديثة . من الصعب تعيين الحد الفاصل بين الحساب والجبر، ولعل المثال البسيط التالى يكشف الفرق الأساسى بين المادتين : إن مساحة المستطيل الذى طوله ٤ بوصات وعرضه ٣ بوصات يمكن الحصول عليها عن طريق تقسيم هذا المستطيل إلى مربعات مساحة كل منها بوصة مربعة واحدة . ويحتوى المستطيل على ثلاثة صفوف منها فى كل صف أربعة مربعات ، والخطوة العقلية التالية هى ملاحظة أنه فى هذه المسألة بالذات يمكن الحصول على نفس الجواب بضرب ٤ فى ٣ وإهمال جميع الخطوات الوسطى ، ثم يجىء بعد ذلك التحول إلى الجبر ، فلا ينصب الانتباه على العددين ٤ ، ٣ بل على العملية الضرورية التى جاءت بعد ذلك ، تلك أنه إذا دلت م على مساحة المستطيل بالوحدات المربعة ، ل ، ع على طول وعرض المستطيل على الترتيب بالوحدات الطولية المناظرة فإن القانون م = ل ع يدل على مساحة أى مستطيل .

لقد كشف تحليل المسألة عن عملية ضرورية تقع خلف حل جميع المسائل المماثلة ، وأن التعميم المبنى على هذا التحليل يكون صحيحاً فى جميع الحالات ، هذا هو نوع التحليل الذى تقوم عليه الرياضيات الحديثة،ودون التعبير الرمزى الذى تحدثنا عنه كان من المستحيل أن نعبر فى إيجاز عن العمليات المجردة التى تقع خلف التطبيقات الحسابية لها . إن الاختزال الرياضى الرمزى ، أو ما نسميه اللغة الجبرية ، يمكن من التعبير عن العمليات والمفاهيم المعقدة بصورة بسيطة مختصرة يمكن للعقل أن يدركها بسرعة ، بمجرد التمكن من هذه « اللغة الجبرية » .

ولعل القارىء قد لاحظ أن ڤيتا قد سمى كتابه فى الجبر « مقدمة لفن التحليل » ، ذلك لأنه كان يكره مصطلح « الجبر » وأراد أن يحل « التحليل » محله ، إلا أن هذا لم ينل قبولا . واليوم يطلق « التحليل » على بعض فروع الرياضيات العليا مثل التفاضل والتكامل .

لقد تتبعنا تطور الجبر حتى المرحلة التى وصل فيها التحليل ، وفى الفصول التالية نستعرض عمل رياضيين آخرين فى تطوير هذا التحليل ، وفى تطبيق المفاهيم الجبرية والتعبير الرمزى (فى الجبر) فى فروع أخرى من فروع الرياضيات .

لمحة عن المعادلات للقارىء غير المتعمق فى الرياضيات

تسمى العبارة الرياضية ٣ س + ١ = س + ٥ معادلة،نظراً لأن العبارة التى فى الجانب الأيمن تساوى تلك التى فى الجانب الأيسر .

تصور ميزانا فى كفته اليمنى وزنان الأول «٣ س أوقية» ، والثانى «١ أوقية» ، وفى كفته اليسرى وزنان آخران الأول « س أوقيات » ، والثانى « ٥ أوقيات » .

تصور الآن أن الوزنين الموضوعين فى الكفة اليمنى يتزنان مع الوزنين الموضوعين فى الكفة اليسرى . من الممكن أن تتم أى عملية من العمليات الآتية دون أن يضطرب اتزان الميزان :

١ — أن يضاف وزنان متساويان إلى الكفتين .

٢ — أن يطرح وزنان متساويان من الكفتين .

٣ — أن يضرب الطرفان فى أى عدد (فإذا كانت س أوقية تعادل ٥ أوقيات فإن ٣ س تعادل ١٥ أوقية) .

٤ — أن يقسم الطرفان على أى عدد .

٥ — أن يؤخذ الجذر التربيعى للطرفين (ينطبق هذا أيضاً على أى جذر) .

ونستطيع فيما يلى أن « نحل » المعادلة ٣ س + ١ = س + ٥ ، أى أن نوجد قيمة (أو قيم) س التى تجعل ٣ س + ١ مساويا س + ٥

٣ س + ١ = س + ٥

∴ ٢ س + ١ = ٥ بتطبيق (٢) وطرح س من كل من الطرفين .

∴ ٢ س = ٤ بتطبيق (٢) وطرح ١ من كل من الطرفين .

∴ س = ٢ بتطبيق (٤) وبقسمة كل طرف على ٢ .

يقال إن ٢ هى « جذر » هذه المعادلة ، أى القيمة التى « تحقق » المعادلة .

لقد كشف تحليل المسألة عن عملية ضرورية تقع خلف حل جميع المسائل المماثلة ، وأن التعميم المبنى على هذا التحليل يكون صحيحاً فى جميع الحالات ، هذا هو نوع التحليل الذى تقوم عليه الرياضيات الحديثة،ودون التعبير الرمزى الذى تحدثنا عنه كان من المستحيل أن نعبر فى إيجاز عن العمليات المجردة التى تقع خلف التطبيقات الحسابية لها . إن الاختزال الرياضى الرمزى ، أو ما نسميه اللغة الجبرية ، يمكن من التعبير عن العمليات والمفاهيم المعقدة بصورة بسيطة مختصرة يمكن للعقل أن يدركها بسرعة ، بمجرد التمكن من هذه « اللغة الجبرية » .

ولعل القارىء قد لاحظ أن فيتا قد سمى كتابه فى الجبر « مقدمة لفن التحليل » ، ذلك لأنه كان يكره مصطلح «الجبر » وأراد أن يحل « التحليل » محله ، إلا أن هذا لم ينل قبولا . واليوم يطلق« التحليل » على بعض فروع الرياضيات العليا مثل التفاضل والتكامل .

لقد تتبعنا تطور الجبر حتى المرحلة التى وصل فيها التحليل ، وفى الفصول التالية نستعرض عمل رياضيين آخرين فى تطوير هذا التحليل ، وفى تطبيق المفاهيم الجبرية والتعبير الرمزى (فى الجبر) فى فروع أخرى من فروع الرياضيات .

لمحة عن المعادلات للقارىء غير المتعمق فى الرياضيات

تسمى العبارة الرياضية ٣ س + ١ = س + ٥ معادلة،نظراً لأن العبارة التى فى الجانب الأيمن تساوى تلك التى فى الجانب الأيسر .

تصور ميزانا فى كفته اليمنى وزنان الأول «٣ س أوقية» ، والثانى « ١ أوقية»،

وفى كفته اليسرى وزنان آخــران الأول « س أوقيات » ، والثانى « ٥ أوقيات » .

تصور الآن أن الوزنين الموضوعين فى الكفة اليسرى يتزنان مع الوزنين الموضوعين فى الكفة اليسرى . من الممكن أن تتم أى عملية من العمليات الآتية دون أن يضطرب اتزان الميزان :

١ — أن يضاف وزنان متساويان إلى الكفتين .

٢ — أن يطرح وزنان متساويان من الكفتين .

٣ — أن يضرب الطرفان فى أى عدد (فإذا كانت س أوقية تساوى ٥ أوقيات فإن ٣ س تعادل ١٥ أوقية) .

٤ — أن يقسم الطرفان على أى عدد .

٥ — أن يؤخذ الجذر التربيعى للطرفين (ينطبق هذا أيضاً على أى جذر) .

ونستطيع فيما يلى أن « نحل » المعادلة ٣ س + ١ = س + ٥ ، أى أن نوجد قيمة (أو قيم) س التى تجعل ٣ س + ١ مساوية س + ٥

٣ س + ١ = س + ٥

∴ ٢ س + ١ = ٥ بتطبيق (٢) وطرح س من كل من الطرفين .

∴ ٢ س = ٤ بتطبيق (٢) وطرح ١ من كل من الطرفين .

∴ س = ٢ بتطبيق (٤) وبقسمة كل طرف على ٢ .

يقال إن ٢ هى « جذر » هذه المعادلة ، أى القيمة التى « تحقق » المعادلة .

وفى كفته اليسرى وزنان آخـــران الأول « س أوقيات » ، والثانى « ٥ أوقيات » .

تصور الآن أن الوزنين الموضوعين فى الكفة اليمنى يتزنان مع الوزنين الموضوعين فى الكفة اليسرى . من الممكن أن تتم أى عملية من العمليات الآتية دون أن يضطرب اتزان الميزان :

١ — أن يضاف وزنان متساويان إلى الكفتين .

٢ — أن يطرح وزنان متساويان من الكفتين .

٣ — أن يضرب الطرفان فى أى عدد (فإذا كانت س أوقية تعادل ٥ أوقيات فإن ٣ س تعادل ١٥ أوقية) .

٤ — أن يقسم الطرفان على أى عدد .

٥ — أن يؤخذ الجذر التربيعى للطرفين (ينطبق هذا أيضاً على أى جذر) .

ونستطيع فيما يلى أن « نحل » المعادلة ٣ س + ١ = س + ٥ ، أى أن نوجد قيمة (أو قيم) س التى تجعل ٣ س + ١ مساويا س + ٥

٣ س + ١ = س + ٥

∴ ٢ س + ١ = ٥ بتطبيق (٢) وطرح س من كل من الطرفين .

∴ ٢ س = ٤ بتطبيق (٢) وطرح ١ من كل من الطرفين .

∴ س = ٢ بتطبيق (٤) وبقسمة كل طرف على ٢ .

يقال إن ٢ هى « جذر » هذه المعادلة ، أى القيمة التى « تحقق » المعادلة .

وينبغى أن نتذكر أن إشارة ناقص معناها « أقل بمقدار » ، فإذا قلنا ٢ س — ٩ فإن ذلك معناه « أقل بمقدار ٩ عن قيمة ٢ س » فإذا أضفنا ٤ إلى ٢ س — ٩ فإن النتيجة تكون ٢ س — ٥ . وإذا طرحنا ٤ من ٢ س — ٩ فإن النتيجة تكون ٢ س — ١٣ .

تذكر كذلك أن الجذر التربيعى للعدد هو العدد الذى إذا ضرب فى نفسه كان الناتج هو العدد الأول ، وسيرى القارىء بعد أن يقرأ الجزء الخاص بالأعداد ذات الاتجاه أن حاصل ضرب عددين سالبين عدد موجب ، وعلى ذلك لا يكون الجذر التربيعى للعدد ٩ هو + ٣ فقط بل — ٣ أيضاً ، إذ أن — ٣ مضروبة فى — ٣ يساوى + ٩ ويمكن التعبير عن هاتين النتيجتين فى الصورة √٩ = ± ٣ وتقرأ « الجذر التربيعى للعدد ٩ يساوى زائد أو ناقص ٣ » .

الفصل الرابع

تطور حساب المثلثات

إن حساب المثلثات الذى نعرفه اليوم فرعا من فروع الرياضيات ، إذا اعتبر مرتبطا بالجبر فإن تاريخه يرجع إلى القرن الثامن عشر فقط .

أما إذا عالجناه كتطور للهندسة فإن تاريخه يرجع إلى عصر الرياضيين والفلكيين الإغريق الذى ازدهر قبل عصر المسيح وبعده بمائتى سنة .

وإذا اعتبرناه « قياساً للمثلث » وهو ما تعنيه كلمتا « حساب المثلثات » فإن تاريخه يعود إلى عصر قدماء المصريين منذ أربعة آلاف عام مضت . وعلى كل حال فلم يطلق على هذا العلم اسم حساب المثلثات إلا فى ١٥٩٥ عندما استعمله رياضى اسمه بيتسكوس Pitiscus .

من المعلوم أن البناة الذين شيدوا الأهرام فى مصر كانوا يعرفون قياس المثلث ، إلا أن هذه المعرفة كانت مقصورة على الناحية العملية المتصلة بالخواص الهندسية للمثلث ، وقد عالجنا هذا فى الفصل الثانى ، لكن لا يمكن القول إنهم وضعوا شيئا يمكن اعتباره حسابا المثلثات ، بالرغم من أن فى قرطاس أحمس إشارة إلى « سكت » ، وهى كلمة معناها غير واضح ، يظن البعض أنها مصطلح فى حساب المثلثات إلا أنه ليس هناك ما يؤيد ذلك (لعلها قياس هندسى يجعل أوجه الهرم ترتفع بالميل المطلوب مع القاعدة) ، وإنما نستطيع أن نرجع إلى المصريين فضل اكتشاف حقائق معينة متصلة بالظلال ، تلك التى أصبحت بعد قرون كثيرة

وينبغى أن نتذكر أن إشارة ناقص معناها « أقل بمقدار » ، فإذا قلنا ٢ س - ٩ فإن ذلك معناه « أقل بمقدار ٩ عن قيمة ٢ س » فإذا أضفنا ٤ إلى ٢ س - ٩ فإن النتيجة تكون ٢ س - ٥ . وإذا طرحنا ٤ من ٢ س - ٩ فإن النتيجة تكون ٢ س - ١٣ .

تذكر كذلك أن الجذر التربيعى للعدد هو العدد الذى إذا ضرب فى نفسه كان الناتج هو العدد الأول ، وسيرى القارىء بعد أن يقرأ الجزء الخاص بالأعداد ذات الاتجاه أن حاصل ضرب عددين سالبين عدد موجب ، وعلى ذلك لا يكون الجذر التربيعى للعدد ٩ هو + ٣ فقط بل - ٣ أيضاً ، إذ أن - ٣ مضروبة فى - ٣ يساوى + ٩ ويمكن التعبير عن هاتين النتيجتين فى الصورة $\sqrt{٩} = \pm ٣$ وتقرأ « الجذر التربيعى للعدد ٩ يساوى زائد أو ناقص ٣ » .

وينبغى أن نتذكر أن إشارة ناقص معناها « أقل بمقدار » ، فإذا قلنا ٢ س — ٩ فإن ذلك معناه « أقل بمقدار ٩ عن قيمة ٢ س » فإذا أضفنا ٤ إلى ٢ س — ٩ فإن النتيجة تكون ٢ س — ٥ . وإذا طرحنا ٤ من ٢ س — ٩ فإن النتيجة تكون ٢ س — ١٣ .

تذكر كذلك أن الجذر التربيعى للعدد هو العدد الذى إذا ضرب فى نفسه كان الناتج هو العدد الأول ، وسيرى القارىء بعد أن يقرأ الجزء الخاص بالأعداد ذات الاتجاه أن حاصل ضرب عددين سالبين عدد موجب ، وعلى ذلك لا يكون الجذر التربيعى للعدد ٩ هو + ٣ فقط بل — ٣ أيضاً ، إذ أن — ٣ مضروبة فى — ٣ يساوى + ٩ ويمكن التعبير عن هاتين النتيجتين فى الصورة √٩ = ± ٣ وتقرأ « الجذر التربيعى للعدد ٩ يساوى زائد أو ناقص ٣ » .

الفصل الرابع

تطور حساب المثلثات

إن حساب المثلثات الذى نعرفه اليوم فرعا من فروع الرياضيات ، إذا اعتبر مرتبطا بالجبر فإن تاريخه يرجع إلى القرن الثامن عشر فقط .

أما إذا عالجناه كتطور للهندسة فإن تاريخه يرجع إلى عصر الرياضيين والفلكيين الإغريق الذى ازدهر قبل عصر المسيح وبعده بمائتى سنة .

وإذا اعتبرناه « قياساً للمثلث » وهو ما تعنيه كلمتا « حساب المثلثات » فإن تاريخه يعود إلى عصر قدماء المصريين منذ أربعة آلاف عام مضت . وعلى كل حال فلم يطلق على هذا العلم اسم حساب المثلثات إلا فى ١٥٩٥ عندما استعمله رياضى اسمه بيتسكوس Pitiscus .

من المعلوم أن البناة الذين شيدوا الأهرام فى مصر كانوا يعرفون قياس المثلث ، إلا أن هذه المعرفة كانت مقصورة على الناحية العملية المتصلة بالخواص الهندسية للمثلث ، وقد عالجنا هذا فى الفصل الثانى ، لكن لا يمكن القول إنهم وضعوا شيئا يمكن اعتباره حسابا للمثلثات ، بالرغم من أن فى قرطاس أحمس إشارة إلى « سكت » ، وهى كلمة معناها غير واضح ، يظن البعض أنها مصطلح فى حساب المثلثات إلا أنه ليس هناك ما يؤيد ذلك (لعلها قياس هندسى يجعل أوجه الهرم ترتفع بالميل المطلوب مع القاعدة) ، وإنما نستطيع أن نرجع إلى المصريين فضل اكتشاف حقائق معينة متصلة بالظلال ، تلك التى أصبحت بعد قرون كثيرة

أساساً للاكتشافات التى وصل إليها العرب فى حساب المثلثات . ولقد توصل المصريون إلى هـذه الاكتشافات خلال ملاحظتهم لظلال الأشياء تحت شمس مصر المشرقة ، وسنتعرض لها عندما تسنح الفرصة .

كى نتتبع قصة حساب المثلثات منذ بداياتها الهندسية ينبغى أن نبدأ بنظرة إلى ما أسهم به مباشرة أو غير مباشرة أربعة من الرياضيين الفلكيين هم : أريستارخوس ، وهيباركاس ، ومينلاوس ، وبطليموس ، إذ أن أعمالهم تحدد بداية واضحة لما نعنيه بحساب المثلثات .

منذ بدأ الإنسان — بما له من قدرة على التفكير — حياته على سطح الأرض وهو يحاول جاهداً أن يحل غموض الكون . وقد رأينا أن عدداً من الرجال بدأوا دراسة خواص الكرة والدائرة حين كانوا يراقبون تحركات النجوم وهـذه بدت لهم كأنها موزعة على ستارة مرصعة معلقة على كرة سماوية هائلة ، كما رأينا كيف وصلت الهندسة عند الإغريق إلى مداها بأعمال أرشميدس وأبولونيوس ، وكيف تراكم فى الهندسة تراث كبير من المعرفة عن علم الأعداد ثم تسلحت هـذه المعرفة أخيرا بالتعبير الرمزى الجبرى .

وبعد وفاة أرشميدس لم يحدث أى تقدم فى الرياضيات البحتة (الرياضيات التى لا تطبق فى فرع آخر من فروع العلم) إلى أن انقطع ارتباط الكميات بالأشكال الهندسية ورفع الحظر بتطبيق التحليل الجبرى الحديث فى تطور المفاهيم والعمليات الرياضية . وكما رأينا لقد تأخر هذا اليوم قرونا كثيرة ، وفى أثناء ذلك حول الرياضيون انتباههم إلى تطبيق المعرفة الهندسية فى مجال الفلك ذلك الفرع من العلوم الذى يعتمد كلية على الرياضيات .

فى عام ٢٨٠ قبل الميلاد ، رصد واحد من هؤلاء الرياضيين ، يونانى اسمه اريستارخوس من ساموس Aristarchus of Samos ، المنقلب الصيفى وقد ذكر هذا واستعمله فلكى اسمه هيباركوس بعد ١٤٥ سنة ، وهكذا عن طريق هذا الخيط يمكن لنا تحديد التاريخ الذى عاش فيه اريستارخوس ، ويعتقد أنه كان أكبر من أرشميدس بخمس وعشرين سنة ، وأصغر قليلا من إقليدس . واليوم لا يعتبر رياضيا بل فلكيا ، إذ أنه هو الذى استنتج أن الأرض تدور حول الشمس وليست الشمس هى التى تدور حول الأرض كما كان الاعتقاد سائداً . أما بالنسبة لمواطنيه الإغريق فقد كان يعتبر عندهم الرياضى العظيم كما يعتبره الكاتب ڤيتروڤيوس Vitruvius واحداً من الرجال العظام القلائل الذين كانت لهم دراية عميقة بالهندسة والفلك والموسيقى وجميع فروع « العلم » الأخرى .

ولم يبق إلا كتاب واحد من كتبه ، وهو « فى حجوم ومسافات الشمس والقمر » ولسنا نعرف شيئاً عن نظريته فى حركة الأرض إلا عن طريق «ضابط الوقت الرملى » الذى كتبه أرشميدس . إن هذا العنوان الغامض لكتاب فى الرياضيات يوضح المحاولة التى قام بها أرشميدس لحساب عدد حبات الرمل الذى يحتوى عليها الكون ، وكانت هذه فرصة كى يستخدم الطريقة التى وضعها لكتابة الأعداد الكبيرة ، وخلال شرحه للكون يذكر أرشميدس نظرية أريستارخوس ، الذى عارض بها أرسطو وكل من شاركه فى الاعتقاد بأن الأرض ثابتة كمركز غير متحرك للكون ، وأعلن فيها «أن النجوم والشمس تظل ساكنة ، وأن الأرض تدور حول الشمس فى محيط دائرة ، وأن الشمس فى مركز مدار الأرض » ، وفى هذا إذا أبدلنا كلمة دائرة بكلمة قطع ناقص لحصلنا على النظرية الحديثة لحركة الأرض ، وإن هـذه النظرية لتؤيد القول المأثور عن

الفيلسوف بارميندس Parmenides ، أحد أتباع فيثاغورث ، حوالى عام ٥٠٠ قبل الميلاد « إن ما نحصل عليه بحواسنا أقل صدقا مما نحصل عليه بالتفكير المنطقى » .

لقد ولد أريستارخوس مبكراً ثمانية عشر قرنا عن عصره ، فلم تتأيد نظرياته إلا فى عام ١٥٤٣ ، ولم يقبلها الناس عموماً إلا بعد ذلك بزمن طويل.

فى عام ١٤٩٩ حصل طالب ألمانى ، أبوه من أصل بولندى ، على شهادة الطب من جامعه بادوا حيث تبعه كاردان بعد سنوات قليلة ، ولقد حضر هذا الطالب، وكان اسمه نيكولاوس كوبرنيكوس ، دروساً فى الرياضيات (معظمها فلك) إلى جانب دروس الطب ، وإن المطلع على المناهج الحديثة فى الطب وفى الرياضيات ليدهشه أن يستطيع طالب الحصول على شهادتين فى الطب وفى الفلك فى نفس الوقت إلا أنه يجب أن نتذكر أنه فى القرن الخامس عشر كانت المادة التى ينبغى تحصيلها غاية فى الضآلة إذا قورنت بالمادة الحديثة ، كما أن مقومات الحصول على الشهادة لم تكن سوى المواظبة على حضور المحاضرات ، فلم تكن هناك امتحانات . وعلى كل حال ليس هناك من شك أن كوبرنيكوس لم يتمكن من الرياضيات والفلك إلى الدرجة التى تجعله واحدا من كبار الفلكيين فى جميع العصور فحسب ، بل إنه كذلك كسب عيشه كأستاذ للرياضيات .

وفى عام ١٥٤٣ رقد كوبرنيكوس على فراش الموت ، وقبل أن يغيب عن وعيه وضعوا فى يده كتابا جديداً له ، ولقد أحيا فى هذا الكتاب ، والذى اشتهر اليوم فى جميع أجزاء العالم ، النظرية التى وضعها أريستارخوس عن حركة الشمس قبل مولد المسيح بثلاثمائة سنة ، أما خلال القرون الثمانية عشر فقد تمسك الناس بنظرية أرسطو .

ولقد ظل النظام الكوبرنيكى (لو اتبع العدل لنسب النظام إلى اريستارخوس) غير مقبول سنوات كثيرة بعد موت كوبرنيكوس عام ١٥٤٣ ، أولا لأنه يخالف ماتدل عليه الحواس ، وثانيا لأن الكنيسة الكاثوليكية فى روما بذلت جهدا كبيراً فى مقاومته لدرجة أن أجبرت جاليليو العظيم فى ٢٢ يونية عام ١٦٣٣ على أن يسحب تأييده للنظرية « الجديدة » تحت تهديد التعذيب، وبالرغم من أن عدداً من رجال العلم فى الكنيسة كانوا يصدقون النظرية ، إلا أنهم خافوا أن يضعف إيمان أتباعهم إذا عرفوا أن الإنسان ليس مركزا لكل شىء فى الكون .

ولقد كان شكسبير فى عام ١٥٩٦ عندما ما كتب « تاجر البندقية » متمسكا برأى أرسطو ، فهو يجعل لورنزو يقول لجيسيكا :

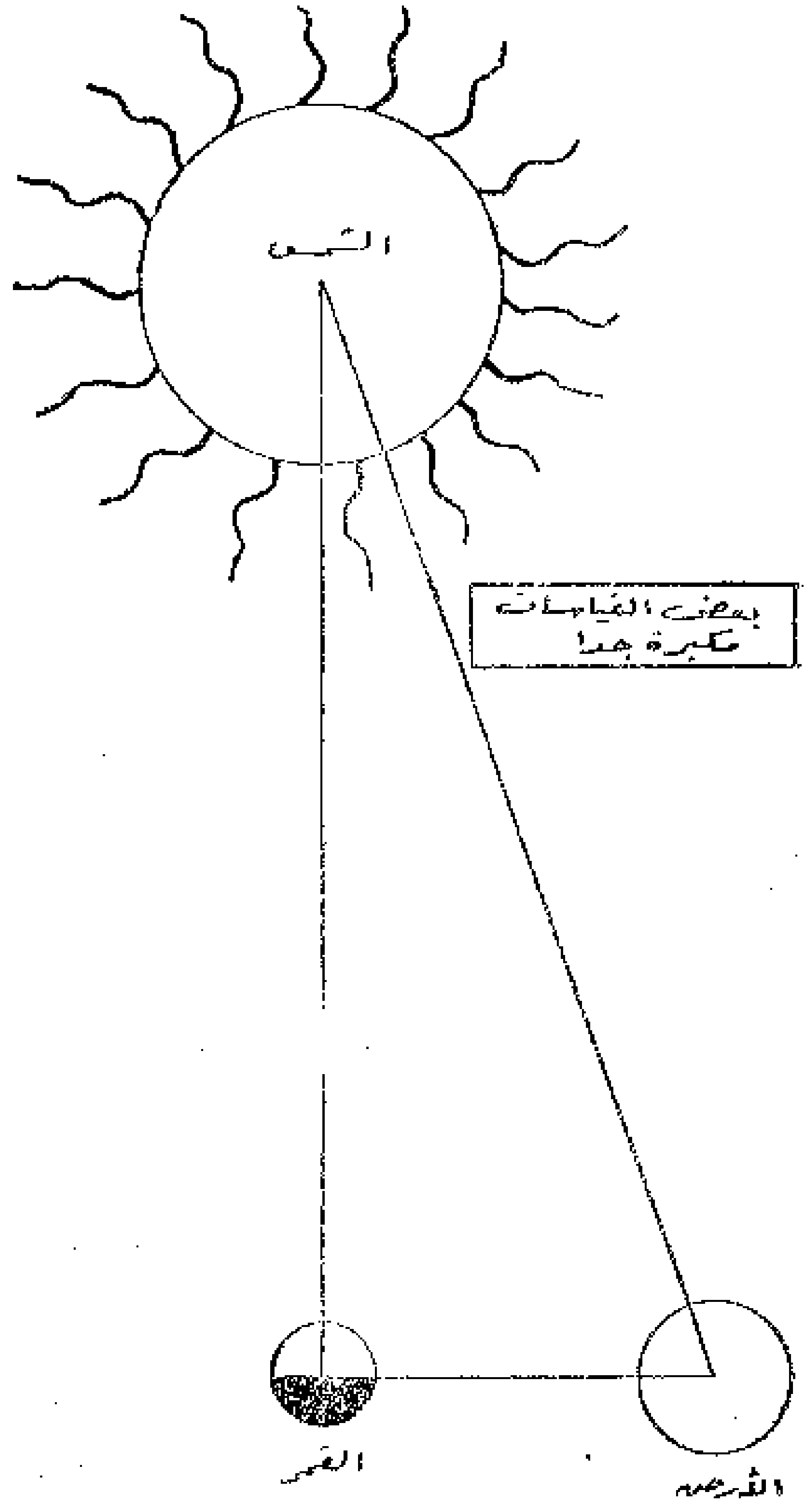
انظرى إلى سقف السماء
إنه سميك مغطى بالذهب اللامع .
ليس هناك نجم تستطيعين أن تمسكيه
لكنه فى حركته كملاك يغنى .

هذا هو السبب الذى من أجله نحترم ونبجل أريستارخوس اليوم، إذ أن عقله سبق عصره بثمانية عشر قرنا ، فكان مثالا آخر للفكر الحر ، والقدرة على الابتكار عند الإغريق .

فى هذا الفصل نستعرض الطرق التى استعملها فى حساب الأبعاد النسبية للشمس والقمر من الأرض ، فبالرغم من أن نتائجه النهائية لم تكن دقيقة ، نظراً للأدوات

البدائية التى كانت فى حوزته ، فإن الطريقة التى استخدمها تتضمن العمليات الحسابية التى مهدت الطريق لتطور أول مفهوم فى حساب المثلثات .

تقوم طريقته على الحقيقة القائلة بأن ضوء القمر ليس الا انعكاساً لأشعة



شكل (٢٦)

[للتوضيح بالغنا فى تكبير المسافة بين الأرض والقمر — ينبغى أن تكون الزاوية عند مركز الشمس ١/٦ درجة تقريباً]

الشمس وأن مراكز الشمس والقمر والأرض رؤوس لمثلث يكون قائم الزاوية عند مركز القمر عندما يكون نصف القمر مرئيا من الأرض .

فى الصباح الباكر من أحد الأيام عندما كان القمر — طبقا لحكم أريستارخوس — مضيئاً إلى النصف تماما ، قاس الزاوية عند مركز الأرض ، تلك التى تقع بين خطين وهميين يصلان مركز الأرض بمركزى الشمس والقمر ، مستعملا فى ذلك الأدوات البسيطة فوجدها ٨٧ درجة (القيمة الدقيقة لها هى ٨٩درجة ٥٢، دقيقة) ثم استخدم هندسة اقليدس فى حساب الزاوية الحادة الأخرى فى المثلث فوجدها ٣ درجات .

مسلحاً بهذه الحقائق أمكنه حساب المسافة بين الشمس والأرض ، مستعملا فى ذلك تطبيقاً معقداً لهندسة أقليدس ، فوجدها أكبر من ١٨ مثلا ، وأقل من عشرين مثلا المسافة بين القمر والأرض . ونظراً لعدم دقته فى قياس الزاوية ، فإن النتيجة التى وصل إليها بعيدة كل البعد عن الحقيقة ، (بعد الأرض عن الشمس ٣٨٨ مرة بعدها عن القمر) إلا أن مايهمنا هنا هو أنه فى برهانه الهندسى استخدم مفاهيم نعتبرها الآن مفاهيم حساب المثلثات ، فعند استعماله الفكرة الهندسية للزاوية (كأجزاء من الزاوية القائمة) ، ولأقواس الدائرة وأوتارها استخدم مفهوم القياس الدائرى وغيره من القيم التى يتم الآن التعبير عنها بلغة حساب المثلثات . وإذا أراد القارىء أن يرى العمليات الحسابية المفصلة (وغيره المتصلة بحجم الشمس والقمر) فإنه يجد ترجمة لها فى كتاب « تاريخ الرياضيات عند الإغريق » الجزء الثانى تأليف السير توماس هيث(١) .

A History of Greek Mathematics (VOL . II) by Sir Thomas Heath (1)

لقد عرضنا الكثير عن « الرياضى العظيم » أريستارخوس ، والآن نأتى إلى المبتدع الحقيقى لحساب المثلثات ، ذلك هو هيباركوس الذى يعتبر أباً لهذا العلم .

ولسنا ندرى شيئاً عن حياته ، فيما عدا أنه ولد فى نيسيا فى بثينيا (المدينة التى اجتمع فيها مجلس كنائسى مشهور بعد أربعة قرون ونصف قرن ليعلن وثيقة نسبت إلى المدينة ، ويذكرها رجال الكنيسة اليوم) ، وأن أغلب أعماله قد تمت فيما بين ١٦١ و ١٢٦ قبل الميلاد .

ونظراً لأن أغلب الكتب التى كتبها هيباركوس اندثرت ، فإننا لا نستطيع تقدير عظمته إلا من إشارة الرياضيين الآخرين إلى عمله ، ولقد استعمل بطليموس — أحد هؤلاء الرياضيين وسنلتقى به بعد قليل — أطلسا للنجوم الثابتة يحتوى على ٨٠٠ منها ، حدد فيه هيباركوس موضع كل من هذه النجوم فى الكرة السماوية عن طريق حساب القياسات الزاوية التى تناظر الطول والعرض على الأرض ، ولقد كان بطليموس هذا رياضياً وفلكياً وجغرافياً ، ويجب ألا نخلط بينه وبين الملك الذى عاش قبل ذلك العصر بأربعمائة سنة فى الإسكندرية ، وأنشأ فيها مكتبة هائلة .

ولو أن الرومان سادة أوروبا فى ذلك العصر تنبهوا إلى اكتشاف قام به هيباركوس لجنبوا من جاء بعدهم كثيراً من المصاعب والفوضى ، فقد اكتشف فى عام ١٣٥ قبل الميلاد خطأ فى عدد أيام السنة التى يمكن أن تنطبق على السنة الشمسية ، أى مع عدد دورات الأرض حول محورها فى أثناء مدار كامل لها حول الشمس ، وفى هذه الحالة لا يكون هناك فرق ، سواء كانت نظرية أرسطو

أو نظرية أريستارخوس هى السائدة ، وعلى كل فقد كان هيباركوس — شأنه فى ذلك شأن جميع الفلكيين فى عصر كوبرنيكوس — يعتقد رأى أرسطو .

ولا يدرى أحد من الذى اكتشف أنه عند الظهر يكون ظل عمود رأسى أطول فى الشتاء منه فى الصيف ، وبالرغم من أن هيرودوت المؤرخ يذكر أن الإغريق قد نقلوا المزولة الشمسية عن البابليين فإن من المعروف أن المصريين قد استخدموا هذه الأداة فى تسجيل مرور الوقت حوالى عام ١٥٠٠ قبل الميلاد. وعن طريق تسجيل عدد الأيام التى تمر بينما يمر ظل العصا الرأسى من أقصر طول الى أطول طول ثم يعود الى أقصره تعلم الناس فى الزمن القديم قياس طول السنة ، وهذا هو أحد الجذور التى نشأ عنها الفلك ، بينما مكنتهم ملاحظاتهم لحركة الظل ساعة بعد أخرى من قياس مرور الوقت خلال اليوم .

إن الكلمة الانجليزية التى تطلق على عصا المزولة الشمسية هى gnomon ولهذه الكلمة تاريخ طويل ، فقد أطلقها الإغريق على عصا المزولة « لأنها تعطى لهم المعرفة » عن مرور الوقت ، وكلمة gnomon مشتقة من كلمة يونانية معناها « يعرف »، وهى أيضاً موجودة فى الكلمة الانجليزية a-gnostic أى « من لا يعرف (بوجود الله) » ، ثم استعملت الكلمة للدلالة على آلة يرسم بها الرياضيون مستقيمين متعامدين ، إشارة إلى وضع عصا المزولة الشمسية بالنسبة لظلها ، ثم استعملت الكلمة للدلالة على التعامد .

ولقد عرف هيباركوس أن أريستارخوس قام فى صيف عام ٢٨٠ قبل الميلاد برصد الساعة التى يكون عندها ظل المزولة أقصر ما يمكن ، ولكنه وجد أن الانقلاب الصيفى فى عام ١٣٥ قبل الميلاد ، أى بعد ١٤٥ سنة من عمل

أريستارخوس ، حدث مبكرا إحدى عشرة ساعة عما كان ينبغي أن يحدث لو أن كل سنة من هذه السنين الـ ١٤٥ كان ٣٦٥¼ يوما ، وهو ما كان يعتبر فى ذلك الحين طولا للسنة ، ومن هذه الملاحظة وجد أن طول السنة الشمسية هو ٣٦٥ يوما و ٥ ساعات و ٥٥ دقيقة و ١٢ ثانية . وقد وجد اليوم باستعمال الأدوات الدقيقة الحديثة أن هيباركوس قد أخطأ فى ٦ دقائق و ٢٦ ثانية ، إذ أن المدار الكامل للشمس هو ٣٦٥ يوما و ٥ ساعات و ٤٨ دقيقة و ٤٦ ثانية .

وعندما قام يوليوس قيصر عام ٤٦ قبل الميلاد باعتباره فلكياً هاوياً يساعده الفلكى سوسوجينيس بتعديل التقويم أهملا الاكتشاف الذى وصل إليه هيباركوس وجعلا السنة الشمسية ٣٦٥¼ يوما ، ولقد ضمن يوليوس قيصر لنفسه الخلود عن طريق تغيير اسم الشهر السادس الرومانى من Quintilis إلى Julius وهو ما نسميه الآن يوليو ، كذلك أصدر قراراً بأن يبدأ العام بشهر Januarius وقد كان هو الشهر الحادى عشر عند الرومان ، وهذا هو السبب فى أن يكون سبتمبر وأكتوبر ونوفمبر وديسمبر الشهور التاسع والعاشر والحادى عشر والثانى عشر ، فى حين أن معناها عند الرومان السابع والثامن والتاسع والعاشر ، ولما جاء أغسطس قيصر بعد يوليوس قيصر أراد لنفسه بعض الخلود فطلب الى مجلس الشيوخ وضع اسمه بدلا من Sextilis الشهر السادس عند الرومان فأصبح شهر أغسطس ، وهكذا يدهش أولئك الذين يكرهون اللاتينية واللغات القديمة للقدر الكبير من اللاتينية الذى يتكلمونه كل يوم ، وللتاريخ الذى يقبع وراء الكلمات التى ينطقونها .

ونظراً لأن يوليوس قيصر قد أهمل الاكتشاف الذى وصل اليه

هيباركوس ، ذلك أن اليوم أقل قليلا من ٣٦٥¼ يوما ، فإن الاعتدال الربيعي — وهو أحد أيام مارس الذي يتساوى فيه طول الليل والنهار — بدأ يتراجع على التقويم السنوي .

وفي عام ١٥٨٢ عدل البابا جريجوري الثالث عشر التقويم السنوي كي يعيد الاعتدال الربيعي إلى وضعه الصحيح، وذلك بأن حذف عشرة أيام كاملة. ولم يخضع الإنجليز لهذا التغيير الا في عام ١٧٥٢ ـ شاهد تعصبهم ضد التغير ـ وهناك شاهد آخر اليوم هو استعمال الناطقين بالإنجليزية لوحدات في الوزن والقياس ترجع إلى العصور الوسطى، بدلا من النظام المتري البسيط الذي يوفر الوقت والجهد . وعند ذاك أصبح ضروريا حذف أحد عشر يوما ، أي يوما أكثر مما كان ينبغي حذفه عام ١٥٨٢ ، لذلك فإن ٢ من سبتمبر عام ١٧٥٢ تلاه مباشرة ١٤ من سبتمبر عام ١٧٥٢ ، ولقد أدى هذا إلى إضرابات في انجلترا حيث يعارض الناس تدخل الحكومة في حياتهم الخاصة ، ونظراً لأن عدد غير العارفين بالرياضيات كانوا حينذاك أكثر منهم اليوم فإن عدداً كبيراً منهم اعتبروا أنه قد سرق من حياتهم أحد عشر يوما، لذلك ثاروا وأضربوا وهتفوا قائلين « أعيدوا لنا الأحد عشر يوما التي أخذتموها » .

أما روسيا فلم تقتنع بأن تسير مع الدول الأخرى وتترك تقويم يوليوس قيصر إلا بعد الحرب العالمية الأولى ، لذلك فإنه كان عليهم أن يحذفوا ١٣ يوما حتى يساير تقويمهم تقويم غيرهم من الدول . ولقد كان من الممكن تفادي كل هذا التعب والفوضى والعناء العقلي لو أن يوليوس قيصر قد احترم الاكتشاف الذي توصل إليه هيباركوس وعمل به .

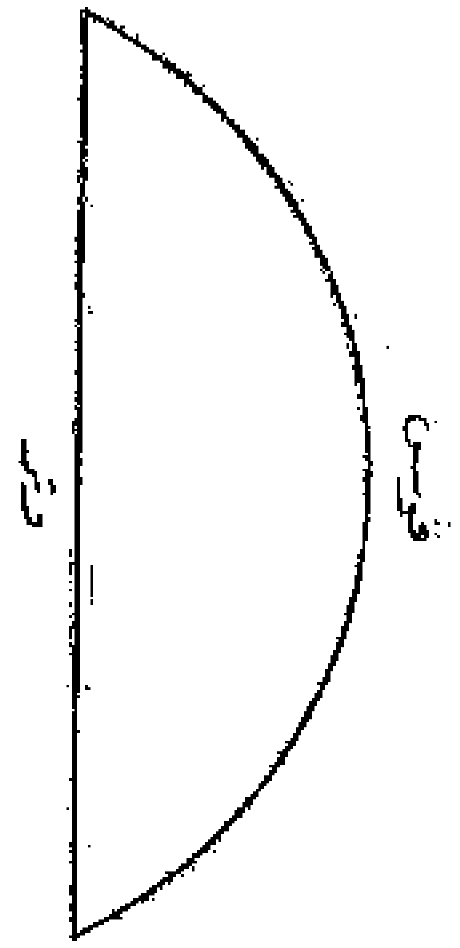
ولتفادى الأخطاء فى المستقبل وضع التقويم الجريجورى قاعدة ، هو أن تعتبر كل سنة تقبل القسمة على ٤ « كبيسة » ، ويضاف يوم إلى فبراير ، وفى هذا يتفق مع تقويم يوليوس قيصر ، وكى نأخذ فى اعتبارنا التصحيح الذى قام به هيباركوس عام ١٣٥ قبل الميلاد فإن السنة القرنية لا تكون كبيسة إلا إذا قبلت القسمة على ٤٠٠ ، وعلى ذلك فإن سنة ١٦٠٠ كبيسة ، فى حين أن ١٧٠٠ ، ١٨٠٠ ، ١٩٠٠ ليست كذلك ، و ٢٠٠٠ كبيسة وهكذا . . . إلا أنه حتى بهذا لا يصلح الأمر ، فإنه عندما يجىء عام ٤٩٠٥ تكون سنة التقويم قد زحفت يوما كاملا بعيدا عن السنة الشمسية ، ولابد من إجراء جديد .

لقد أبعدتنا مناقشة الخطأ فى التقويم بعيداً عن عصر هيباركوس الذى كان أول من اكتشفه ، إلا أن هذه المناقشة قد أوضحت لغير الرياضيين من القراء إحدى الخدمات الأساسية التى قدمتها الرياضيات للحضارة .

وليس هنا المجال لنعرض التفاصيل الفنية المعقدة للاكتشافات الفلكية التى قام بها هيباركوس ، وخاصة تلك المتصلة بالتغير فى اتجاه خط الاستواء ، فقد كانت بالغة الأهمية لجعلت منه أعظم رياضى العصر القديم (نظراً لأن الأرض ليست كروية تماما بل منبعجة ، فإنها تتأرجح فى أثناء دورانها حول محورها ، مما ينتج عنه تغير فى اتجاه محور الأرض ، ويتبع ذلك تغير فى اتجاه خط الاستواء ، ولقد وجد هيباركوس أن قيمته ١٠٢ و٠ من الدرجة كل سنة ، فى حين أن القيمة التى توصلنا إليها الآن هى ١٥٦ و٠ من الدرجة كل سنة .

والآن نأتى إلى « اختراع » هيباركوس لحساب المثلثات ، هذه الومضة التى ندين لها أكثر مما ندين لاكتشافاته الفلكية ، ولقد كانت نشأة هذا العلم فى أثناء قياس الأوتار فى الدائرة .

إن الكلمة الإنجليزية chord ، التى تدل على المستقيم الذى يصل نقطتين على محيط دائرة ، مشتقة من الكلمة اللاتينية chorda التى تعنى خيط السهم ، ولقد دخلت chorda إلى اللاتينية من الكلمة اليونانية chordé التى تعنى أمعاء الحيوان ثم تحور معناها إلى الوتر الذى يشد فى الآلة الموسيقية أو ذلك الذى يقذف به السهم فى القوس ، أما القوس نفسها فكانت تسمى فى اللاتينية arcus ، ولقد أطلق الناس فى العصور الوسطى هذه الكلمة على محيط الدائرة وما زال الخط المنحنى حتى الآن يسمى « arc »[١] .



شكل (٣٧)

ويروى ثيون الاسكندرى Theon of Alexandria (رياضى عاش فى أواخر القرن الرابع الميلادى ، ولقد قتل ابنته رجل مسيحى لأنها تعرف العلم الوثنى) أن هيباركوس كتب عن « أوتار الدوائر » فى اثنى عشر مجلدا ، وفى كتاب Syntaxis أو الماجست كما عرفه العرب والأوروبيون فى العصور الوسطى يصف بطليموس طريقة حساب أطوال الأوتار فى عصره ، ولا شك أن بطليموس

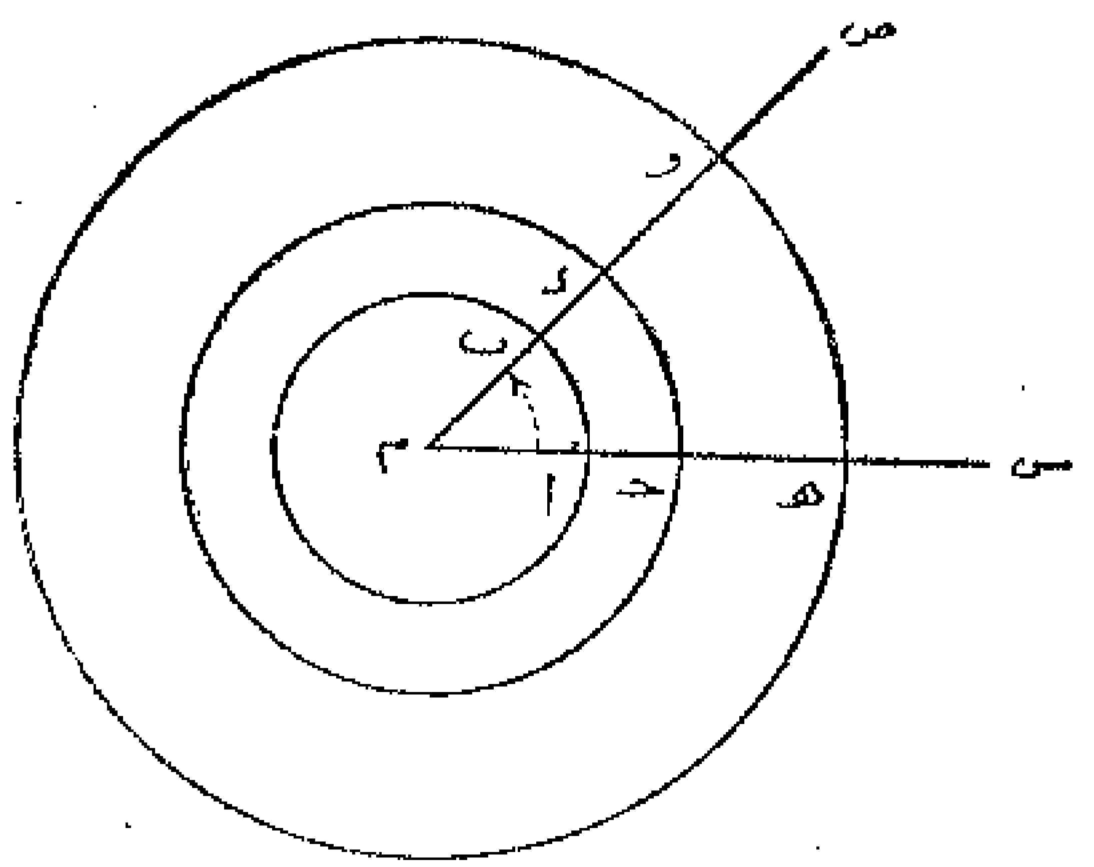
(١) يتضح من هذا الأصل العربى لمصطلحى « الوتر » والقوس » (المترجم) .

قد أخذها عن هيبار كوس ، وفيها يتوقف طول الوتر على طول القوس المحصور بين نهايتيه ، وهكذا — كما سنرى — ارتبط طول الوتر بمقدار الزاوية .

ولنر أولا كيف أمكن قياس طول القوس ، لقد اعتبر أن نصف قطر الدائرة فى دورانه دورة كاملة يعمل ٣٦٠ « درجة » . ولقد سمى اليونانيون الدرجة « moira » أى جزءاً ، أما الرياضيون فى العصور الوسطى فقد أسموها de-gradus ، كما وضع الرمز ° للدلالة على كلمة درجة .

ولقد تبع الرياضيون الإغريق البابليين فقسموا الدرجة إلى ٦٠ قسما ، ولقد أسمى بطليموس هذه الأقسام « الأجزاء الصغيرة الأولى » ، ثم قسم كلا منها إلى ٦٠ « قسما صغيرا ثانياً » ، وعندما ترجم كتاب بطليموس إلى اللاتينية ترجمت الأجزاء الصغيرة الأولى « pars minuta ima » ومن هنا جاءت الكلمة الإنجليزية minute للدلالة على $\frac{1}{60}$ من الدرجة ، كما ترجمت الأجزاء الصغيرة الثانية إلى « pars minuta secunda » ومن هذا جاءت الكلمة الإنجليزية second للدلالة على $\frac{1}{60}$ من الدقيقة ، ومن هنا أيضا جاءت كلمتا دقيقة وثانية للدلالة على $\frac{1}{60}$ من الساعة ، $\frac{1}{60}$ من الدقيقة ، وجاءت الشرطة الواحدة ' رمزاً للجزء الصغير الأول ، شرطتان '' رمزاً للجزء الصغير الثانى . (ولقد نقل الإغريق عن البابليين نظامهم فى التقسيم إلى وحدات أصغر إلى مجالات أخرى غير قياس الزوايا) .

والآن لنبحث كيف اكتشفت العلاقة بين طول القوس ومقدار الزاوية . فى شكل ٣٨ ثلاث دوائر متحدة المركز تصور مستقيما م س يدور فى اتجاه مضاد لحركة عقرب الساعة من الوضع الابتدائى م س إلى الوضع م ص المبين فى شكل ٣٨ .



شكل (٣٨)

ولنفرض أن م س دار $\frac{1}{6}$ دورة كاملة فإن هذه الزاوية وهى $\frac{1}{6}$ الـ ٣٦٠° درجة تناظرها أقواس مختلفة فى الطول هى ا ب ، حـ ى ، هـ و .

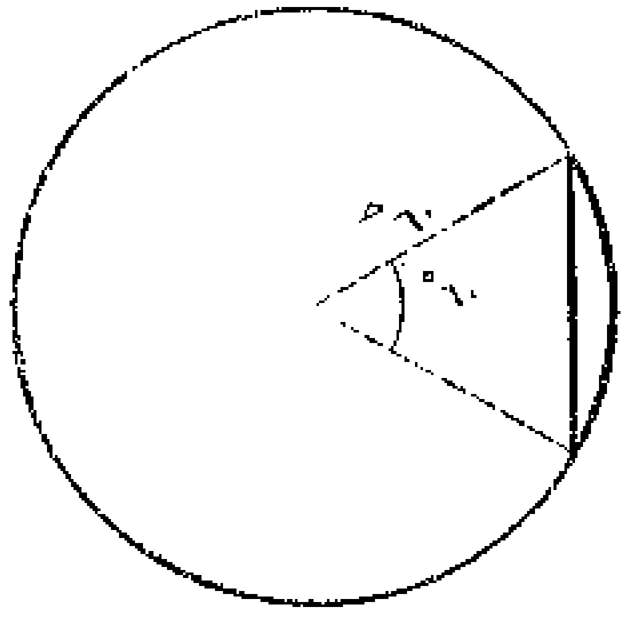
فإذا رسمنا الأوتار ا ب ، حـ ى ، هـ و فإن أطوالها — كما توصل إليه الإغريق — تتناسب مع أطوال الأقواس .

ولقد كانت وحدة قياس الوتر مأخوذة من قطر الدائرة نفسها ، فكان القطر يقسم إلى ١٢٠ جزءاً من الأجزاء المتساوية ، فإذا كان طول الوتر نصف قطر الدائرة كان طوله ٣٠ قسما ، وهكذا . . . ، ونظراً لأن محيط الدائرة قوس يناظر ٣٦٠ درجة ، فهو يساوى قطر الدائرة ط مرة ، وبذلك أصبح من الممكن وضع جدول يعطى طول القوس مقدراً بعدد الدرجات التى يقبلها عن مركز دائرته .

نستطيع الآن — بما سبق من تعاريف وشروح — أن نفهم كيف تم وضع « جدول أوتار الدائرة » . لنبدأ بمثال بسيط هو طول الوتر عندما يقبل القوس المناظر له زاوية ٦٠° عند مركز الدائرة .

لسنا نحتاج إلا إلى معرفة بسيطة لهندسة إقليدس لنرى أن أضلاع المثلث متساوية .

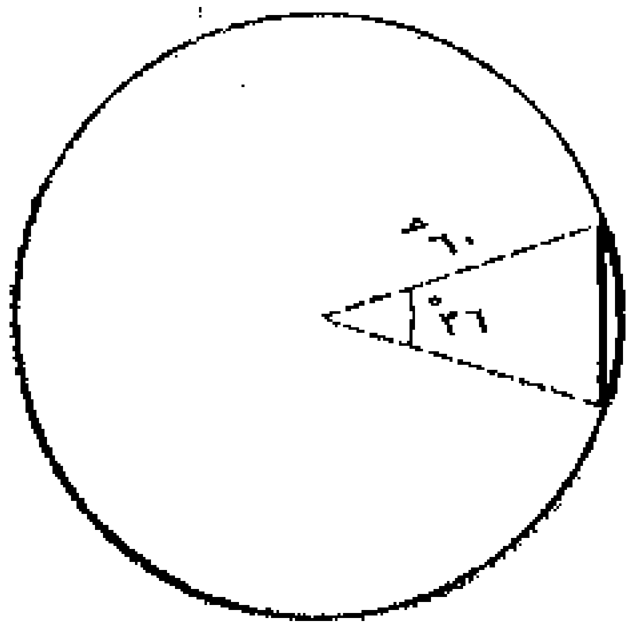
المستقيم المنقط نصف قطر فى الدائرة ، وعلى ذلك فهو يحتوى على ٦٠ من وحدات القطر المائة والعشرين (التى استخدمها الإغريق) وبذلك يكون طول



شكل (٣٩)

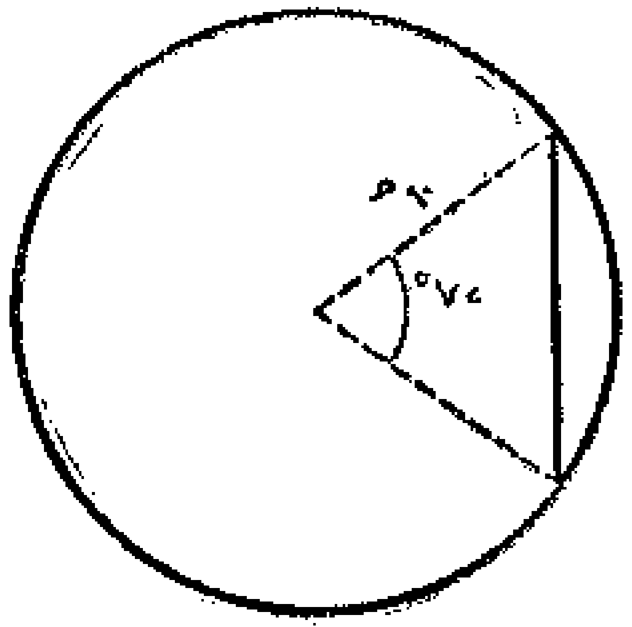
الوتر ٦٠ وحدة من هذه الوحدات ، فإذا رمزنا لهذه الوحدات أو الأجزاء بالرمز ح مكتوبا على يسار العدد إلى أعلى فإن الوتر ٦٠° = ٦٠ح (نعنى بالوتر ٦٠ طول الوتر الذى يقبل زاوية مركزية ٦٠°).

وفيما يلى سنجنب القارىء دراسة المعلومات الهندسية اللازمة فى بعض العمليات ، إلا أنه إذا تذكر الهندسة التى درسها فى المدرسة فإنه يستطيع أن يتحقق (مستعملا هندسة إقليدس) من دقة النتائج التى وصل إليها هيباركوس (أو بطليموس ؟) منذ أكثر من عشرين قرنا، فلا يلبث أن يزداد تقديره للعقلية الفذة التى كانت لهيباركوس وغيره من الرياضيين الإغريق.



شكل (٤٠)

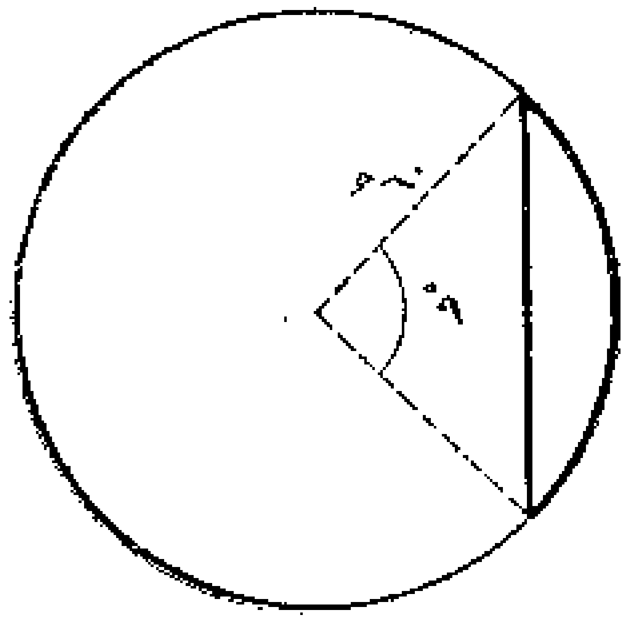
الوتر ٣٦° = ٣٧ ٤َ ٥٥ً



شكل (٤١)

الوتر ٧٢° = ٧٠ح ٣٢َ ٣ً

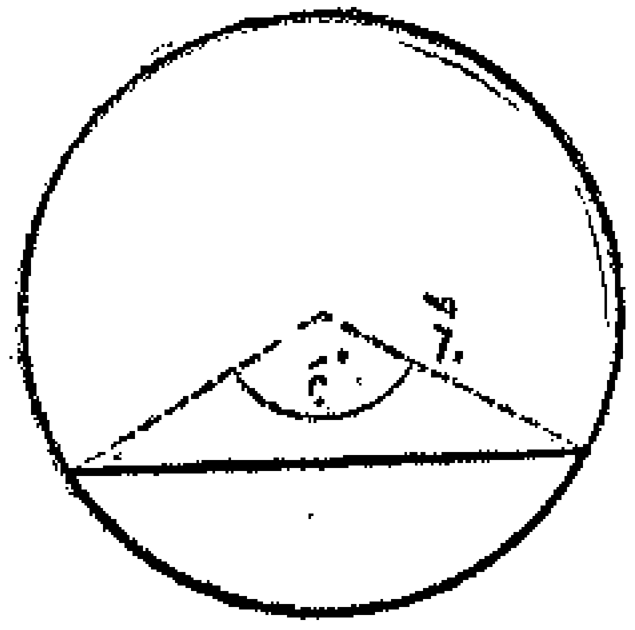
قارن هاتين النتيجتين . لقد زاد مقدار الزاوية إلى الضعف، ولكن طول الوتر لم يزد إلى الضعف .



شكل (٤٢)

الوتر ٩٠° = ٨٤ح ٥١َ ١٠ً

الوتر ١٢٠° = ١٠٣^ ٥٥′ ٢٣″



شكل (٤٣)

وفيما يلى بعض النتائج الأخرى، وسنترك للقارئ أن يرسم الأشكال إذا أراد :

الوتر ٢° = ٢^ ٥′ ٤٠″

الوتر ١° = ١^ ٢′ ٥٠″ تقريباً

الوتر ½° = ٠^ ٣١′ ٢٥″ تقريباً

ولقد قدم بطليموس فى كتاب الماجست جدولا يعطى أطوال الأوتار التى تناظر أقواسا تقبل زوايا بين ½°، ١٨٠° فى فترات من ½° ، ولسنا نستطيع تحديد ماقام به بطليموس نفسه فى هذا العمل الابتكارى الرائع التى قضى جهداً كبيراً جداً إلا أن هيباركوس — وربما ميناالاوس أيضاً — قد قام بقدر كبير من العمل الابتدائى .

ولو استمررنا فى رواية قصة « الأوتار » لوجدنا أنفسنا فى الهند بعد مضى ثلاثة قرون ونصف قرن من كتابة الماجست ، وكان الرياضيون الهنود قد درسوا أعمال الإغريق ، وخاصة الماجست ، وعرفوا طريقة الاغريق فى حساب طول الوتر ، وتوصلوا منها إلى فكرة أدت كما سنرى — إلى تطور هام فى حساب المثلثات .

ولنقدم الآن الرياضى والفلكى الهندى أريابهاتا Aryabhata ، وقد كان مشهورا حوالى ٥٠٠ ميلادية فى باتاليباتو Patalipatual على نهر الجانج الأعلى بالهند حيث قام بعمليات معقدة كثيرة ، لايمكن اعتبارها الآن هندسية بل حسابية أو جبرية ، ساعدت على تقدم دراسة الجبر .

وفى حساب المثلثات أجرى أريابهاتا تغييرين هامين فى حساب طول وتر الدائرة : أولها أنه استبدل طول نصف الوتر بطول الوتر ، وثانيا أنه استخدم وحدة واحدة لقياس القوس (أى الزاوية التى يقبلها عند المركز) ونصف القطر ونصف الوتر ، تلك هى الدقائق الزاوية .

كيف يمكن استخدام القياس الزاوى فى تقدير طول خط مستقيم ؟ تصور قطعة من الخيط طولها يساوى نصف قطر الدائرة وتنطبق على محيط هذه الدائرة — فى هذه الحالة تكون الزاوية المركزية التى يقبلها الخيط مساوية المقدار الزاوى لقوس مساوية لنصف القطر ، والآن كيف يمكن حساب هذا المقدار الزاوى ؟ يتوقف ذلك على قيمة ط التى ناقشناها فى صفحة ٧٠ . (لاحظ أن الحرف اليونانى π لم يستعمل للدلالة على النسبة بين محيط الدائرة وقطرها إلا فى أواخر القرن الثامن عشر) .

ولقد كان معروفا منذ أبعد العصور أن هناك ارتباطا بين طول قطر الدائرة ومحيطها ، ويبدو أن جهد البابليين والعبرانيين لم يوصلهم إلا إلى أن قيمة ط هى ٣ . يدل على ذلك أنه جاء فى العهد القديم (فى سفر الملوك الأول إصحاح ٧ عدد ٢٣) وصف مسبوك ، ولعله إناء معدنى أبعاده « عشر أذرع من شفته إلى شفته ، وكان مدورا مستديرا ، ارتفاعه خمس أذرع وخيط ثلاثون ذراعا

يحيط به»، وترد نفس هذه الأبعاد فى سفر أخبار الأيام الثانى أصحاح ٤ عدد ٢ .

أما المصريون فإنهم حتى فى العصر الذى كتب فيه قرطاس أحمس ، أى قبل عام ٢٢٠٠ قبل الميلاد وصلوا عن طريق القياس المباشر إلى أن قيمة ط هى ٣,١٦٠٥ ، وقد استطاع أرشميدس كما رأينا فى الفصل الثانى أن يصل إلى أن قيمة ط تقع بين ٣,١٤٠ ، ٣,١٤٢ . أما أريابهاتا فقد اقترب من القيمة الحقيقية فقد أوجدها $\frac{٦٢٨٣٢}{٢٠٠٠٠}$ أى ٣,١٤١٦ .

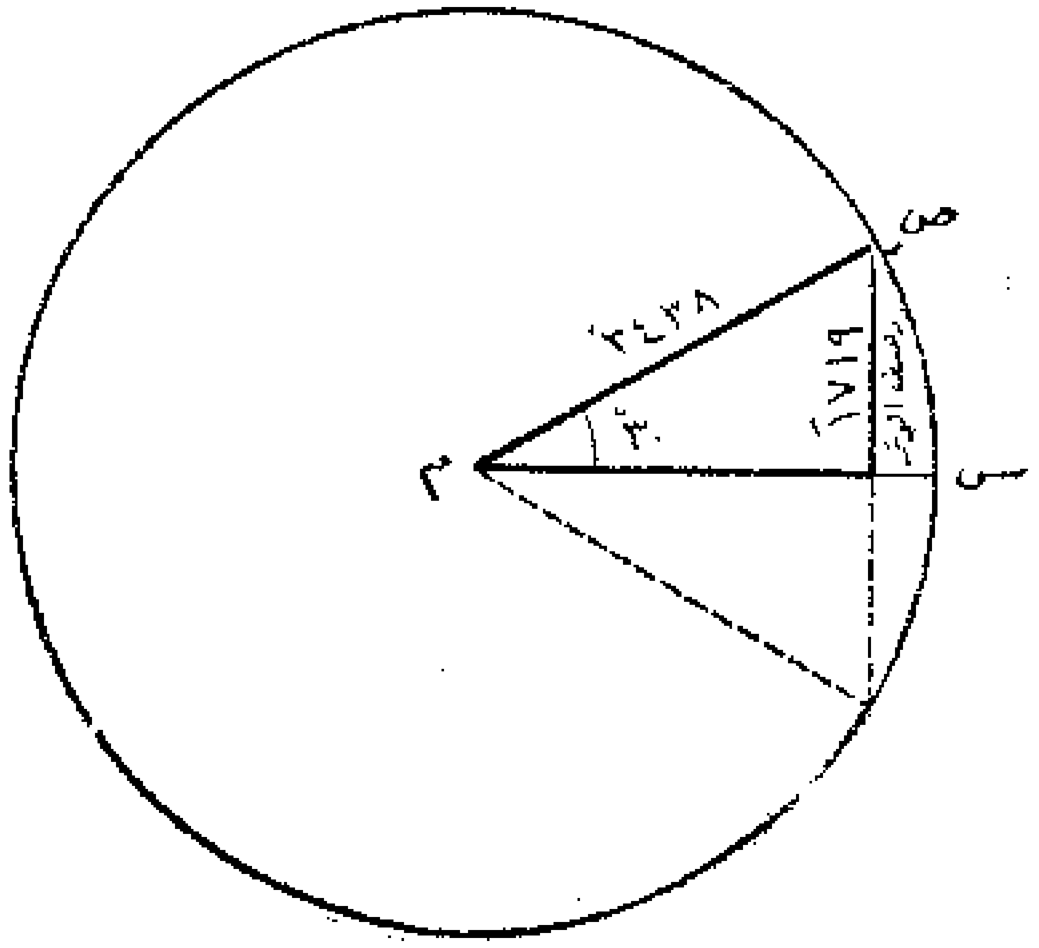
أما وقد عرفنا أن محيط أى دائرة يساوى قطرها ٣,١٤١٦ مرة فإن المحيط يكون ٦,٢٨٣٢ مرة نصف القطر ، ويصبح أمرا سهلا أن نقسم ٢١٦٠٠ وهو عدد الدقائق فى ٣٦٠° (القياس الزاوى لمحيط الدائرة) على ٦,٢٨٣٢ فيكون الجواب هو عدد الدقائق فى أى قوس دائرية مساوية لنصف قطر الدائرة . بهذه الطريقة توصل أريابهاتا إلى أن القيمة التقريبية لنصف قطر أى دائرة مقدراً بالتقدير الزاوى هى ٣٤٣٨ دقيقة ، وهى قيمة تذكر القارىء الرياضى بالقيمة الحديثة ٥٧° ١٧َ ٤٤,٨ً أو ٣٤٣٧,٧٤٧َ بتقديرنا الدائرى الحديث .

وكى يستطيع القارىء غير الرياضى أن يفهم استخدام أريابهاتا لنصف الوتر ، ينبغى أن يدرس شكل ٤٤ دراسة دقيقة ، إذ أن هذه هى الطريقة التى تستخدم الآن بعد بعض التعديل . إن أهم مافى الأمر من وجهة النظر الحديثة ، هو أن أريابهاتا قد استخدم مثلثا قائم الزاوية ، هذا المثلث الذى يعتبر اليوم أساساً لجميع « الدوال » فى حساب المثلثات .

وبدلا من أن يوجد طول الوتر الذى يقبل زاوية ٣٠° مثلا عند المركز ،

كما كان الإغريق يفعلون ، فإن أريابهاتا أوجد طول نصف الوتر الذى يقبل زاوية ٦٠° ثم ربط بين هذا الطول ونصف الزاوية أى ٣٠° .

وواضح فى شكل ٤٤ أن نصف الوتر لايساوى طول الوتر س ص الذى يقبل زاوية ٣٠° ، لذلك فإن هناك فرقاً أكبر مما يبدو لأول وهلة ، بين نصف الوتر عند الهنود (وعندنا الآن) كما يستخدم فى حساب المثلثات ، والوتر عند الإغريق كما استخدمه هيباركوس وبطليموس ، إذ أن نصف الوتر المرتبط بزاوية معينة عندنا لايساوى نصف الوتر الذى يقبل هذه الزاوية عند المركز ، بل هو نصف الوتر الذى يقبل ضعف هذه الزاوية ، فإذا كانت ا زاوية حادة فإن حا = ½ الوتر ٢ا .



شكل (٤٤)

وقد أطلق أريابهاتا بالطبع اسماً هندياً على نصف الوتر هذا ، ذلك هو جيفا ، ثم حسب قيمة جيفا ٣٠° فوجدها ١٧١٩َ ، وجيفا ١٥° فوجدها ٨٩٠َ (القيمة الأكثر دقة هى ٨٨٩,٧٦َ) وجيفا ٧° ٣٠َ فوجدها ٤٤٩َ (القيمة الأكثر دقة هى ٤٤٨,٧٢َ) ولقد وردت هذه القيمة فى أحد كتبه .

ننتقل الآن إلى قصة الأوتار فى بلاد العرب ، فلقد سار بعض الرياضيين العرب فى إثر أريابهاتا ، واستخدموا كلمة جيفا وكتبوها بالعربية جيبا ، وواضح أنها كلمة لامعنى لها إلا المعنى الفنى المتصل بنصف الوتر ، أما الكلمة العربية جيب فليس لها أى صلة بأوتار الدائرة ، بل تعنى «فتحة فى الرداء» وقد تحورت كلمة جيبا إلى جيب .

ولننتقل بالحديث الآن إلى أوروبا ، إلى بلدة توليدو فى إسبانيا حوالى عام ١١٥٠ ، فهناك قام معهد لترجمة المخطوطات العربية (بعضها منقول عن اليونانية) إلى اللاتينية خدمة لرجال المعرفة فى أوروبا خلال القرون الوسطى، ولقد عمل فى هذا المعهد مترجم مشهور اسمه جيراد والكريمونى Gherado of Cremona قضى سنوات كثيرة يترجم نسخاً عربية من أعمال أرسطو ، والأصول لإقليدس ، والجبر للخوارزمى ، والماجست لبطليموس وغيرها من المخطوطات العربية التى كان من بينها كتاب فى حساب المثلثات ، وعندما جاء جيرادو إلى كلمة جيب تملكته الحيرة إذ لم يجد أى صلة بين كلمة جيب العربية وبين طول نصف الوتر وأخيراً قرر أن يترجم الكلمة حرفيا فترجمها إلى الكلمة اللاتينية sinus التى تعنى « فتحة فى الرداء » أيضا . ثم اختصرت إلى sin كما نستخدمها اليوم ، وهكذا فى كل مرة ننطق كلمة sin نكرر خطأ وقع فيه مترجم منذ ٨٠٠ عام .

واليوم لا يدل جيب الزاوية على طول نصف الوتر ، كما كانت الحال حتى القرن الثامن عشر ، بل يدل على نسبة ، فكيف أصبح الجيب نسبة ؟ لقد تم هذا قبل عصر الرياضى السويسرى الأشهر أويلر الذى عاش بين عامى ١٧٠٧

و ١٧٨٣، إذ أنه فى جميع أعماله يستعمل جيب الزاوية كنسبة ، ولقد كان أويلر هو الذى أتم تحويل حساب المثلثات من أساسه الهندسى إلى أساس جبرى. إن بداية هذا التحويل كانت فى عام ١٥٥٠ ، أما تمامه فقد كان على يد أويلر .

ولقد كانت الخطوة الأولى التى أدت إلى هذا التغير بسيطة ، ولعلها تبدو غير ذات أهمية ، فما إن عرفت الطريقة التى تكتب بها الآن الكسور العشرية حتى توقف اختيار جيب الزاوية طولا وأصبح نسبة .

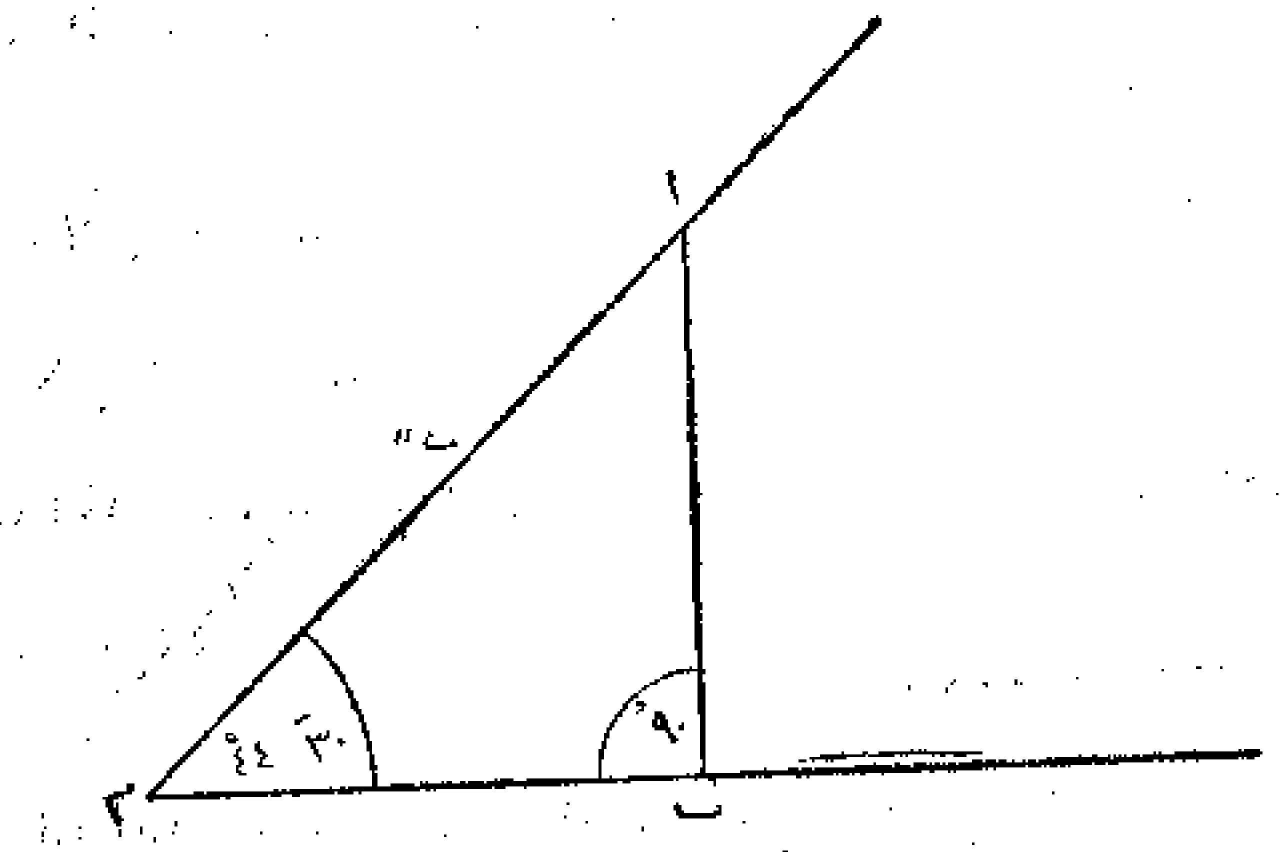
إذا تأمل القارىء جدولا حديثا من جداول الجيوب لوجد مثلا أن جا٣٠َ ٤٤ْ = ٧٠٠٩١و ، فما معنى هذا ؟ أولا تذكر أن هذا ليس طولا كما كانت قيمة الجيب والأوتار من أيام هيباركوس حتى أيام أويلر، بل هى نسبة وليست النسبة كمية ، بل عددا مجردا ، لذلك يمكن الحصول عليها دون نظر للوحدة التى قيست بها الكميتان التى نقارن بين مقداريهما ، ما دامت الكميتان قد قيستا بوحدة واحدة ، كذلك يمكن استعمال النسبة كعدد مجرد دون تمييزه بالبوصات أو الدقائق أو الأقدام المكعبة وهكذا .. أى إن النسبة جبرية وليست هندسية ، وعلى ذلك فإن النسبة بين ١٧١٩ دقيقة زاوية ، ٣٤٣٨ دقيقة زاوية لا تتصل بالزوايا ولا بالدوائر بل هى العدد $\frac{١٧١٩}{٣٤٣٨}$ أى $\frac{١}{٢}$ ، كذلك فإن النسبة بين ٣ بوصات و ١٢ بوصة لا تتصل بأطوال المستقيمات بل هى العدد $\frac{٣}{١٢}$ أى $\frac{١}{٤}$ أى ٢٥و٠ لقد كان التطور فى الكسور العشرية ونشأة طريقة نابيير Napier فى كتابتها هو الذى مكننا من كتابة أى كسر لأى درجة من الدقة فى صورة سهلة التناول ، وبذلك أصبح الطريق ممهدا لكى تحل النسبة العددية محل الأطوال فى حساب المثلثات .

ولقد كان التعبير عن جيب الزاوية بنسبة فى صورة كسر عشرى بدلا من طول أول خطوة فى تحويل حساب المثلثات من علم هندسى إلى علم جبرى ، ونتيجة لذلك حصل الرياضيون والعلماء والمهندسون ومساحو الأرض ، وغيرهم عدد لا يحصى، على أداة رياضية قوية .

كيف نعبر عن جيب ٣٠َ ٤٤° فى صورة نسبة ؟ . ما الكميتان اللتان تكون إحداهما بسطا والأخرى مقاما . إذا نظرنا مرة أخرى إلى شكل ٤٤ لوجدنا أن قيمة الجيب تجىء من أحد أضلاع المثلث القائم الزاوية الذى بدأه أريابهاتا ، لاحظ أن هذا الضلع هو المقابل للزاوية التى يطلب إيجاد جيبها . لاحظ كذلك أن طول ضلع ثان فى هذا المثلث يدخل فى الحساب ، حتى فى عصر أريابهاتا نظراً لأن عدد الدقائق التى تدل على طول نصف الوتر تتوقف على عدد الدقائق التى اختارها لنصف القطر ، ذلك هو الأساس الذى يمكننا من استخدام المثلث فى إيجاد الكميتين اللازمتين للنسبة وإهمال الدائرة ونصف القطر ونصف الوتر كلية . كل ما يلزمنا هو مثلث قائم الزاوية ، إحدى زاويتيه الحادتين تساوى الزاوية المطلوبة إيجاد جيبها ، ويكون الضلع المقابل لهذه الزاوية بسطاً للكسر (الدال على النسبة) وهو ما يناظر « نصف الوتر » عند أريابهاتا ، أما مقام الكسر فهو طول الضلع المقابل للزاوية القائمة ، وهو يناظر نصف القطر عند أريابهاتا ، فإذا أردنا الآن أن نزيد على أنفسنا العمل من غير داع لحسبنا كلا من هذين الضلعين بالدقائق الزاوية ، أو بأجزاء من ٦٠ أو من ١٠٠ أو من ١٠٠٠ أو من مليون أو من ١٠ ملايين أو حتى من ١٠ بلايين من نصف القطر ، لقد استعملت جميع هذه الوحدات ثم أهملت بعد أن أصبحت لدينا الكسور العشرية .

كل ما يلزمنا هو أن نقيس المستقيمين بالبوصات ثم ينتهى الأمر ، ونظرا لأن النسبة عدد مجرد ، فإنها لا تتأثر بنوع الوحدة التى يقاس بها كل من المستقيمين .

فإذا أردنا مثلا أن نوجد قيمة جيب ٣٠َ ٤٤° من غير استعمال للجداول ، فإننا أولا نرسم مستقيمين (غير محدودى الطول) يتقابلان فى نقطة م . ويصنعان زاوية ٣٠َ ٤٤° ثم نختار واحدا من هذين المستقيمين ونأخذ عليه البعد م ا يساوى



شكل (٤٥)

بوصتين مثلا (يمكن أن نأخذ أى طول آخر) ، ومن ا نرسم مستقيما ا ب عمودياً على الضلع الآخر للزاوية كما هو موضح فى شكل ٤٥ .

نقارن هذا الشكل بشكل ٤٤ الذى وضعه أريابهاتا تجد أنك إذا رسمت فى شكل ٤٥ دائرة مركزها م ، ونصف قطرها م ا فإن ا ب يكون هو « جيبا » ٣٠َ ٤٤° كما وضعه الهنود .

كذلك فإنك تلاحظ أنك بدلا من أن تأخذ م ا (نصف القطر عند أريابهاتا) التقدير الزاوى ٣٤٣٨َ كما كان الهنود يفعلون فإننا نأخذ قيمته الطولية

٣ بوصة . فإذا قسنا ا ب قياسا دقيقا ، كما تمكننا من ذلك المسطرة ، فإن طوله يكون ٤و١ بوصة ، وكل ما يبقى الآن هو أن نقارن بين طولى ا ب ، م ا وبذلك نتبع الفكرة التى نشأت فى القرن السادس عشر وهى (لنتخلص من جميع هذه الوحدات الطولية التى ظللنا قرونا طويلة نستخدمها للدلالة على جيب الزاوية ونحل محلها نسبة عددية) أى أن نوجد قيمة النسبة $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية}}{\text{طول أكبر ضلع فى المثلث}}$

ومن الأبعاد الموضحة فى شكل ٤٥ يكون جيب ٣٠ ٤٤° $= \frac{\text{١,٤}}{\text{٢}} =$ ٧و٠

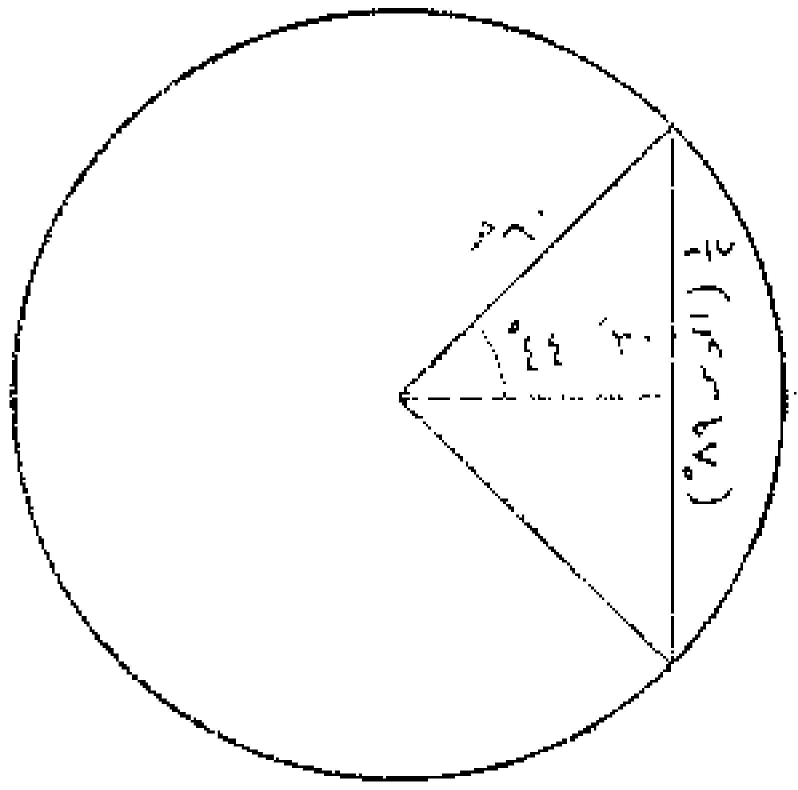
ونظراً لأن هذه النتيجة تقوم على الرسم والقياس فإنها لا تكون من الدقة بحيث يمكن استخدامها فيما يقوم به الرياضى من حسابات ، وقد رأينا أن جدولنا الحديث للجيوب الذى لا يعتمد على رسم أو قياس يعطى ٧٠٠٩١و٠ قيمة لجيب ٣٠َ ٤٤° .

لقد قلنا إننا نستطيع أن نأخذ أى طول للمستقيم م ا ، فإذا أخذناه ٣ بوصات لوجدنا طول ا ب هو ١و٢ بوصة إلا أن النسبة $\frac{\text{ا ب}}{\text{م ا}}$ لا تزال $\frac{\text{٢و١}}{\text{٣}}$ = ٧و٠ ، وإذا أخذنا م ا مساويا ٤ بوصات فإن ا ب يكون ٨و٢ بوصة ولكن النسبة تظل $\frac{\text{٢,٨}}{\text{٤}} =$ ٧و٠ .

كيف كان أريابهاتا يعبر عن جيب ٣٠ ٤٤° ؟ كان يعبر عنها هكذا : جيبا ٣٠َ ٤٤° = ٢٤٠٧َ . وبذلك تكون النسبة بين جيبا (أى نصف الوتر مقدراً بالدقائق) ونصف القطر مقدراً بالدقائق أيضاً هى $\frac{\text{٢٤٠٧}}{\text{٣٤٣٨}}$ وهذه إذا أوجدنا

قيمتها بالطريقة الحديثة لوجدناها ٧٠٠١و٠ وهى قيمة لا تبتعد كثيراً عن قيمتنا الحديثة ٧٠٠٩١و٠ لجيب ٣٠َ ٤٤° .

كيف كان هيباركوس يعبر عن جيب ٣٠َ ٤٤° ؟ لقد رأينا أن جيب ا = ½ الوتر ٢ ا ، أى إن جا ٣٠َ ٤٤° = ½ الوتر ٨٩° كما يتضح فى شكل ٤٦ .



شكل (٤٦)

لاشك أن هيباركوس كان يقول :

الوتر ٨٩° = ٢٨َ ٦َ ٨٤ج وعلى ذلك فإن ½ الوتر ٨٩° = ١٤َ ٣َ ٤٢ج .

فإذا أردنا كتابة ذلك بالطريقة الحديثة كان علينا أن نوجد النسبة $\frac{\text{١٤َ ٣َ ٤٢ج}}{\text{٦٠ج}}$ ، وذلك لأن هيباركوس والإغريق كانوا يعتبرون نصف القطر ٦٠ج من الـ ١٢٠ج التى يقسمون إليها القطر .

بسط هذا الكسر = ٤٢ + ٣/٦٠ + ١٤/٣٦٠

= ٤٢ + ٠٫٠٥ + ٠٫٠٠٣٦

= ٤٢٫٠٥٣٦ جزء من أجزاء القطر

مقام الكسر = ٦٠ جزء من أجزاء القطر

وهكذا إذا حسبنا قيمة النسبة ٤٢٫٠٥٣٦ / ٦٠ لوجدنا أن النتيجة التي وصل إليها الإغريق لجيب ٣٠َ ٤٤° هي ٠٫٧٠٠٨٩ تناظر ٠٫٧٠٠٩١ التي تعطيها الجداول الحديثة ، والمؤلف هنا يعترف أنه استخدم في حساب قيمة ٢٨ ٦َ ٨٤ج أساليب رياضية لم تكن معروفة عند هيباركوس ، وذلك تفاديا لعمل لا لزوم له ، وعلى كل فإن هيباركوس كان دون شك يحصل على نفس النتيجة وربما على نتيجة أدق ، باستخدام طرق مطولة تعتمد على هندسة إقليدس .

وإن القارىء الذي يجد في الرياضيات متعة — ولعله يبدو غريبا لمن تعلم الرياضيات بأساليب من نوع معين أن تكون الرياضيات مصدرا للمتعة — ليسره أن يرى قرب النتائج التالية التي وصل إليها بطليموس (أو لعله هيباركوس) وأريابهاتا من القيمة الحديثة :

الوتر ٦٠° = ٦٠ج — جيفا ٣٠° = ١٧١٩َ (جيب ٣٠° = ٠٫٥)

الوتر ٣٦ = ٣٧ج ٤َ ٥٥ً — (جيب ١٨° = ٠٫٣٠٩٠٢)

جيفا ١٥° = ٨٩٠َ — (جيب ١٥° = ٠٫٢٥٨٨٢)

الوتر ٧٢° = ٧٠ج ٣٢َ ٣ً — (جيب ٣٦° = ٠٫٥٨٧٧٩)

الوتر ٩٠° = ٨٤ج ٥١َ ١٠ً — (جيب ٤٥° = ٠٫٧٠٧١١)

جيفا ٣٠ ٧° = ٤٤٩َ — (جيب ٣٠َ ٧° = ٠٫١٣٠٥٣)

الوتر ١٢٠° = ١٠٣ج ٥٥َ ٢٣ً — (جيب ٦٠° = ٠٫٨٦٦٠٣)

جيفا ١٥ ١١° = ٦٧١ — (جيب ١٥َ ١١° = ٠٫١٩٥٠٩)

الوتر ١٢° = ١٢ج ٣٢َ ٣٦ً — (جيب ٦° = ٠٫١٠٤٥٣)

جيفا ٤٥َ ٣° = ٢٢٥َ — (جيب ٤٥َ ٣° = ٠٫٠٦٥٤٠)

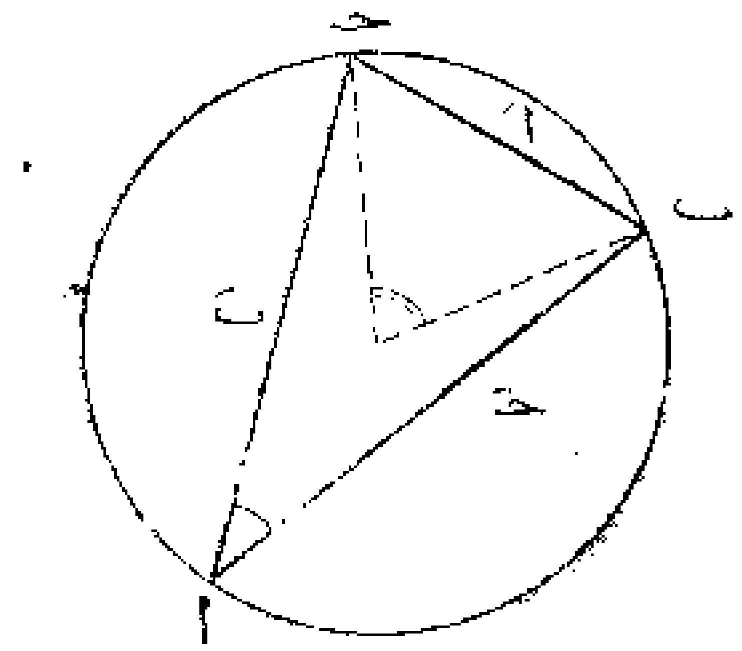
والآن لنتابع قصة نشأة حساب المثلثات ، لقد جذبنا الجيب وما سبقه خلال العصور الماضية بعيداً عن بلاد الإغريق في عهد هيباركوس ، ولعل هذه الرحلة الطويلة قد أعطت للقارىء صورة عن هذا الجزء من تطور حساب المثلثات أوضح منها لو أننا عرضنا قصة الجيب قطعا منفصلة في كل زمن تمر به .

كيف استفاد هيباركوس ومن تبعه من الإغريق من جداول الأوتار هذه؟ فمن هذا الذي ينفق الساعات الطويلة في عمل متصل لحساب طول الوتر المناظر لكل نصف درجة من ½° إلى ١٨٠° ما لم يكن لذلك فائدة كبيرة ؟ .

لقد كان استعمالها الأساسي — إلى جانب استعمالها في الحسابات الفلكية — في حل المثلثات المستوية أي المثلثات المرسومة على سطح مستو كهذه الصفحة . فإذا أعطينا بعض البيانات عن مثلث ، مثل طول كل ضلع من أضلاعه أو طولي ضلعين والزاوية المحصورة بينهما وهكذا ، فإننا نستطيع أن نوجد العناصر الباقية في المثلث . تسمى هذه العملية « حل المثلث » .

وحل المثلث اليوم أمر سهل إذا قمنا به خطوة خطوة ، ولكن الأمر لم

يكن كذلك عند الإغريق ، فعند حل أى مثلث مستو تصوروه داخل دائرة وبذلك يكون كل ضلع من أضلاع المثلث وترا فى الدائرة ، وكل زاوية من زواياه نصف القوس المحصور بين نهايتى الضلعين اللذين يحصرانها .



شكل (٤٧)

لسنا نحتاج إلا إلى قدر ضئيل من الهندسة لنتبين أن الزاوية ا نصف الزاوية المركزية التى يقدر بها القوس ب حـ ، وعلى ذلك فإن الزاوية ا تساوى « نصف القوس ب حـ » وهنا تتضح قيمة جدول الأوتار كذلك الذى وضعه هيباركوس ، إذ أن القارىء الرياضى سيلاحظ ولا شك العلاقة بين شكل ٤٧ والقانون اَ / جا ا = بَ / جا ب = حـَ / جا حـ

لقد استعمل الإغريق هذا القانون وكثيراً غيره ، ونظراً لأن الرياضيين فى المرحلة التى نستكشفها الآن كانوا مشغولين بتطبيق الهندسة فى الفلك فقد كان جل اهتمامهم موجها نحو حل المثلثات الكرية ، وينبغى قبل أن نتأمل الحساب المتصل بهذه المثلثات أن ندرك أن كثيراً من الحقائق الهندسية عن الكرة كانت معروفة منذ آلاف السنين ، بل إن رصيداً ضخماً منها قد تجمع قبل

أن يكتب إقليدس كتاب الأصول ، فقد استخدم فيه نظريات كروية بلغت من الشيوع درجة لم يجد معها داعياً أن يعطى براهينها .

ومما لاشك فيه أنه قبل عام ١٠٠ ميلادية أى ٣٥٠ عاماً قبل أن يوجد إراتوثنيس محيط الأرض — كما رأينا فى الفصل الثانى — كانت هندسة الكرة قد تقدمت تقدما كبيراً ، فمثلا قسمت الدوائر التى يمكن رسمها على كرة إلى « دوائر كبرى » و« دوائر صغرى » ، والتعريف الرياضى للدائرة الكبرى هو « خط تقاطع الكرة مع مستوى يمر بمركزها » ، أما الدائرة الصغرى فهى كل دائرة يمكن رسمها على الكرة ولا تتفق مع التعريف السابق ، وعلى ذلك فإن خطوط العرض فيما عدا خط الاستواء دوائر صغرى . أما خط الاستواء فهو دائرة كبرى ، كذلك فإن أى دائرة تمر بالقطبين الشمالى والجنوبى دائرة كبرى . وأقصر مسافة بين نقطتين على كرة هى القوس الأصغر من الدائرة الكبرى التى تمر بهما .

والدليل على أن هذه وحقائق غيرها عن الكرة كانت معروفة تماماً قبل عام ١٠٠ ميلادية هو أن مينلاوس الاسكندرى أب حساب المثلثات الكرى قد عالج الهندسة الكرية فى جزأين من الأجزاء الثلاثة لمؤلفه Sphaerica الذى يعتبر أهم أعماله .

ويبدأ بتعريف المثلث الكرى بأنه « المساحة التى تحدها أقواس دوائر كبرى فى الكرة » دون أن يهتم بتعريف الدوائر الكبرى اعتماداً على أنها مألوفة لدى قارىء كتابه .

ويستطيع القارىء غير الرياضى أن يدرك الارتباط بين المثلث الكرى

والدوائر الكبرى بأن يضع ثلاث قطع من الخيط المطاط كدوائر كبرى حول كرة (إذا لم تنزلق الخيوط المطاطة يستطيع أن يفترض على وجه التقريب أن الخيوط دوائر كبرى) . أى خيطين منها يقسمان الكرة إلى أربعة أهلة ، فإذا وضع الخيط الثالث بشرط ألا يمر بنقطة تقاطع الأولين ، فإنه يقسم كل هلال إلى مثلثين كريين .

وعلى وجه العموم أى ثلاث دوائر كبرى فى الكرة تقسمها إلى ثمانية مثلثات كرية ، ومن الممكن أن تحصر « ثلاث دوائر كبرى متقاطعة » مساحة تكون إحدى الأقواس التى تحدها أكبر من نصف دائرة وإحدى زواياها أكبر من ١٨٠° ، ونظراً لأن الأقواس التى تحد هذا المثلث عناصر لمثلثات أخرى أضلاعها أصغر من أنصاف دوائر ، وكل زاوية من زواياها أقل من ١٨٠° فإننا لا نحتاج إلى حل ذلك المثلث ، ولقد وصل مينلاوس إلى ذلك وقصر مناقشته على المثلثات التى يكون كل ضلع من أضلاعها أقل من نصف دائرة .

ويقدم مينلاوس فى الجزء الثالث من Sphaerica أقدم عمل فى حساب المثلثات الكرى ، فهو يضع فيه الحجر الأساسى لفرع من الرياضيات ضرورى ، لا للفلكيين والجغرافيين فقط ، بل لرجال البحر أيضاً .

ومجال كتابنا هذا لا يسمح بعرض التفاصيل الفنية لحساب المثلثات الكرى ، إلا أنه لا يلزم إلا قليل من المعرفة الرياضية لفهم المبادىء العامة لهذا العلم التى يقوم عليها تطبيقه فى الملاحة .

إن الهدف الأساسى لكل ملاح هو أن يحدد مكانه على سطح الأرض ، وفى سبيل ذلك ينبغى أن يعرف خطى طوله وعرضه ، وعلى القارىء الذى لا يعرف معنى هذين المصطلحين أن يدرس الصفحات ١٦٣ إلى ١٦٨ قبل أن يتابع القراءة .

لا يحتاج الملاح إلى معرفة فى حساب المثلثات كى يحدد خط الطول ، إذ يكفيه أينما كان على سطح الأرض ، أن يعرف الوقت فى جرينتش ، ويستطيع ذلك اليوم عن طريق الراديو أو كرونومتر مضبوط على جرينتش ، ولقد حدث فى عام ١٧١٤ أن قدمت الحكومة الانجليزية جوائز قدرها ١٠٠٠٠ ، ١٥٠٠٠ ، ٢٠٠٠٠ من الجنيهات (وهى مبالغ هائلة فى ذلك الوقت) لمن يصنع كرونومترا يمكن من تحديد خطوط الطول فى مدى ٦٠ ، ٤٠ ، ٣٠ من الأميال على الترتيب ، ولقد استطاع صانع ساعات من يوركشير اسمه جون هاريسون John Harrison أن يربح الجائزة الكبرى ، إلا أن الجائزة كلها لم تعط له إلا فى عام ١٧٧٦ .

ونظراً لأن الأرض تدور ٣٦٠° فى ٢٤ ساعة فإنها تدور ١٥° كل ساعة ، ١٥′ كل دقيقة ، ١٥″ كل ثانية ، والآن لنفترض أن الشمس قد أشرقت الساعة الخامسة صباحا فى جرينتش ، وفى كل مكان على خط طول جرينتش ، ففى اللحظة التى تبدأ فيها أشعة الشمس فى الوصول إلى جرينتش يكون ظلاما فى جميع الأماكن التى تقع بين خط طول جرينتش وخط طول ١٨٠° غربا ، ونهارا فى جميع الأماكن التى تقع بين خط طول جرينتش و ١٨٠° شرقا ، ونظراً لأن الأرض تدور من الغرب إلى الشرق فإن الشمس تبدو كما لو كانت تتحرك من الشرق إلى الغرب ، وعلى ذلك فإن كل مكان على خط الطول ١٥° غربا من جرينتش تشرق فيه الشمس ساعة بعد شروقها فى جرينتش ، وكل مكان يقع على خط الطول ١٥° شرقا تشرق فيه الشمس ساعة قبل شروقها فى جرينتش .

والآن لنفترض أن ملاحاً على سفينة قد وجد أن الظهر ، أى الوقت الذى

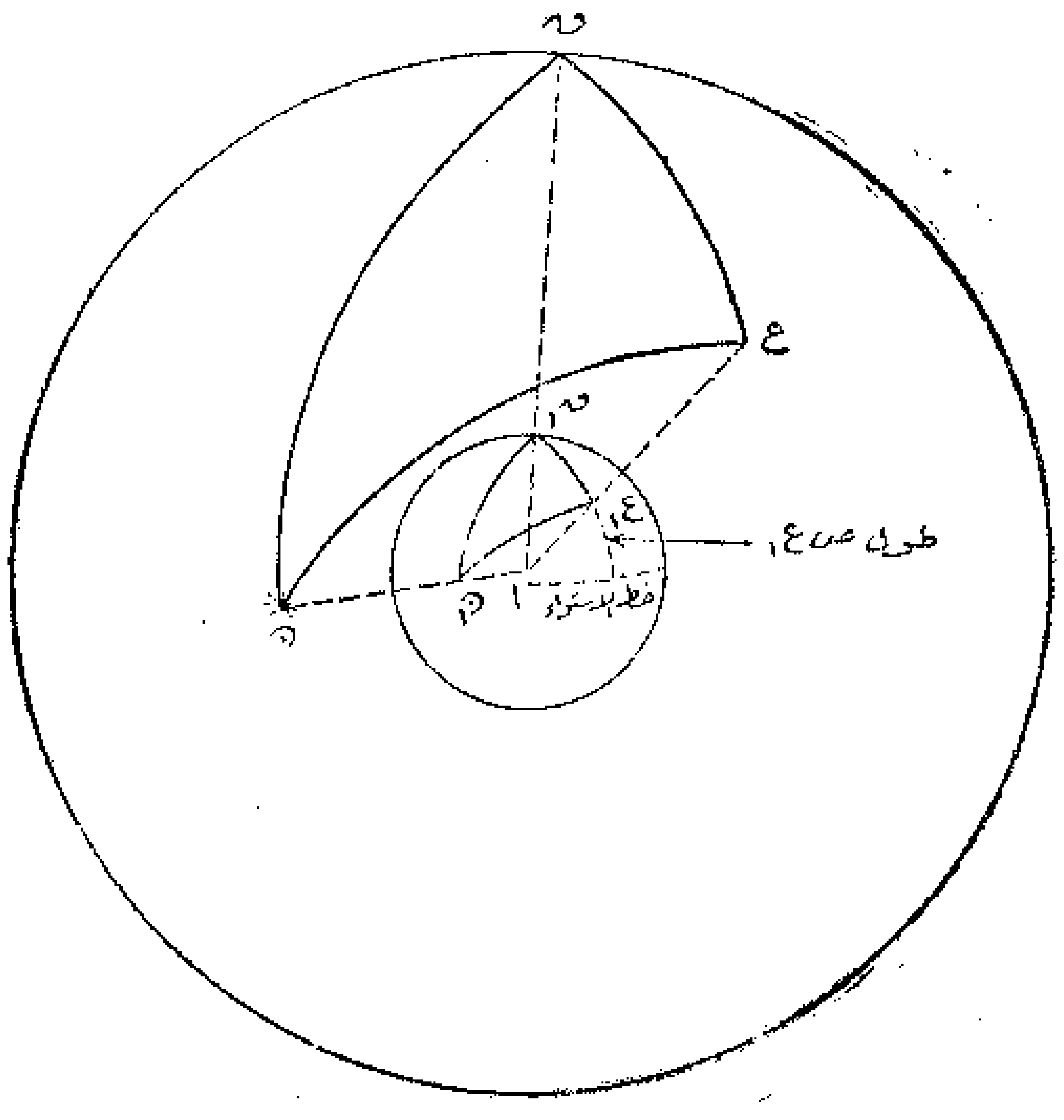
تكون فيه الشمس فوق السفينة تماما، قد حدث الساعة ٢ مساء فإنه يعرف أن خط طوله يكون ضعف ١٥° أى ٣٠° إلى الغرب من جرينتش ، وذلك لأن « الزمن المحلى » فى هذه الحالة متأخر ساعتين عنه فى جرينتش. أما إذا كان الزمن المحلى عنده ظهراً عندما يكون الزمن فى جرينتش ٩ صباحا فإنه يستنتج أن خط طوله يكون ثلاثة أمثال ١٥° — أى ٤٥° — إلى الشرق من جرينتش ، وذلك لأن الزمن المحلى متقدم ٣ ساعات عنه فى جرينتش .

أما إيجاد خط العرض فليس بهذه السهولة ، إذ أنه ينطوى على حساب المثلثات الكرية ، ويعين فى هذه الحالة عن طريق رصد النجوم ، وتسهيلا لفهم الحركة الظاهرية للأجرام السماوية نعتبر الأرض ، كما اعتبرها أرسطو ، مركزا للكون تدور حولها النجوم التى تبدو كما لو كانت معلقة فى سطح كرة سماوية هائلة . ونظراً لأن جميع القياسات التى نأخذها للنجوم تقدر تقديرا زاويا فمن الممكن أن نتصور النجوم نقطا فى الكرة السماوية دون اعتبار لأبعادها الحقيقية عن الأرض .

فى لحظة معلومة يكون لكل نجم نقطة على سطح الأرض تقع تحته تماما ، وبينما يدور النجم ظاهريا فى السماء تتحرك النقطة على سطح الأرض راسمة خطا وهميا يوازى خط استواء الأرض ، أى خطا من خطوط العرض التى لا حصر لها ، ونستطيع عن طريق حساب المثلثات أن نعين الموضع الدقيق لكل نجم هام والنقطة المناظرة له على الأرض ، ويمكن إيجاده بسهولة من أى دليل بحرى أو جوى ، هذا مثال لنوع العمل الذى قام به الأمير البرتغالى هنرى الملاح وزملاؤه الرياضيون ، والرياضيون الذين عينهم عام ١٦٧٥ شارل الثانى ملك انجلترا للعمل فى المرصد الذى بناه لهم فى جرينتش بالقرب من لندن . لقد قام الملك

شارل بذلك للعمل على « تقدم الملاحة والفلك الملاحى » ، وهما أمران بالغا الأهمية لأمة تتوقف حياتها على التجارة الخارجية وعلى السيطرة على البحر .

يوضح شكل ٤٨ الأرض مكبرة ، فى مركز كرة كونية كبرى ، وتمثل النقطة ص القطب الشمالى الكونى ، أى موضع النجم القطبى ، وتقع فوق ص١ تماما حيث ص١ هو القطب الشمالى للأرض . هذا هو النجم الوحيد الذى يظهر ثابتا (الواقع أنه يتحرك فى دائرة صغيرة جدا سنهملها هنا) نظراً لأن محور الأرض يتجه دائما نحوه .



شكل (٤٨)

تمثل النقطة ع السمت وهى نقطة فى الكرة السماوية تقع تماماً فوق الراصد من سفينة على سطح الأرض عند ع١ .

تمثل النقطة ه موضع نجم مرشوق فى سطح الكرة السماوية كما تدل ه١ على النقطة الواقعة على الأرض تحت ه تماما .

لاحظ أن المثلثين الكرويين فى هذا الشكل متشابهان أى إن أحدهما صورة فوتوغرافية مكبرة للأخرى ، زواياهما المتناظرة متساوية وأضلاعهما المتناظرة متساوية إذا قدرت بالتقدير الزاوى كأقواس فى دوائر كبرى ، إذ أن طول القوس يقاس بالزاوية التى يقابلها عند مركز الكرة ، ونظراً لأن الأرض والكرة السماوية متحدان فى المركز فإن التقدير الزاوى للقوس ن ع مثلا هو نفسه التقدير الزاوى للقوس ن١ ع١ ، إذ أن كليهما هو الزاوية ن م ع .

إن التقدير الزاوى للقوس ن١ ع١ (يساوى القوس ن ع) يمكن الحصول عليه من الدليل البحرى. كذلك الزاوية ن١ (التى تساوى الزاوية ن) ، ونظراً لأن القوس ه ع يساوى المسافة بين السمت ع والنجم ه ، وهو الزاوية المحصورة بين النجم والسمت ، فإنه يمكن إيجاد القوس ه١ ع١ ، وعلى ذلك فإنه فى المثلث ن١ ع١ ه١ يكون البعدان الزاويان للضلعين ن١ ه١ ، ه١ ع١ معلومين وكذلك الزاوية ن١ ، وبذلك يمكن حل المثلث ن١ ع١ ه١ وإيجاد جميع العناصر الباقية فيه ، فإذا أوجد التقدير الزاوى للضلع ن١ ع١ فإنه يمكن إيجاد الفرق بينه وبين ٩٠° ، وهو التقدير الزاوى لقوس الدائرة الكبرى من القطب الشمالى إلى خط الاستواء الذى يعتبر ن١ ع١ جزءاً منه ، هذا الفرق يبينه فى شكل ٤٨ الخط المنقط تحت ع١ ، ومن الواضح أنه يساوى خط عرض الراصد .

ولقد كانت طريقة الإغريق فى حل المثلثات الكرية المائلة (وهى التى لا تحتوى على زاوية قائمة) أن يقسموا المثلث إلى مثلثات كرية قائمة الزاوية ، واستعملوا لذلك (فى صورة معقدة) قوانين كثيرة مما نستعملها اليوم فى حل

هذه المثلثات ، إلا أن القوانين التى نستخدمها اليوم لم تصل إلى الكمال إلا فى عام ١٦١٤ عندما وضع نابيير « قواعد الأجزاء الدائرية »(1) التى ما زلنا نستخدمها حتى الآن، ولقد وردت قوانين نابيير هذه فى كتاب عن « اختراع » أدهش الرياضيين وأثلج صدورهم ، ذلك هو اللوغاريتمات .

ويبدو أن حل المثلث الكرى المائل لم يطرأ ببال الإغريق ، وظل الأمر كذلك حتى القرن العاشر عندما بدأ العرب دراسة الموضوع ، ولم يضع فيتا وبتيسكوس أساس الطرق الحديثة التى نتبعها اليوم إلا فى القرن السادس عشر، بتطوير لبعض القوانين إلى الصورة الحديثة ، ولم تنشر قوانين نابيير الأولية التى تتضمن نسباً « متشابهة » إلا بعد وفاته .

لقد قلنا الشيء الكثير حتى الآن عن المثلثات الكرية اعترافا بديننا للرياضيين الإغريق الذين أنشأوا هذا العلم ، فقد كان العبقرى مينلاوس أول من قدم للفلكيين والجغرافيين والملاحين هذه الأداة العملية القوية .

وينبغى أن نذكر على كل حال أن جميع الحسابات والحلول فى حساب المثلثات التى أجراها الرياضيون الإغريق كانت مقصورة على القيم التى تعطيها جداول الأوتار ، وتبعا لذلك كانت طرقهم أكثر عشوائية من تلك التى نشأت منذ وضعت ستة أنواع على الأقل من الجداول فى حساب المثلثات تقوم على نفس الفكرة التى تقوم عليها الجداول الأصلية للأوتار التى وضعها الإغريق .

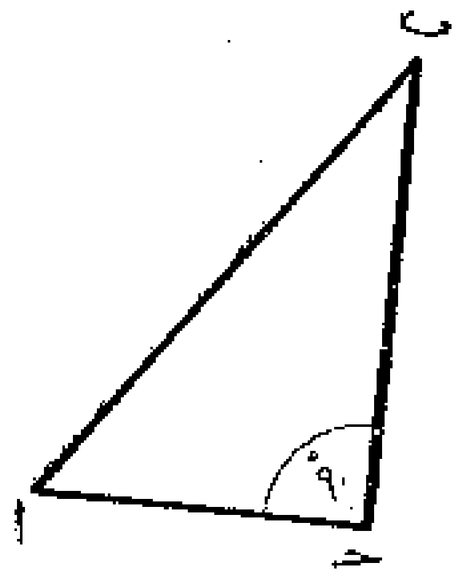
وقبل أن نناقش فى هذا الفصل عمل آخر الرياضيين الإغريق الذين يهمنا

(1) Rules of circular parts.

أمرهم لا بد أن نترك الإغريق قليلا و نقفز إلى عام ١٦٢٠ لنلتقط كلمة حلت محل تعبير ملتو هو « الوتر المقابل لزاوية ١٨٠° ناقصا زاوية معينة » .

في القرنين السادس عشر والسابع عشر حل المثلث القائم الزاوية محل الدائرة التي كان أريابهاتا أول من استعملها ، وفي المثلث القائم الزاوية يكون مجموع الزاويتين الحادتين ٩٠° لذلك فإنه يقال إن الزاويتين الحادتين في المثلث القائم الزاوية متتامتان ، والكلمة اللاتينية هي compleo التي تعني « املأ » أي إن الزاوية المتممة لزاوية حادة هي الزاوية التي « تملؤها » إلى ٩٠° ، وعلى ذلك فإن ٨٠° تتمم ١٠° وهكذا ، والآن لنرسم مثلثا قائم الزاوية في حـ .

نظراً لأن الزاوية حـ تساوي ٩٠° فإن الزاوية ب متممة للزاوية ا ، ولقد اكتشفنا قبل ذلك أن جيب أي زاوية يساوي النسبة (طول الضلع المقابل لها / طول الضلع المقابل للقائمة) فإذا طبقنا هذه الحقيقة لوجدنا أن جيب متممة زاوية ا أي جيب زاوية ب في شكل ٤٩ (الذي يمثل أي مثلث قائم الزاوية) هي النسبة (ا حـ / ا ب) ، وفي أوائل



شكل (٤٩)

القرن السابع عشر كان ادمون جنتر Edmund Gunter - الذي لعب دورا هاما في تطبيق اللوغاريتمات التي وضعها نيوتن في المسطرة الحاسبة — يفضل أن يستخدم التعبير complement sine of A بدلا من The sine of the complement of A وفي كتابه ذلك اختصر العبارة إلى co. sine A وسرعان ما أسقط الرياضيون الآخرون النقطة وكتبوها cosine A ، وهذه اختصرت ـ كتابة لا قراءة ـ إلى cos A [1].

في شكل ٤٩ : جا ا = ب حـ / ا ب   جتا ا = ا حـ / ا ب

جا ب = ا حـ / ا ب   جتاب = ب حـ / ا ب

أي إن جا ا = جتا ب ، جتا ا = جا ب

وبدلا من تعريف جيب تمام الزاوية بأنه « جيب الزاوية المتممة لها » فإننا نستطيع أن نهمل كل شيء عن المكملة ونقول في بساطة أن جيب تمام الزاوية الحادة في مثلث قائم الزاوية يساوي النسبة (الضلع المجاور للزاوية / الضلع المقابل للزاوية القائمة) ونعني بالضلع المجاور للزاوية أقصر الضلعين اللذين يحصران الزاوية ، وينبغي أن نتذكر أن جيب أي زاوية حادة هو دائما جيب تمام الزاوية المتممة لها ، إذ أن هذه الحقيقة تجعل ممكنا أن نختصر جداول الجيوب وجيوب التمام ، فإذا

(١) يتضح من هذا العرض نشأة كلمة جيب تمام مرتبطة بكلمة جيب الزاوية المتممة (المترجم).

أعطينا قيم الجيوب الزوايا من صفر إلى ٤٥° فى فترات من ١٠َ فإنها تصلح فيما لجيوب تمام الزوايا من ٤٥° إلى ٩٠° إذا قرئت فى ترتيب عكسى .

كذلك إذا أعطينا قيم جيوب التمـــام بين ٠° ، ٤٥° فإنها تصلح قيما للجيوب من ٤٥° إلى ٩٠° إذا قرئت فى ترتيب عكسى .

والآن نجيء إلى الفلكى الرياضى الجغرافى بطليموس الذى عاش حوالى عام ١٥٠ ميلادية .

وهنا أيضا يؤسفنا أن نبدأ عرضنا لحياة هذا الرجل العظيم بأننا لا نـكاد نعرف شيئا عن حياته الخـــاصة ، وكل ما نستطيع أن نقوله عن ثقة هو أن بطليموس ارتبط بالإسكندرية، وأنه قام بأغلب عمله فى الفلك بين عامى ١٢٥ ، ١٥٠ ميلاديتين ، وأنه كتب كتباً عديدة أحدها مشهور فى جميع أركان العالم . كذلك هناك أسطورة غير موثوق بها أنه على شرفات معبد بالقرب من الإسكندرية أقيمت أعمدة حفرت عليها الاكتشافات الفلكية التى توصل إليها ، ويقال إنه عاش إلى سن الثامنة والسبعين .

لقد أطلق بطليموس على كتابه Mathematikes Suntaxis أى « المجموعة الرياضية » ، وكان الكتاب من ثلاثة عشر جزءا يشبه فى ذلك كتاب « الأصول » لإقليدس والـ Arithmetica لديوفانتوس ، عالج فيه الفلك والهندسة المستوية والكرية ، والحقائق والطرق الهندسية اللازمة فى إعداد جدول الأوتار ، وكان رجال العلم من الإغريق يعتبرون المجموعة الرياضية أعظم كتاب كتب فى الفلك ، لذلك أطلقوا عليه « المجموعة العظيمة » تمييزاً له عن كتب الفلك الأخرى الأقل فى المستوى ، ولقد أظهر العرب كذلك احترامهم

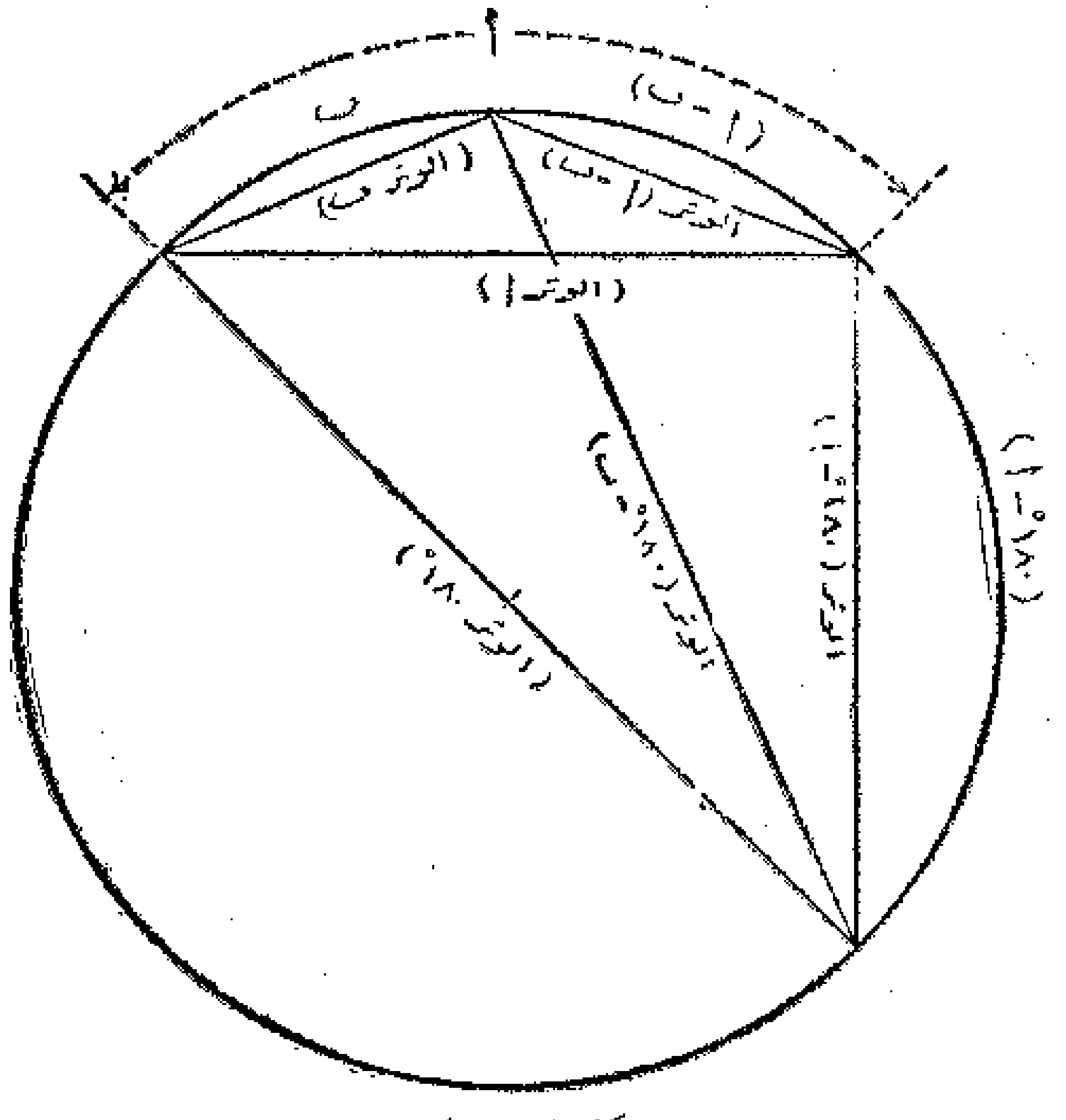
وتقديرهم لهذا الكتاب فأطلقوا عليه « الماجستى » أى « الأعظم » ، وهم بذلك ربطوا أداة التعريف « ال » بالكلمة اليونانية megistos أى « أعظم » . ولقد ترجم الكتاب من العربية إلى اللاتينية عام ١١٧٥ ، وقد قام بالترجمة جيرادو الكريمونى تحت عنوان Almagest ثم تبعتها ترجمات لاتينية أخرى . ولقد طبع الكتاب باليونانية واللاتينية مرات كثيرة ، ظهرت آخر الطبعات اليونانية عام ١٩١٣ .

يحتوى الماجست على بيانات مفصلة عن الدراسات الفلكية التى قام بها هيباركوس ، كما يوضح شرح بطليموس لحركات الأجرام السماوية المحيطة بالأرض، ولقد تقبل الفلكيون الأوروبيون والعرب « نظام بطليموس » كما كان يطلق عليه دون مناقشة إلى أن تفوق عليه فى القرن السابع عشر النظام الكوبرنيكى .

ويتضح من الطريقة التى عرضت بها المادة أن قليلا من حساب المثلثات الذى يحتوى عليه الكتاب من وضع بطليموس نفسه ، وإنما كان إسهامه — شأنه فى ذلك شأن إقليدس فى الهندسة — أن جمع ، واختار ، ورتب ، جميع ما كان معروفا من حساب المثلثات فى عصره ، وبذلك حافظ على الطرق والقوانين التى كانت مستعملة ، وربما يكون قد صحح ووضع جداول الأوتار التى وضعها هيباركوس ومينلاوس ، ووضع النظرية الهندسية التى تعرف اليوم بنظرية بطليموس التى يعرفها القراء الرياضيون ، وتنص على أنه إذا كانت أطوال أضلاع شكل رباعى دائرى ا ، ب ، حـ ، ء على الترتيب وطولا قطريه س ، ص فإن س ص = ا حـ + ب ء . ويستطيع القارىء الرياضى أيضاً أن يرى كيف طبق بطليموس هذه النظرية فى حساب المثلثات فحصل على قانون من أهم القوانين الحديثة فى حساب المثلثات . أما القارىء غير الرياضى فبالرغم من

أنه قد يجد أن التحول من استعمال الإغريق للأوتار إلى الاستعمال الحديث للجيوب وجيوب التمام يتطلب مقدارا من المهارة فى العمليات الجبرية، إلا أنه ينبغى أن يكون الآن قادراً على فهم ما يأتى :

لنفرض أن ا ، ب هما التقديران الزاويان لقوسين من دائرة ينتهيان فى نفس النقطة وأن ا أكبر من ب . لقد رسم بطليموس قطر الدائرة المار بالمنطقة التى ينتهى فيها القوسان ، ثم أكمل الشكل الرباعى الدائرى الواضح فى الشكل ورسم قطره الثانى .



شكل (٥٠)

طبق بطليموس النظرية التى يطلق عليها الآن اسمـــه فحصل على الوتر (ا – ب) من المعادلة :

(الوتر ا) . [الوتر (١٨٠ – ب)] = [الوتر (١٨٠ – ا)] .
الوتر ب + [الوتر (ا – ب)] . (الوتر ١٨٠°)

وكى نحول هذه المعادلة إلى الصورة الحديثة ضع ا = ٢ س ، ب = ٢ص فتؤول المعادلة إلى :

(الوتر ٢ س) . [الوتر (١٨٠–٢ص)] = [الوتر (١٨٠–٢س)]
الوتر ٢ ص + [الوتر ٢ (س – ص)] . (الوتر ١٨٠°) .

لكننا نعلم أن جا س = ½ الوتر ٢س ، فيكون الوتر ٢س = ٢جا س
وبالمثل الوتر ٢ ص = ٢جا ص ، والوتر ٢ (س – ص) = ٢ جا(س – ص)
كذلك الوتر (١٨٠ – ٢ص) = الوتر ٢ (٩٠ – ص)

= الوتر ٢ (متممة ص)

= ٢ جا (متممة ص)

= ٢ جتا ص

وكذلك [الوتر (١٨٠ – ٢ س)] = ٢ جتا س

وإذا أخذنا طول نصف قطر الدائرة وحدة واحدة، فإن الوتر ١٨٠° = ٢ .
وبذلك تتحول المعادلة السابقة إلى الصورة التالية :

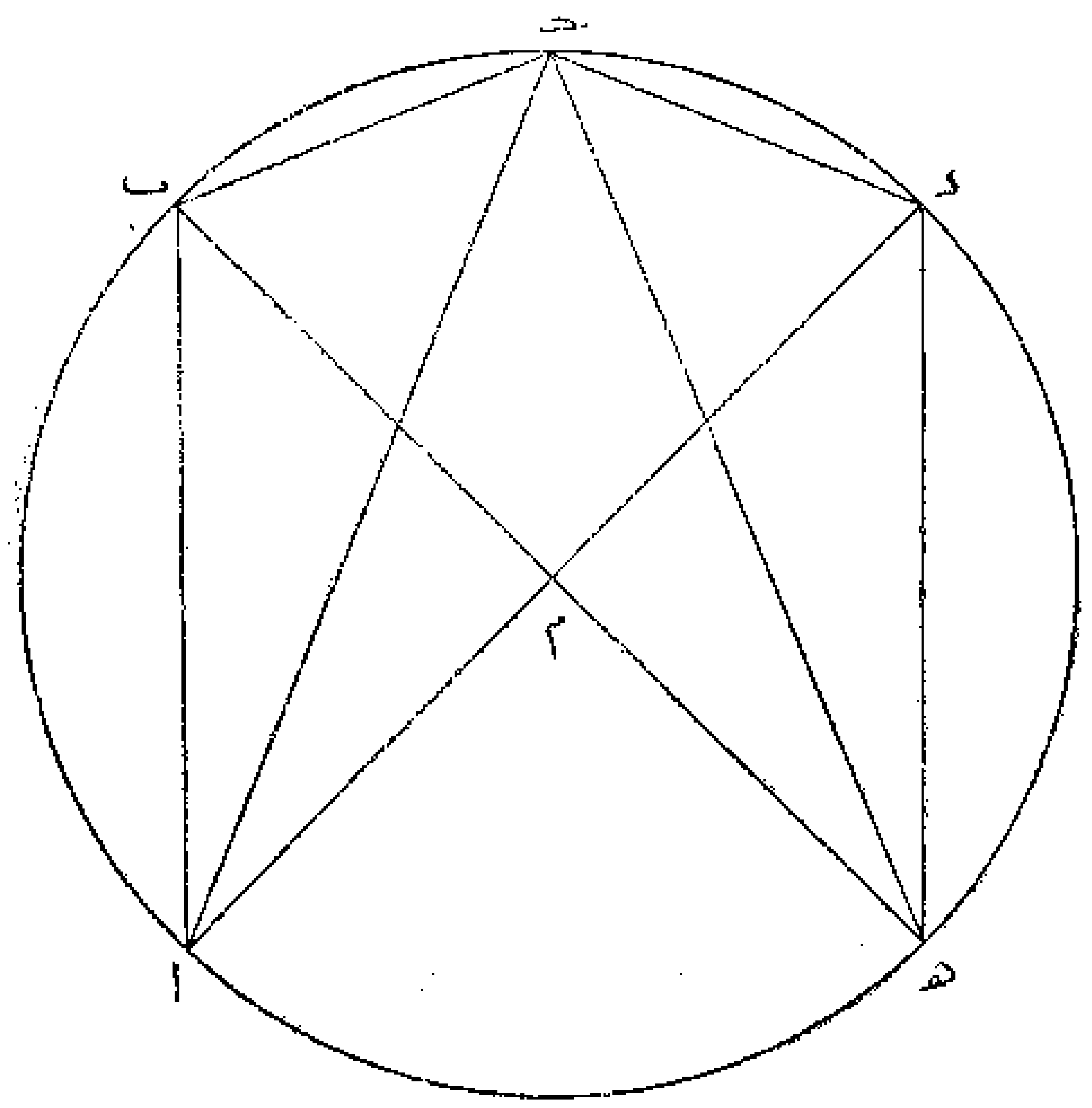
(٢ جا س) . (٢ جتـــا ص) = ٢ (جتا س) . (٢ جـــا ص)
+ [٢ جا (س – ص)] . (٢)

∴ ٤ جا س جتا ص = ٤ جتا س جا ص + ٤ جا (س – ص)

∴ جا س جتا ص = جتا س جا ص + جا (س — ص)

∴ جا (س — ص) = جا س جتا ص — جتا س جا ص

وهى ما يعرف الرياضيون أنه قانون من أهم القوانين الأساسية فى حساب المثلثات .



شكل (٥١)

لعله يهم القارىء أن يجد بنفسه كيف طبق بطليموس نظريته لإيجاد الوتر ا حـ فى شكل ٥١ بمعلومية الوتر ا ب ، والوتر ب حـ عن طريق رسم القطرين ا ى ، ب هـ ، وسيصل القارىء إلى القانون جتا (س + ص) = جتا س جتا ص — جا س جا ص (يمكن بسهولة إثبات أن الوتر هـ ى = الوتر ا ب . وبعد تطبيق النظرية على الشكل الرباعى ب حـ ى هـ بدلالة الأوتار ضع ٢ س = القوس ا ب ، ٢ ص = القوس ب حـ وسر فى الحل كما فى المثال السابق) .

أما فى الجغرافية فقد اقتفى بطليموس أثر الجغرافيين الأوائل بتقسيم سطح الأرض إلى شبكة من خطوط العرض والطول ، حيث خط العرض دائرة صغرى توازى خط الاستواء . وخط الطول نصف دائرة كبرى تمر بالقطبين الشمالى والجنوبى للأرض .

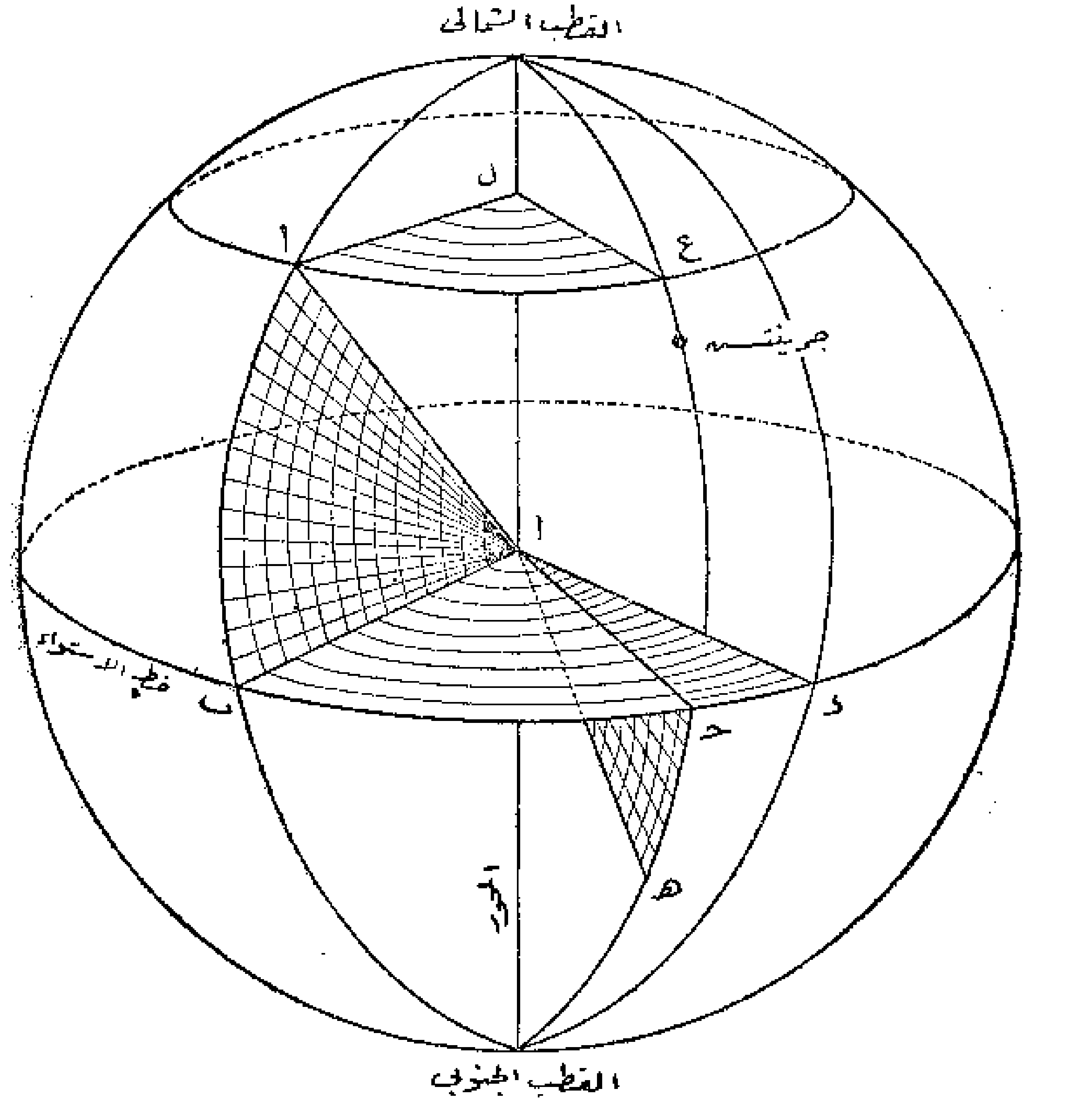
ولقد اعتبر الإغريق ومن تبعهم عرض العالم من الشمال إلى الجنوب وطوله من الشرق إلى الغرب ، ولعل هذا راجع إلى اعتبار القدماء للخط الذى يخترق البحر المتوسط « طولا للعالم » ، ولذلك فقد استعمل بطليموس كلمة يونانية تعنى عرض للقياس شمالا أو جنوبا من خط ثابت هو خط الاستواء ، وهذه ترجمت بعـــد ذلك إلى الكلمة اللاتينية latitudo ومنها جاءت الكلمة الإنجليزية latitude للقياس شمالا أو جنوبا من خط الاستواء ، أما الكلمة التى وضعها بطليموس « للطول » فقد ترجمت فى اللاتينية إلى longitudo ومنها جاءت الكلمة الإنجليزية longitude للقياس شرقا أو غربا من خط طول جرينتش ، ولقد عرضنا فى صفحة ١٥٤ لماذا اختير خط زوال جرينتش أساساً لقياس خطوط الطول(١) .

ونظراً لأن مصطلحى « خط الطول وخط العرض » يدلان على مسافات السطح المنحنى للكرة،لذلك يقاسان بتقدير زاوى للزوايا عند مركز الكرة .

فى شكل ٥٢ خط عرض النقطة ا شمال (بالنسبة لخط الاستواء) ويساوى التقدير الزاوى للقوس ب ا الذى يساوى الزاوية ب م ا عند مركز الأرض ،

(١) يبدو أن للكلمتين العربيتين « خط طول » و« خط عرض » صلة بالتفسير التاريخى المشار إليه . « المترجم »

فى المستوى الذى يمر بالقطب الشمالى و بالنقطة ا و بالقطب الجنوبى و بمركز الأرض (لا يظهر فى الشكل سوى الجزء الذى يحـــده خط زوال ا ومحور



شكل (٥٢)

الأرض) ، ويعتبر خط العرض شمال خط الاستواء موجبا ، فمثلا + ٦٠° تدل على ٦٠° شمالى خط الاستواء . أما عند نقطة هـ فإن خط العرض جنوب (بالنسبة لخط الاستواء) ، ويساوى التقـــدير الزاوى للقوس حـ هـ أى يساوى الزاوية حـ م هـ ، وفى بعض الأحيان يعتبر خط العرض جنوب خط الاستواء سالبا فمثلا تدل — ٤٨° على ٤٨° جنوبى خط الاستواء .

ونظرا لأن النقط ب ، حـ ، ء تقع على خط الاستواء فإن زاوية عرضها ٠°.

لاحظ أن أى نقطة على الدائرة الصغرى الوحيدة المرسومة فى الشكل تكون زاوية عرضها مساوية زاوية عرض النقطة ا .

أما فيما يختص بخط الطول فإنه يعين شرقاً أو غربا بالنسبة لخط زوال جرينتش ، وكما هى الحال فى العرض ، يقدر الطول تقديرا زاويا ، فمثلا يقاس طول ا بالبعد الزاوى للقوس ع ا بالنسبة للزاوية عند مركز الدائرة التى يكون ع ا قوسا فيها أى زاوية ع ل ا ، ونظراً لأن هـــذا يؤدى إلى أخطاء ، فإنه فى الحياة العملية يحول القوس ع ا فى الدائرة الصغرى إلى أميال بحرية ، (الميل البحرى هو متوسط طول القوس على دائرة كبرى الذى يساوى دقيقة واحدة) ونظرا لأن ع ا ليس قوساً فى دائرة كبرى ، فإن عدد الأميال البحرية فى ع ا لا يساوى عدد الدقائق فى القوس ع ا ، ولذلك تفاديا للتضارب يحسن أن تؤخذ القوس المناظرة على خط الاستواء ، ومن الواضح أن الزاوية حـ م ب تساوى الزاوية ع ل ا أى تساوى التقدير الزاوى للقوس ع ا . وواضح أن هاتين الزاويتين الزوجيتين متساويتان ، فإذا كان التقدير الزاوى للقوس ب حـ مثلا ٨٢° كان طول ا مساويا ٨٢° غربا (من جرينتش ويكون التقدير الزاوى للقوس ع ا = ٨٢° كذلك ، لـكن طول القوس ع ا بالأميال البحرية لا يساوى طول حـ ب بنفس الوحدات ، إذ أنه نظرا لأن ب حـ قوس فى دائرة كبرى هى خط الاستواء ، فإن طوله بالأميال البحرية يساوى عدد الدقائق فى تقديره الزاوى ، ونظرا لأن ٨٢° = ٤٩٢٠′ فإن طول ب حـ يكون ٤٩٢٠ ميلا بحرياً ، والآن كيف يحسب البحار المسافة بين ع ، ا بالأميال البحرية إذا سارت سفينته فى

مسار يوازى خط الاستواء . إذا دقق القارىء النظر فى شكل ٥٢ لوجد أن ل ا ، م ب فى مستوى واحد هو ذلك الذى يحده خط زوال ا ومحور الأرض. وعلى ذلك فإن ل ا ، و ب متوازيان ، وينتج من ذلك أن الزاويتين ل ا م ، ب م ا متساويتان ، وكل منهما يساوى زاوية عرض ا . فإذا رمزنا لنصف قطر الأرض مقدرا بالأميال البحرية الرمز نق فإنه :

نظراً لأن ا ل م مثلث قائم الزاوية فى ل فإن :

$$\frac{\text{ا ل}}{\text{ا م}} = \text{جتا (الزاوية ل ا م) = جتا (زاوية عرض ا) .}$$

$$\text{أى إن } \frac{\text{ا ل}}{\text{نق}} = \text{جتا (عرض ا)}$$

أى إن ا ل = نق جتا (زاوية عرض ا)

فإذا فرضنا أن زاوية عرض ا هى ٦٠° فإنه من الجداول جتا ٦٠° = ٠,٥

∴ ا ل = ½ نق = ½ ب م

وينتج من ذلك أن محيط هذه الدائرة الصغرى الموازية لخط الاستواء يساوى نصف محيط خط الاستواء ، أى إن طول القوس المناظرة لكل دقيقة على هذه الدائرة يكون نصفه على خط الاستواء .

ونظراً لأن ب حـ = ٤٩٢٠ ميلا بحرياً .

فإن ا ع = ٤٩٢٠ × ٠,٥ = ٢٤٦٠ ميلا بحرياً .

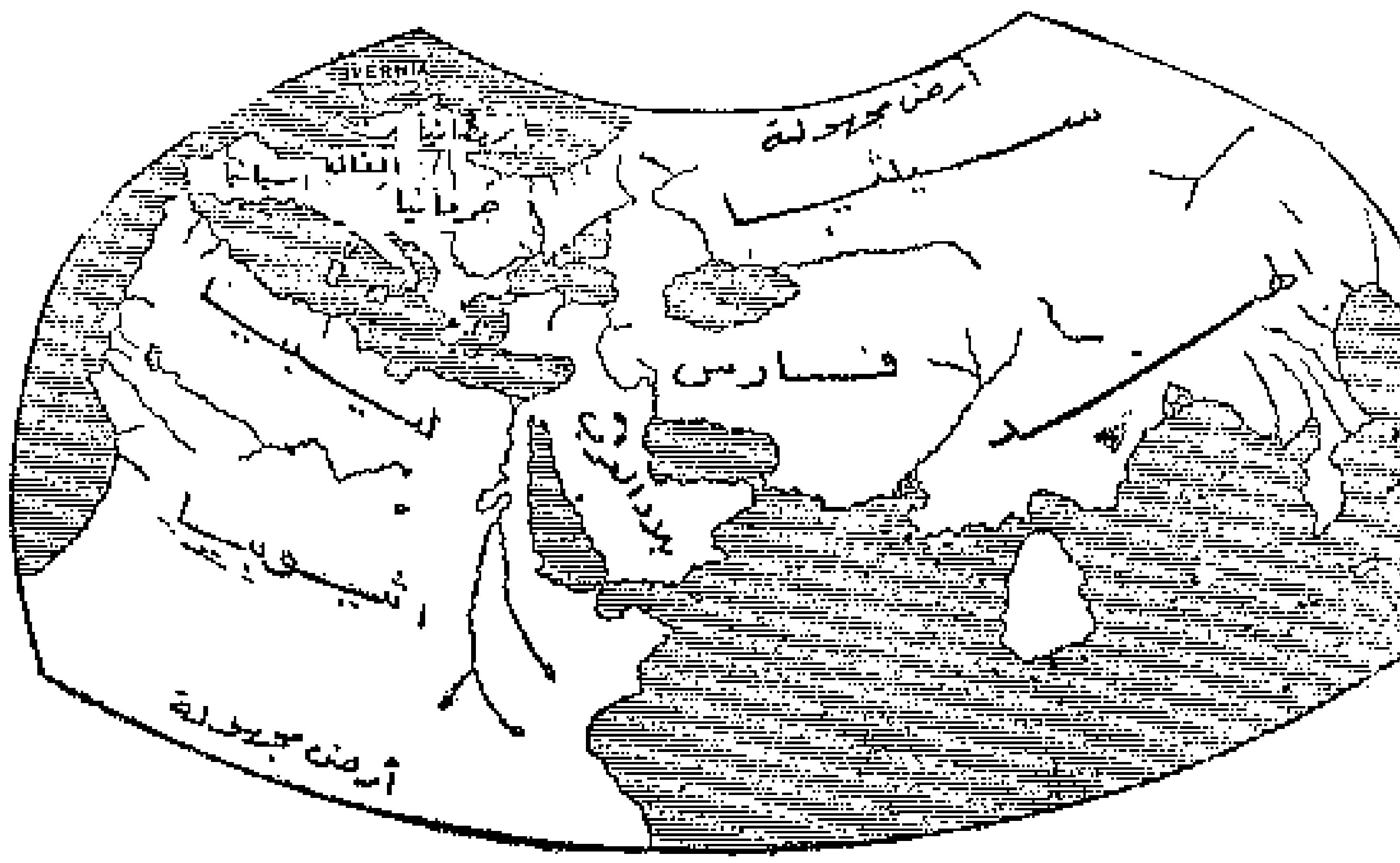
وسنرى فيما بعد أنه إذا دلت س على زاوية عرض أى دائرة توازى خط الاستواء فإن كل دقيقة على قوس هذه الدائرة الصغرى تحتوى على جتا س من الأميال البحرية .

وقبل أن نعود إلى بطليموس فى الإسكندرية ، لندرس أولا وحدة البحار فى قياس السرعة ، تلك هى العقدة . العقدة هى سرعة قدرها ميل بحرى واحد فى الساعة ، وكلمة « عقدة » تأخذنا بعيداً إلى عصر السفن الشراعية ، حينذاك لم تكن الأدوات الدقيقة المعقدة لقياس السرعة قد اخترعت، بل كانت السرعة تقاس بكتلة من الخشب ربط فيها حبل قسمته العقد إلى أقسام متساوية ، وعن طريق عد العقد التى تخرج فى فترة معينة من الزمن يمكن قياس السرعة قياسا تقريبياً ، من هذا ارتبطت كلمة عقدة بسرعة السفن، وبعد ذلك أصبحت العقدة سرعة قدرها ميل بحرى فى الساعة .

لنعد الآن إلى بطليموس . لقد طبق معارفه فى الهندسة وحساب المثلثات فى رسم الخرائط . إن الرجل العادى ، وهو ينظر إلى الخريطة لايدرك الصعوبة فى تمثيل سطح منحنى على سطح مستو ، حتى مع استعمال الرياضيات المعقدة ، فهى لاتحل إلا جزءا صغيرا من المشكلة . لقد كان بطليموس يعرف عن الإسقاط العمودى[١] وإسقاط المجسمات على سطح مستو[٢] أكثر مما تعرف غالبيتنا إلى درجة بعيدة ، والظاهر أنه طبق مفاهيمه الرياضية بادىء الأمر فى رسم خرائط النجوم . لقد تعلم راسمو الخرائط فى عهد النهضة منه أسرار مهنتهم، التى لولاها لاستحالت الرحلات البحرية العظيمة التى تمت فى القرن الخامس عشر والقرون التى تلته، لكن الأسف بالرغم من معرفة بطليموس بالرياضيات

(١) انظر كتابه Analemma (٢) انظر كتابه Planis phaerium

اللازمة إلا أنه استعمل ١٨٠٠٠٠ فرسخ قيمة لنصف قطر الأرض ، أوجدها بوزيدونيوس Posidonius بعد قرن من وصول إيراتوستنيس إلى القيمة ٢٥٠٠٠٠ فرسخ ، ولسبب ما استعمل الجغرافى سترابو Strabo (حوالى ٥٠ قبل الميلاد إلى ٢٠ ميلادية) القيمة الخطأ وتبعه فى ذلك بطليموس ، ونظرا لأن خط عرض عدد قليل من البلاد كان معروفا بدقة ، ونظرا لأن الطريقة الوحيدة لحساب زاوية العرض فى هذا العصر كانت عن طريق رصد الخسوف والكسوف (الطريقة التى وضعها هيباركوس) وحتى طريقة كتلة الخشب والحبل لم تكن قد استحدثت بعد ، لذلك اعتمد بطليموس كلية على حساب للمسافات قام به المسافرون ، وبذلك كانت المادة التى استخدمها غير جديرة بمهارته النظرية الفائقة فى رسم الخرائط ، إذ أن الطرق التى وصفها لتحويل حدود دولة من السطح الكرى إلى السطح المستوى لاتكاد تختلف عن الطرق التى نستخدمها اليوم ، وفيما يلى صورة للعالم كما كان معروفا لدى الأوروبيين فى ذلك العصر .



شكل (٥٣)

الخريطة التى وضعها بطليموس للعالم (١٥٠ ميلادية)

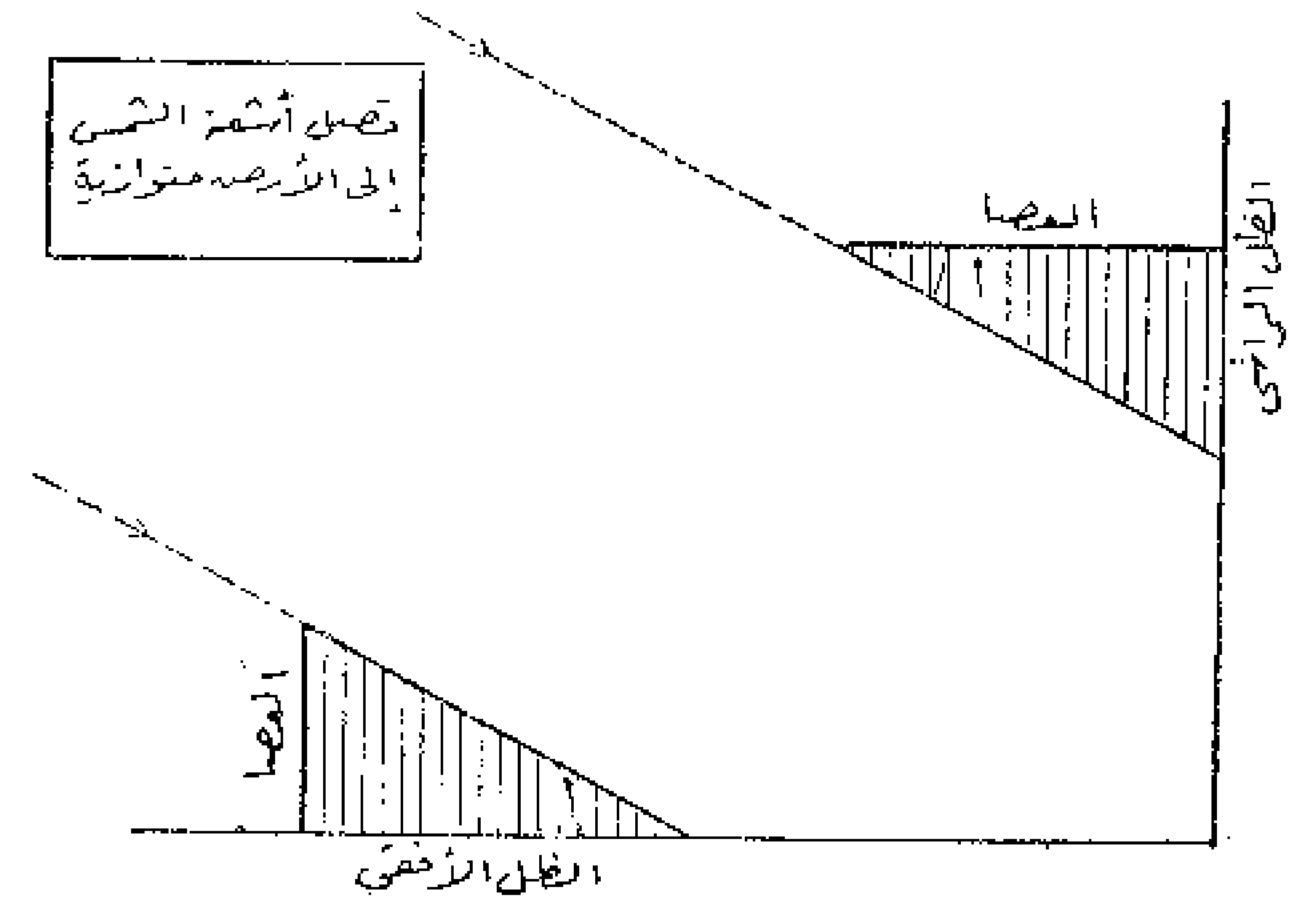
إن الأخطاء الواضحة فى هذه الخريطة لايعتد بها إذا عرف أنها أفضل بكثير من الخرائط التى رسمت فى العصور المظلمة التى هبطت على أوروبا بعد ذلك الوقت ، فقد عاد علم رسم الخرائط إلى الطفولة ثانية ، وحتى الاعتقاد أن الأرض كروية حرمته الكنيسة ، وأعلن للناس أن الأرض قرص مستو يحوطه الماء.ما إن ماتت المعرفة الإغريقية فى أوروبا الغربية حتى اندثر التراث الضخم فى الرياضيات والعلوم الذى ساهم فى تكوينه خلال القرون المتعاقبة الفلاسفة والرياضيون والفلكيون والجغرافيون من الإغريق ، ولم يستعد علم رسم الخرائط قواه إلا فى القرن الخامس عشر عندما أعيدت إليه فى أوروبا المبادىء التى وضعها له بطليموس، وكان لمطالب الملاحة فى ذلك العصر أثرها فى إدخال كثير من التحسينات على رسم الخرائط وفى انتشار كتاب بطليموس « الماجست » مرة أخرى فى أوروبا ، نظرا لأنه من الكتب الأولى التى تم طبعها ، وفى عام ١٥٠٠ رسم رجل اسمه جوان دلا كاسا Juan de la Casa — وهو من زملاء كولومبوس — خريطة للعالم ظهر فيها لأول مرة شاطىء أمريكا الذى اكتشف حديثا آنذاك .

بنهاية قصة بطليموس نأتى إلى خاتمة ما أسهم به الإغريق فى حساب المثلثات ، فمن عصره حتى عصر النهضة جاء التقدم الوحيد فى هذا العلم من الهنود والعرب . أما فى أوروبا فقد قاست جميع فروع الرياضيات من الجمود الذى شل الفكر بعد سقوط الإمبراطورية الرومانية .

لقد رأينا فيما سبق النتائج الرائعة للعمل الذى قام به أريابهاتا فى الهند بتطوير الأفكار التى أدت إلى المفهوم الحديث لجيب الزاوية ، ونجىء الآن إلى « اختراع » نسبتين مثلثتين أخريين ، كانت جذورهما الأصلية ــ كما هو الشأن فى الجيب ــ هى « الأطوال » .

لقد اهتم الكتاب الهنود منذسنة ٤٠٠ ميلادية بأطوال الظلال، لكن العرب هم الذين طوروا فكرة « الأطوال » المثلثية المرتبطة بالظلال و نعنى « بالطول المثلثى » ذلك الذى يرتبط فيه طول الظل بمقدار الزاوية .

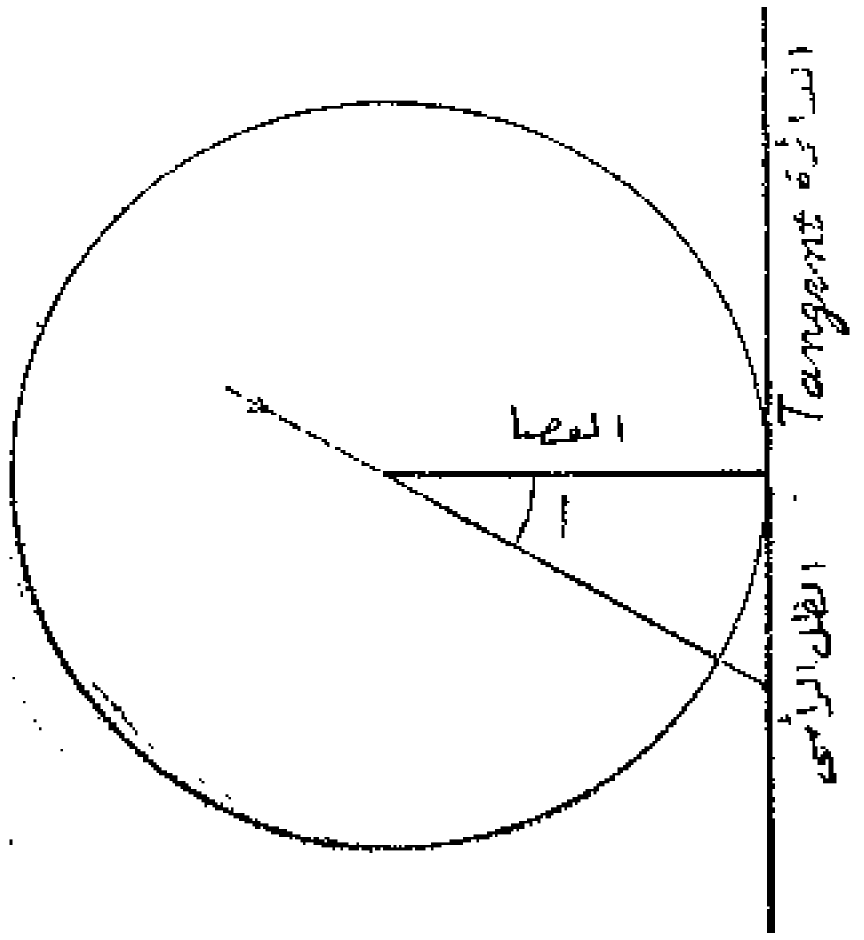
قبل الحرب العالمية الثانية كان فى برلين مخطوط عربى ــ نشك أنه موجود الآن ــ كتب حوالى نهاية القرن التاسع ، ويحتوى هذا الكتاب على قائمة بأطوال نوعين من الظلال : أولهما يعطى طول ظل عصا رأسية على أرض أفقية ، وثانيهما يعطى طول ظل عصا أفقية على حائط رأسى ، مما يصلح مزولة شمسية على حائط .



شكل (٥٤)

يوضح شكل ٥٤ نوعى المزولة الشمسية . تصور أن المزولة اليسرى على أرض أفقية فى حديقة منزل فى حين توجد المزولة اليمنى على أحد حوائطه الخارجية ، ولقد جعلنا طول العصا فى المزولة اليمنى مساويا طول الظل فى المزولة اليسرى لأسباب سرعان ما تعرفها . إن ارتفاع الشمس فى الحالتين واحد ويمكن ــ كما علمنا عند عرضنا لعمل إراتوستثنيس فى حساب محيط الأرض ــ اعتبار أن أشعة الشمس تكون متوازية عند وصولها سطح الأرض، وعلى ذلك يكون طول الظل فى المزولة اليمنى مساويا لطول العصا فى المزولة اليسرى . يبدو أن هذه العلاقة العكسية قد فاتت الرياضيين العرب ، ورياضى العصور الوسطى ، ولعل ذلك راجع إلى أنه من غير المحتمل أن يكون طول العصا الأفقية فى مزولة على الحائط مساويا لطول الظل الأفقى فى مزولة على الأرض .

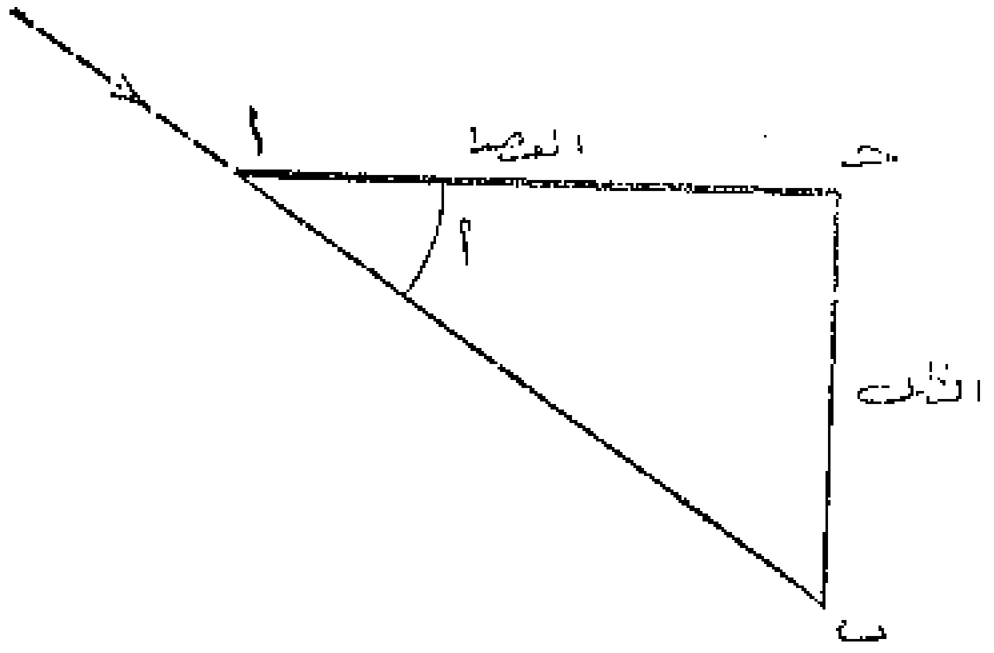
وقرب نهاية القرن السادس عشر أطلق توماس فينكى Thomas Fincke فى كتاب ألفه عام ١٥٨٣ على طول الظل الرأسى (فى مزولة الحائط) اسم tangent . ولعل السبب فى ذلك هو ما يوضحه شكل ٥٥ ، فإذا أخذت العصا



شكل (٥٥)

الأفقية نصف قطر للدائرة فإن الظل يكون جزءا من المماس المرسوم للدائرة عند نهاية العصا ، ولقد أيد الرياضي المشهور بيتيسكوس Pitiscus عام ١٥٩٥ استعمال مصطلح tangent وما زال يستعمل منذ ذلك الحين إلا أن tangent of A مثلا قد اختصر إلى tan A [1] .

وخلال حياة بيتيسكوس بدأ الرياضيون يستخدمون النسب فى حساب المثلثات بدلا من الأطوال ، ونظراً لأن الرياضيين فى القرنين السادس عشر والسابع عشر كانوا يعرفون طريقة العرب فى التعبير عن طول ظل عصا فى صورة عدد مرات احتوائه على طول العصا ، كان طبيعيا عند تحويل ظل الزاوية إلى نسبة أن يقارن طول الظل بطول العصا ، وعلى ذلك ففى المثلث القائم الزاوية (شكل ٥٦) :



شكل (٥٦)

$$\text{ظل الزاوية ا} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ا حـ}}$$

حيث ا هى زاوية ارتفاع الشمس.

فإذا تناسينا كل شيء عن المزاول الشمسية وعن ظلال العصى فإن ظل

---

(١) يبدو أن الاصطلاح العربى ظل الزاوية قد اشتق من طول ظل العصا وتطور الى النسبة بين طول ظل العصا وطول العصا ، غير مرتبط بالدائرة كما هى الحال فى الإنجليزية ، التى يرتبط فيها المصطلح بمماس الدائرة . (المترجم)

الزاوية الحادة فى المثلث قائم الزاوية يساوى $\frac{\text{الضلع المقابل للزاوية الحادة}}{\text{الضلع (الأقصر) المجاور لها}}$

ونظرا لأن زاوية ب فى شكل ٥٦ تتمم زاوية ا فإن ظل زاوية ب هو ظل الزاوية المتممة للزاوية ا ، أى إن :

$$\text{ظل الزاوية ب} = \text{ظل متممة الزاوية ا} = \frac{\text{ا حـ}}{\text{ب حـ}}$$

وكما تطور « جيب الزاوية المتممة » إلى جيب تمام الزاوية تطور الظل إلى « ظل تمام » ، ونستطيع الآن أن نعرف ظل تمام أى زاوية حادة فى مثلث قائم الزاوية على أنه النسبة : $\frac{\text{الضلع (الأقصر) المجاور للزاوية}}{\text{الضلع المقابل لها}}$

وإذا رجعنا إلى شكل ٥٦ مـــرة أخرى فإن :

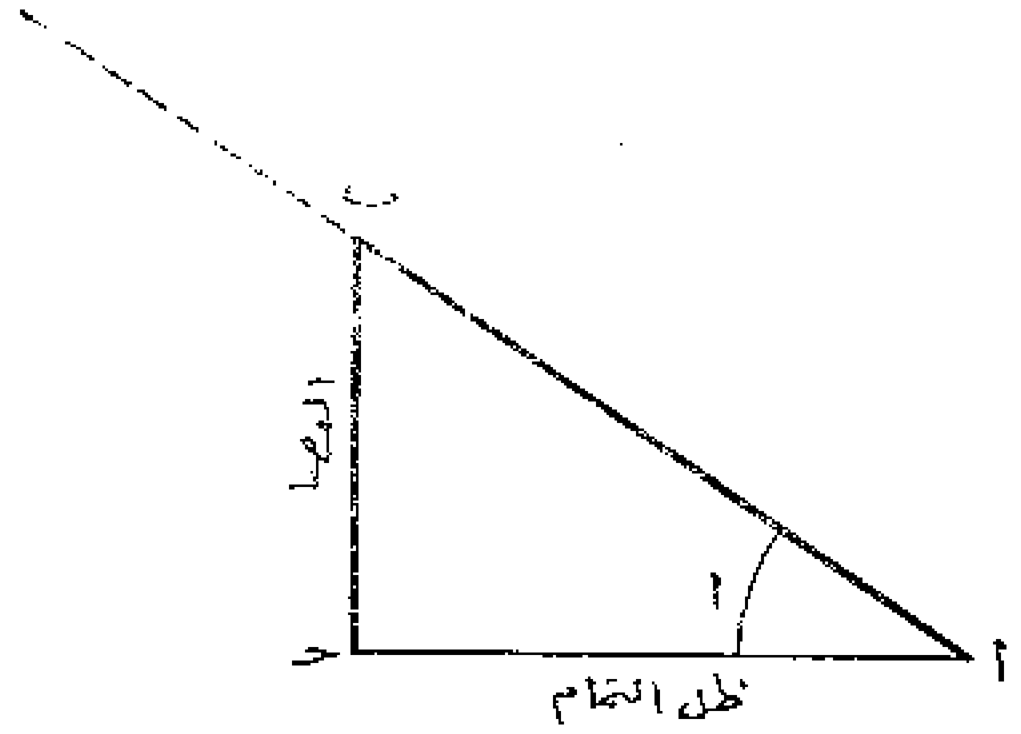
$$\text{ظل ا} = \frac{\text{حـ ب}}{\text{ا حـ}} \text{ ، ظل تمام ا} = \frac{\text{ا حـ}}{\text{حـ ب}}$$

$$\text{ظل ب} = \frac{\text{ا حـ}}{\text{حـ ب}} \quad \text{ظل تمام ب} = \frac{\text{حـ ب}}{\text{ا حـ}}$$

أى إن ظل أية زاوية يساوى ظل تمام متممتها ، كما أنه مقلوب ظل تمام نفس الزاوية .

وهذا يعنى أنه إذ قلب ظل الزاوية فإن الناتج يكون ظل تمام نفس الزاوية (إذا ضرب عددان وكان الناتج ١ فإن كلا من العددين مقلوب الآخر . ومن أمثلة ذلك $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$ أو ٢ ، $\frac{١}{٢}$ أو ٨ و ١٢٥، و أو $\frac{ا}{ب}$ ، $\frac{ب}{ا}$) وينبغى أن نلاحظ أن هذه العلاقة لا تنطبق على الجيب وجيب التمام ، لأن هاتين النسبتين لا تحتويان على نفس الضلعين ، كما هو الشأن فى الظل وظل التمام .

ولنعد الآن إلى المزولة الشمسية وظل العصا فيها ، حتى نوضح نقطة تركناها إلى أن نشرح معنى مصطلحى « الظل » و « وظل التمام » ، تلك هى كيف كان الرياضيون العرب ورياضيو العصور الوسطى يعبرون عن أطوال الظلال ؟ لنأخذ أولا الظل الأفقى لعصا رأسية كما هو موضح فى شكل ٥٧ .



شكل (٥٧)

فى هذا الشكل يمثل ب حـ طول العصا ، حـ ا طول الظل عندما تكون زاوية ارتفاع الشمس ا° . فى العصور الوسطى كان طول حـ ا يعطى فى الجداول على أن حـ ا = ب حـ . $\frac{\text{جيب متممة ا}}{\text{جيب ا}}$

وإن القارئ الرياضي ليعرف أن هذا يعادل القول أن طول الظل الأفقي لعصا رأسية يساوي طول العصا مضروبا في ظل تمام زاوية ارتفاع الشمس ، ويستطيع من لا يعرف السبب في أن $\frac{\text{جيب متممة ا}}{\text{جيب ا}}$ هو ظل تمام ا أن يرجع إلى شكل ٥٨ .

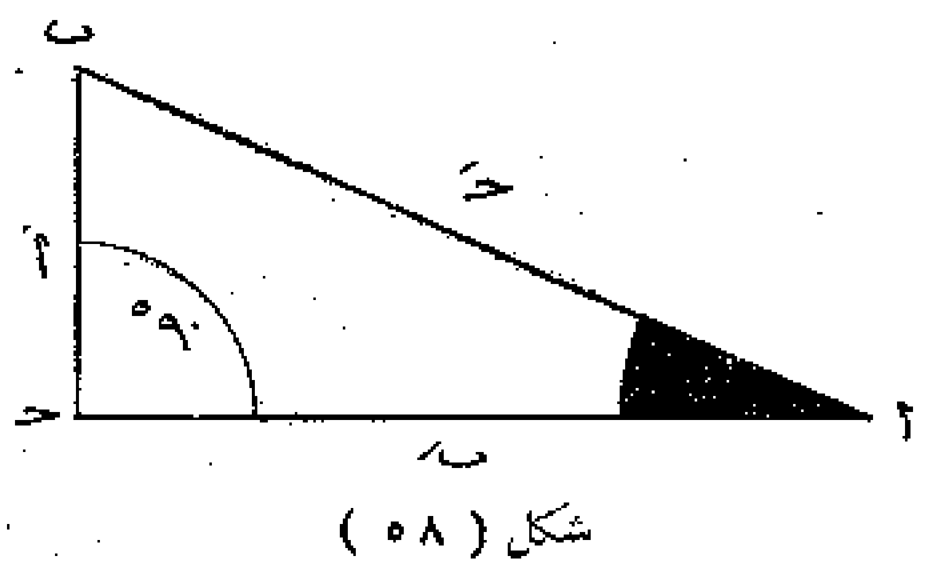
تدل اَ ، بَ ، حَ على أطوال الأضلاع

ب ح ، ح ا ، ا ب على الترتيب . واضح أن

$$\frac{\text{جيب متممة ا}}{\text{جيب ا}} = \frac{\frac{\text{بَ}}{\text{حَ}}}{\frac{\text{اَ}}{\text{حَ}}}$$

$$= \frac{\text{بَ}}{\text{حَ}} \times \frac{\text{حَ}}{\text{اَ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{اَ}} = \text{ظل تمام ا} .$$

ولعله يهم القارئ أن يعرف كيف كان الرياضيون في العصور الوسطى يعبرون عن طول الظل الرأسي على حائط لعصا أفقية بمعلومية طـــول العصا وزاوية ارتفاع الشمس ، وهو ما نعبر عنه الآن بأن طول الظـل في هـذه الحالة يساوي طول العصا مضروبا في ظل زاوية ارتفاع الشمس .



شكل (٥٨)

لقد رأينا أن الرياضيين الإغريق كان لديهم جداول للأوتار ، ولكن لم يكن لديهم ما يناظر ما لدينا الآن من جداول لجيوب التمام وللظلال ولظلال التمام ، ومع هذا فقد استطاعوا الوصول إلى ما يعادل جيب التمام ،ولعل القارىء قد لاحظ ذلك فى صفحة ١٦٣ ، كذلك قد ألمحنا فى صفحة ١٢٧ إلى أنه قد وردت منذ عصر أريستارخوس — إشارة إلى ما يعادل الظل .

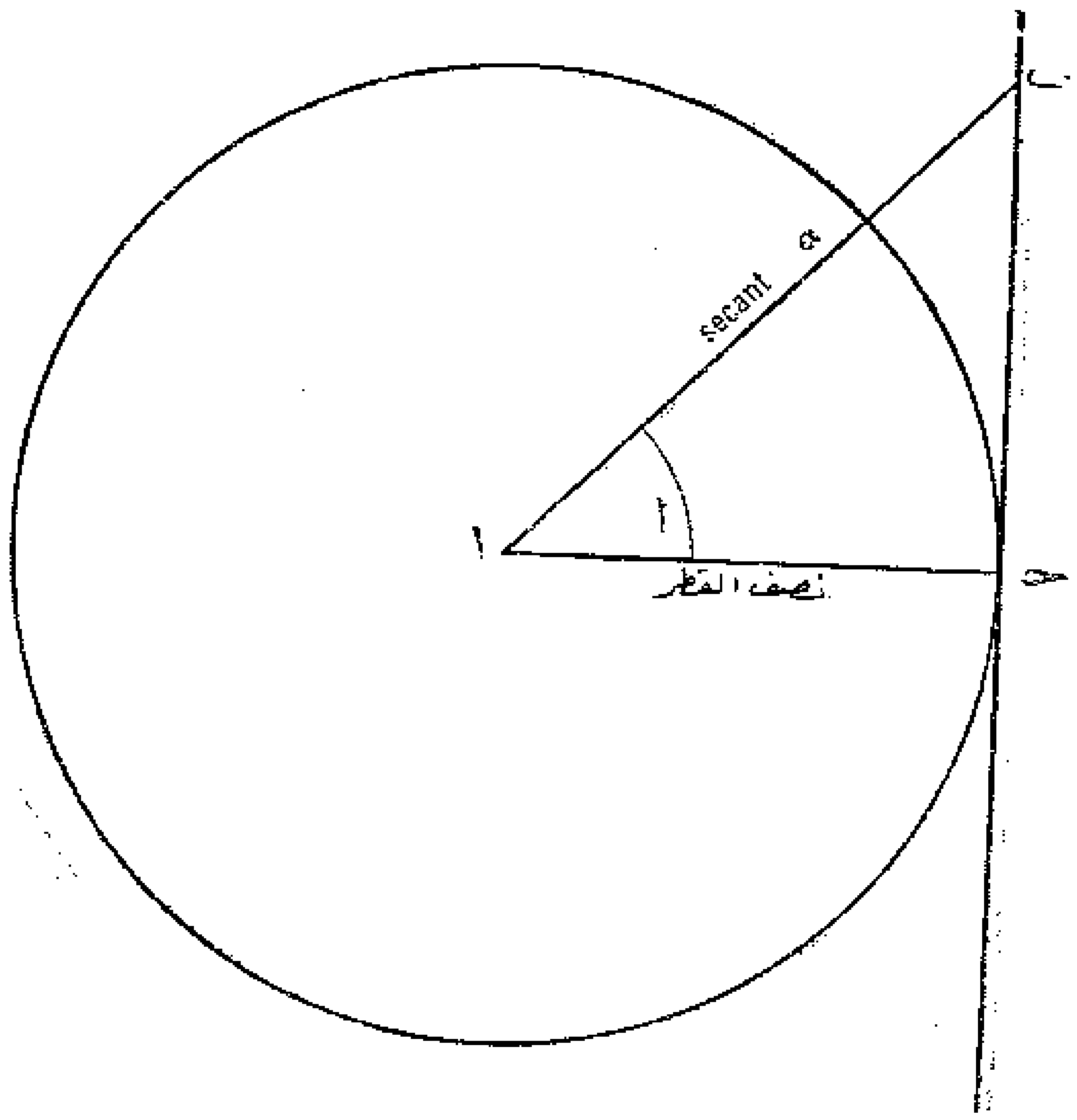
أما فى العصور الوسطى فقد أصبحت جداول الجيوب وما يعادل الظلال وظلال التمام فى متناول يد الرياضيين .

ثم أدخلت البوصلة البحرية إلى أوروبا وتبع ذلك الرحلات الطويلة فى أعالى البحار فكان لذلك أثر بالغ فى دراسة الرياضيات المتصلة بالملاحة ، من ذلك أن أعدت فى القرن الخامس عشر جداول تتضمن نسبتين جديدتين ، تسمى الأولى الآن secant ولقد سميت أول الأمر hypotenusa واستعملها كوبرنيكوس وزميله ريتيكوس Rheticus . ولقد تضمن كتاب فى جداول حساب المثلثات نشره ريتيكوس عام ١٥٥١ قيما لهذه النسبة الجديدة تحت عنوان hypotenusa ، وفى عام ١٥٨٣ أطلق فينيكى ، الذى وضع مصطلح « الظل » ، على هذه النسبة كلمة « secant » وبالرغم من أن الرياضيين الآخرين لم يتبينوا هذه الكلمة مباشرة إلا أن استعمالها قد عم تدريجيا . ويوضح شكل ٥٩ السبب الذى من أجله قد اختار فينيكى هذا الاصطلاح .

بالرغم من أن secant فى الهندسة تعنى المستقيم الذى يقطع الدائرة فى نقطتين فإن الرياضيين فى القرن السادس عشر اتفقوا على صلاحية هذه الكلمة فى التعبير عن ا ب فى الشكل[1] .

(١) يبدو أن الأساس الذى بنى عليه اختيار العرب لكلمة « قاطع » للدلالة على هذه النسبة هو نفسه الأساس المشار إليه . (المترجم)

إذا أهملنا الدائرة فى شكل ٥٩ واعتبرنا المثلث القائم الزاوية فقط فإننا نعبر اليوم عن قاطع الزاوية بالنسبة بين طول الوتر ا ب فى المثلث وطول الضلع الأصغر المجاور للزاوية.



شكل (٥٩)

من هذا يتضح أنه فى شكل ٦٠ ، قاطع زاوية ا = $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا حـ}}$ أى النسبة بين طول الوتر وطول الضلع الأصغر المجاور للزاوية . ونظراً لأن زاوية ب تتمم زاوية ا فى هذا الشكل فإن :

قاطع ب = $\frac{\text{ا ب}}{\text{ب حـ}}$ = قاطع متممة ا

= قاطع تمام ا

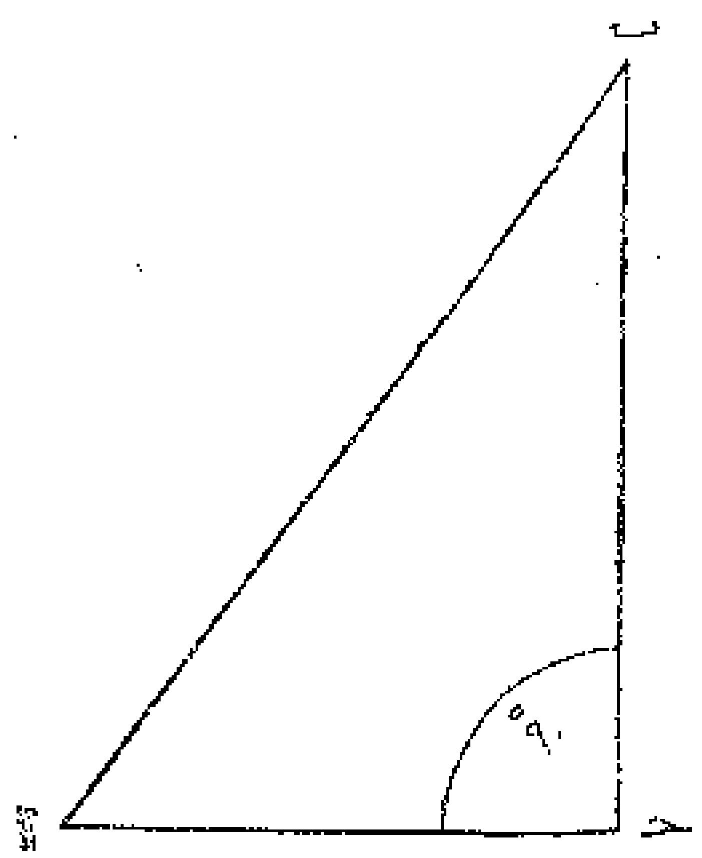
وعلى ذلك فإنه فى شكل ٦٠ :

قا ا = $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا حـ}}$ = مقلوب جتا ا

قتا ا = $\frac{\text{ا ب}}{\text{ب حـ}}$ = مقلوب جا ا

قا ب = $\frac{\text{ا ب}}{\text{ب حـ}}$ = مقلوب حتا ب

قتا ب = $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا حـ}}$ = مقلوب جا ب



شكل (٦٠)

وعندما شغل كثير من الرياضيين أنفسهم — فى القرن السادس عشر — فى وضع جداول النسب المثلثية قاموا بعمليات ضرب وقسمة مذهلة حتى لاتحتوى الجداول على قيم كسرية معقدة ، من ذلك أن ريتيكوس قسم نصف القطر إلى ٠٠٠ ٠٠٠ ١٠ وحدة ثم أوجد قيم النسب المثلثية الستة للزوايا فى فترات من ١٠ دقائق بأعداد من سبعة أرقام . ولقد نشرت هذه الجداول فى عام ١٥٥١ ثم أكملها فيتا فى عام ١٥٧٩ بحيث تعطى النسب للزوايا فى فترة من دقيقة واحدة .

ولقد كان ريتيكوس أستاذاً للرياضيات وكان متحمساً لكوبرنيكوس ، وقد أشرف على طبع الكتاب الذى وضع فى يد كوبرنيكوس عند وفاته (انظر صفحة ١٢٤) ، ولقد كان اسمه الحقيقى جورج جواكيم إلا أنه يعرف باسم ريتيكوس لأنه ولد فى جزء من التيرول النمسوى أقامت فيه قبيلة الريتى . بعد أن نشر جداوله الرياضية عام ١٥٥١ بدا عملا أدق هو وضع جداول من عشرة أرقام لجميع النسب المثلثية الستة ، متخذا نصف القطر ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ١٠ وحدة ، للزوايا فى فترات من ١٠ ثوان ، إلا أنه مات قبل أن تنشر فقام بنشرها عام ١٥٩٦ فردريك الرابع حاكم إقليم البالاتينيت Palatinate (على نهر الراين) تحت عنوان Opus Palatinum الذى عرفت به منذ ذلك الحين ، وتعتبر هذه الجداول أدق جداول فى حساب المثلثات ، وهنا يجب أن نفكر فى الجهد العنيف الذى تطلبه وضع جداول كهذه بطرق تضمنت عمليات ضرب وقسمة أعداد كبيرة جداً وقد كان هذا هو الذى دفع نابيير إلى البحث حتى استطاع — بعد عشرين سنة — أن يصل إلى طريقة تجرى بها عملية الضرب عن طريق الجمع والقسمة عن طريق الطرح ، وسنعالج عمل نابيير فى الفصل التالى . لقد ذكر بتيسكوس أن ريتيكوس استخدم فى وضع جداوله حسابين عملوا معه اثناعشر عاما . وفى المكتبة العامة فى نيويورك نسخة من Opus Palatinum تشغل منها الجداول ٧٣٥ صفحة فى طباعة ضيقة مقدارها ٩ بوصات فى ١٥ بوصة .

وبدلا من أن نذكر الجيب وجيب التمام ... الخ كنسب مثلثية لزوايا نستطيع أن نستعمل تعبيراً أحسن هو « الدوال المثلثية » . إذا ارتبط متغيران بحيث تتوقف قيمة أحدهما على قيمة الآخر فإنه يقال إن المتغير الأول « دالة للمتغير الثانى » ، ونظراً لأن قيمته تتوقف على القيمة التى نضعها للمتغير الثانى فإنه يسمى متغيرا « تابعا » بينما يسمى الثانى متغيراً « مستقلا » .

سنلتقى بالمصطلح « دالة » فى فروع أخرى من الرياضيات غير حساب المثلثات ، ففى الجبر مثلا تعتبر ٨ س دالة المتغير س (إذا كانت س متغيرة) ، إذ أن قيمة ٨ س تتوقف على القيمة التى نختارها المتغير س ، كذلك ٢ ص^{٢} + ٥ ص — ٩ دالة المتغير ص ، وسنرى أن جا ا دالة المتغير ا ، إذ ان قيمة جا ا تتوقف على قيمة الزاوية ا ، كذلك جتا ب دالة الزاوية ب ، طا حـ دالة للزاوية حـ . وهكذا .

فى التعبير الرياضى تكتب « دالة س » فى الصورة د (س) . يدل هذا الرمز على أى مقدار بدلالة س مثل ٨ س أو ٥ س^{٢} أو ٩ س^{٣} — ٤ س + ٣ وهكذا . . فإذا التقينا بالتركيب د (ص) = ٥ ص^{٢} + ٢ ص — ٨ فإنه يعنى أن الدالة التى تعنينا من دوال ص هى ٥ ص^{٢} + ٢ ص — ٨ ولقد كان أويلر فى القرن الثامن عشر هو أول من استخدم التعبير الرمزى د (س) .

على ذلك فإننا عندما نقول «جداول الدوال المثلثية» فإنما نعنى الجداول التى تحتوى على جيب ، وجيب تمام ، وظل ، وظل تمام ، وقاطع ، وقاطع تمام الزوايا المختلفة .

وفى الفصل التالى نرى كيف كانت لاختراع جديد — وضع فى الأصل لتسهيل استعمال جداول الدوال المثلثية — آثار بعيدة فى الفروع الأخرى من الرياضيات .

الفصل الخامس

نشأة اللوغاريتمات

لما رأيت يا أعزائى دارسى الرياضيات أن أكثر ما يضايق فى حل المسائل الرياضية ويعوق الحاسبين هو عمليات ضرب وقسمة وتربيع وتكعيب الأعداد الكبيرة ، فكرت فى طريقة يمكن بها التخلص من هذه المعوقات . (نابيير فى مقدمة كتابه)

لم يحدث قط — إذا استثنينا حالة واحدة — أن كان أى ابتداع هام فى الرياضيات من عمل فرد واحد ، بل جرت العادة أن يبذر رياضى معين بذرة تجر وراءها سيلا من أفكار الرياضيين الآخرين ، وبعد سنين ، وفى بعض الأحيان قرون ، تكتمل للبذرة حياة ، وهكذا تتقدم المعرفة الرياضية خطوة إلى الأمام . هذا هو السير الطبيعى للأمور . أما الاستثناء الوحيد فهو ابتداع اللوغاريتمات .

فى يولية عام ١٩١٤ قبل أن تنشب الحرب العظمى الأولى — المأساة الكبرى فى العصر الحديث — اجتمع مندوبون من جميع أجزاء العالم فى مؤتمر بأدنبرة إحياء لذكرى مرت عليها ثلاثمائة عام ، ذكرى نشر كتيب من ١٤٧ صفحة ملأت الجداول الرياضية تسعين منها ، ولقد كان عنوان هذا الكتاب بلغة العلم فى ذلك العصر Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio أى « وصف جداول اللوغاريتمات » .

سنلتقى بالمصطلح « دالة » فى فروع أخرى من الرياضيات غير حساب المثلثات ، ففى الجبر مثلا تعتبر ٨ س دالة المتغير س (إذا كانت س متغيرة) ، إذ أن قيمة ٨ س تتوقف على القيمة التى نختارها للمتغير س ، كذلك $٢ص^{٢} + ٥ص - ٩$ دالة للمتغير ص ، وسنرى أن جا ا دالة للمتغير ا ، إذ ان قيمة جا ا تتوقف على قيمة الزاوية ا ، كذلك جتا ب دالة للزاوية ب ، طا حـ دالة للزاوية حـ . وهكذا .

فى التعبير الرياضى تكتب « دالة س » فى الصورة د (س) . يدل هذا الرمز على أى مقدار بدلالة س مثل ٨ س أو $٥س^{٢}$ أو $٩س^{٣} - ٤س + ٣$ وهكذا . . فإذا التقينا بالتركيب $د(ص) = ٥ص^{٢} + ٢ص - ٨$ فإنه يعنى أن الدالة التى تعنينا من دوال ص هى $٥ص^{٢} + ٢ص - ٨$ ولقد كان أويلر فى القرن الثامن عشر هو أول من استخدم التعبير الرمزى د (س) .

على ذلك فإننا عندما نقول «جداول الدوال المثلثية » فإنما نعنى الجداول التى تحتوى على جيب ، وجيب تمام ، وظل ، وظل تمام ، وقاطع ، وقاطع تمام الزوايا المختلفة .

وفى الفصل التالى نرى كيف كانت لاختراع جديد — وضع فى الأصل لتسهيل استعمال جداول الدوال المثلثية — آثار بعيدة فى الفروع الأخرى من الرياضيات .

الفصل الخامس

نشأة اللوغاريتمات

لما رأيت يا أعزائى دارسى الرياضيات أن أكثر ما يضايق فى حل المسائل الرياضية ويعوق الحاسبين هو عمليات ضرب وقسمة وتربيع وتكعيب الأعداد الكبيرة ، فكرت فى طريقة يمكن بها التخلص من هذه المعوقات . (نابيير فى مقدمة كتابه)

لم يحدث قط — إذا استثنينا حالة واحدة — أن كان أى ابتداع هام فى الرياضيات من عمل فرد واحد ، بل جرت العادة أن يبذر رياضى معين بذرة تجر وراءها سيلا من أفكار الرياضيين الآخرين ، وبعد سنين ، وفى بعض الأحيان قرون ، تكتمل للبذرة حياة ، وهكذا تتقدم المعرفة الرياضية خطوة إلى الأمام . هذا هو السير الطبيعى للأمور . أما الاستثناء الوحيد فهو ابتداع اللوغاريتمات .

فى يولية عام ١٩١٤ قبل أن تنشب الحرب العظمى الأولى — المأساة الكبرى فى العصر الحديث — اجتمع مندوبون من جميع أجزاء العالم فى مؤتمر بأدنبرة إحياء لذكرى مرت عليها ثلاثمائة عام ، ذكرى نشر كتيب من ١٤٧ صفحة ملأت الجداول الرياضية تسعين منها ، ولقد كان عنوان هذا الكتاب بلغة العلم فى ذلك العصر Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio أى « وصف جداول اللوغاريتمات » .

وفى خطاب رائع وجهه اللورد مولتون Lord Moulton إلى المؤتمر قال :

« لقد جاءت اللوغاريتمات إلى العالم نعمة من السماء ، ترتفع عالية فوق إنتاج الفكر البشرى ، دون أن تستعير من عمل آخر أو تسير فى مسالك معروفة من التفكير الرياضى ، إنها تذكرنا بجزيرة تظهر فجأة من تحت أغوار المحيط ، وتقف وحيدة تحيط بها المياه العميقة من كل جانب » .

لقد استغرق إعداد هذا الكتيب عشرين عاماً من العمل المتصل الشاق ، ويندر فى التاريخ أن أنفق زمن أكثر نفعاً من هذه السنوات العشرين ، فقد كان لها أثر عميق لا يمكن تقديره فى طرق إجراء العمليات الحسابية ، وأكثر من هذا أ.ى المفهوم الجديد الذى وضعه نابيير إلى فتح مجالات من المعرفة الرياضية لم تكن معروفة .

ولد جون نابيير عام ١٥٥٠ وكان عمر أبيه ألكسندر نابيير حينذاك ستة عشر عاما فقط . ولد لأسرة قديمة محترمة ، عرفت بتقديرها لمسئولياتها إزاء المجتمع الذى تعيش فيه ودفاعها الشديد عن حقوقها ، ولقد كان كثيرون من أجداد نابيير عمدا فى أدنبره ، وهو منصب كان يتطلب فى تلك الأيام العاصفة قدرة وقوة فى الخلق ، وعندا اسكتلنديا أصيلا .

لقد تلقى نابيير تعليمه فى المنزل إلى أن أرسل إلى جامعة سانت اندروز St Andrews وهو فى سن الثالثة عشرة ، فقد كانت هذه هى سن القبول فى الجامعات فى القرن السادس عشر ، إلا أنه لم يتخرج من هذه الجامعة ، بل ترك اسكتلندا إلى الخارج ليتلقى تعليمه ، وكان هذا أيضا أمرا طبيعيا فى هذه الأيام لمن كان ابنا لاسكتلندى مقتدر ، وظل فى الخارج سنوات كثيرة ، ولسنا نعرف

أين وماذا درس ، وفى عام ١٥٧٢ تزوج واستقر ليحيا حياة أهل الريف فى ضيعة يملكها والده فى ستيرلنجشير .

ولقد كانت الخلافات والحزازات الدينية تمزق اسكتلندا فى ذلك الحين ، وكشيمة أهل العصر ألقى بنفسه فيها بتحمس شديد ، ولقد أثاره بنوع خاص ما تقوم به إسبانيا الكاثوليكية من اضطهاد للبروتستانتية مذهبه المحبب ، إلا أن هذه الثورة أخمدتها إلى حين هزيمة الأرمادا الإسبانية فى عام ١٥٨٨ ، ولقد قلد أرشميدس فى تصميم أدوات للحرب وصفها بأنها أنشئت « بمعونة الله وعمل الخبراء من العمال للدفاع عن هذه الجزيرة » وقد تضمنت مرآة لإحراق سفن العدو ، ومدفعا «يحطم كل شىء على قوس دائرية » ، وضمن بها «أن يقتل ثلاثين ألفا من الأتراك دون مقتل مسيحى واحـــد » ، ومركبة معدنية تشبه الدبابة صممت بحيث يستطيع راكبوها تحريكها بسهولة وسرعة ويطلقون النار من فتحات صغيرة فيها ، وأخيراً « أجهزة للغوص تحت المـاء ، لخداع العدو والإضرار به » .

إلا أن هذه الأسلحة لم تتعد دور التصميم (مازالت التصميمات موجودة) ، ولم يكن الأمر كذلك بالنسبة لكتاب نشره عام ١٥٩٣ دفاعا عن البروتستانتية ذكر فيه ستةوثلاثين سببا تثبت — له وللآلاف من قارئى كتابه — أن البابا ضد المسيح ، وأن الله عز وجل سينهى العالم بين عامى ١٦٨٨ ، ١٧٠٠ .

ولقد حقق هذا الكتاب نجاحا كبيراً فطبع إحدى وعشرين مرة ، وظل نابيير حتى موته يعتبره أكبر خدمة أداها للانسانية ، ومع كل لم يجتمع أى مؤتمر دولى ليحتفل بمرور ثلاثة قرون على صدوره .

بعد صدور هذا الكتاب بقليل حوّل نابيير عقله نحو الرياضيات ، وبعد عشرين عاما — أى فى عام ١٦١٤ — نشر الكتاب الذى جلب له الشهرة والاحترام ، وكسب له شكر الإنسانية .

فى أيام نابيير كان جيب الزاوية — كما رأينا — يعتبر طولا ، وتجنبا للكسور ، كان هذا الطول يقدر بوحدات صغيرة جدا . وقد رأينا فيما سبق أن واضعى جداول الدوال المثلثية كانوا يختارون عدداً كبيراً جدا بلغ فى بعض الأحيان ١٠ ملايين أو ١٠ بلايين للدلالة على عدد وحدات نصف القطر ، وبهذا يستطيعون حساب طول نصف الوتر (أى الجيب) بدلالة هذه الوحدات إلى درجة كبيرة من الدقة دون استعانة بالكسور .

فى بعض الأحيان يحتاج الأمر إلى إيجاد حاصل ضرب جيبين ، وفى مثل هذه الحالة نحصل على أعداد كبيرة مكونة من سبعة أرقام أو أكثر ، وتتطلب عملية الضرب كثيراً من الوقت والجهد . لذلك قرر نابيير أن يحاول إيجاد طريقة يقلل بها من هذا الجهد ، وتعتبر هذه مسئولية كبيرة نظرا لأن الضرب خلال القرون المتعاقبة كان يعتبر عملية ضرورية لا يمكن الاستغناء عنها . ومما يزيد فى أهمية هذه المسئولية أن التعبير الرمزى أو التحليل فى الجبر لم يكونا قد وصلا إلى علم نابيير ، ولكن لحسن الحظ فبالرغم من أنه لم يكن لدى نابيير سوى الحساب والتمثيل الهندسى للنسبة والتناسب ، كانت له قدرة فائقة على التطبيق وعزيمة لا تفل مكنته من التغلب على كل الصعاب فتوصل ، لا إلى عمليات أسهل من الضرب والقسمة واستخراج الجذور .. الخ فقط ، بل أيضا إلى عدد من أهم الأفكار والمبادىء الأساسية التى تطبق فى فروع أخرى من الرياضيات . لقد كانت بداية عمله مقصورة على ضرب الجيوب ، لكن مع تقدم العمل تبين

لنابيير أنه قد توصل إلى مفاهيم لا يقتصر تطبيقها على العمليات الحسابية فى حساب المثلثات ، بل يمتد إلى مجال أوسع .

لنترك الآن نابيير وحسابه لنناقش — من وجهة النظر الحديثة — معنى ودلالة اللوغاريتمات ، وليس ذلك أمرا صعبا نظرا لما لدينا من تعبير رمزى فى الجبر وأفكار حديثة فيه .

إن نابيير ليشبه دليلا يبحث عن مسلك فى الجبل ، خرج وحيدا وبأدوات بدائية ، ولكنه استطاع الوصول إلى القمة . لقد كان المسلك الذى اكتشفه منحدرا وصعبا إلا أن الذين جاءوا بعده ساروا فى إثر خطواته ، ولا يقلل من عظمة ما وصل إليه أنه عندما وصل مع زميله هنرى بريجز Henry Briggs إلى القمة تبين لهما أن هناك ممرا إليها أفضل من ذلك الذى سارا فيه ، وعندما حرم الموت العالم من نابيير استمر صديقه فى إرشاد القادمين الجدد إلى الممر الجديد ، وفى تمهيده حتى يسهل استعماله . وعندما تقدم الوقت ، وأدخلت إلى الجبر مفاهيم جديدة بالإضافة إلى التعبير الرمزى ، وهى ما لم يسمع عنها فى أيام نابيير ، أصبح تسلق الممر وتحسينه أمرين سهلين .

لا يتطلب فهم دلالة اللوغاريتمات أكثر من الأساس الرياضى الذى قدمناه فى الفصل الثالث . لقد رأينا فى هذا الفصل أن ا مضروبة فى ا كانت تكتب أولا ا ا ثم كتبت $ا^{٢}$ ، وأن « ا مضروبة فى ا مضروبة فى ا » كانت تكتب ا ا ا ثم كتبت $ا^{٣}$: فإذا أردنا أن نضرب $ا^{٢}$ فى $ا^{٣}$ فإن هذا يكافىء تماما ضرب ا ا فى ا ا ا ، ومن الواضح أن النتيجة هى ا ا ا ا ا أى $ا^{٥}$ أى أن: $ا^{٢} \times ا^{٣} = ا^{٥}$

أى إن حاصل ضرب القوة الثانية والقوة الثالثة للرمز ا هو القوة الخامسة لهذا الرمز . هذا مثال لأحد قوانين الأسس ، والقوانين التى لم تكن قد عرفت فى أيام نابيير ، أو على الأقل لم تكن وضعت فى صورتها المحددة . ينص القانون المشار على أن حاصل ضرب قوتين أو أكثر من قوى لنفس الرمز قوة أخرى لهذا الرمز نحصل عليها بجمع القوى المعطاة .

إن أسهل طريقة يتبعها غير الرياضى لفهم دلالة قوانين الأسس هى أن يدرس حالات خاصة تكون فيها للرمز ا قيمة خاصة ولتكن ٢. مثلا، خذ متسلسلة الأعداد الآتية :

٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ٦٤ ، ١٢٨ ، ٢٥٦ ، ٥١٢ ، ١٠٢٤ ، ... الخ

يمكن اليوم كتابة هذه الأعداد فى الصورة الآتية :

$٢^{١}$ ، $٢^{٢}$ ، $٢^{٣}$ ، $٢^{٤}$ ، $٢^{٥}$ ، $٢^{٦}$ ، $٢^{٧}$ ، $٢^{٨}$ ، $٢^{٩}$ ، $٢^{١٠}$ ، ... الخ .

(١) بالضرب نعلم أن $٨ \times ٦٤ = ٥١٢$ مثلا ، وإذا استعملنا الأعداد فى صورتها الثانية فإن $٢^{٣} \times ٢^{٦} = ٢^{٩}$.

لقد استعملنا هنا اللوغاريتمات ، إذ يمكن القول إن « ٣ هى لوغاريتم ٨ للأساس ٢ ، ٦ هى لوغاريتم ٦٤ للأساس ٢ ، ٩ هى لوغاريتم ٥١٢ للأساس ٢ »، إلا أن اختيار الأساس ٢ غير موفق نظرا لأن جداول اللوغاريتمات الحالية ليست محسوبة للأساس ٢ ، وإلا لكان ممكناً أن نوجد لوغاريتمات الأعداد ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٧ ، ... الخ للأساس ٢. بل إن غالبية هذه الجداول محسوبة للأساس ١٠ ، وفى هذه الحالة يكون لوغاريتم

١٠ مساوياً ١ ، ولوغاريتم ١٠٠ مساويا ٢ ، ولوغاريتم ١٠٠٠ مساويا ٣ . وإذا استخدمنا هذه الجداول لوجدنا أن لوغاريتم ٥ للأساس ١٠ هو ٠٫٦٩٨٩٧ ، وهذا يعنى أن $١٠^{٠٫٦٩٨٩٧} = ٥$.

إن المثال الذى أخذناه للوغاريتمات أساسها ١٠ مثال طيب للقانون الذى ينص على أن « لوغاريتم حاصل الضرب يساوى مجموع لوغاريتمات عوامله » فمثلا $٢^{٣} \times ٢^{٥} \times ٢^{٧} \times ٢^{٤} = ٢^{١٩} = ٥٢٤٢٨٨$ (باستعمال جداول اللوغاريتمات) هنا باستخدام اللوغاريتمات أمكن تحويل عملية الضرب إلى عملية جمع .

(٢) بالقسمة نعلم أن $٢٥٦ \div ٤ = ٦٤$ ، وبصورة أخرى $٢^{٨} \div ٢^{٢} = ٢^{٦}$ هذا مثال للقانون الذى ينص على أن «لوغاريتم خارج القسمة يساوى لوغاريتم المقسوم على مطروحا منه لوغاريتم المقسوم عليه » ، فمثلا نظرا لأن $٢^{٨} \div ٢^{٢}$ هى نفسها الكسر $\frac{٢^{٨}}{٢^{٢}}$ فإن « لوغاريتم أى كسر يساوى لوغاريتم البسط مطروحا منه لوغاريتم المقام » .

هنا باستعمال اللوغاريتمات أمكن تغيير عملية القسمة إلى عملية طرح .

(٣) نعلم أن $\sqrt{١٠٢٤} = ٣٢$ وبصورة أخرى $\sqrt{٢^{١٠}} = ٢^{٥}$

لقد قسم اللوغاريتم ١٠ على ٢ حتى يمكن إيجاد لوغاريتم الجذر التربيعى .

كذلك نعلم أن $\sqrt[٣]{٦٤} = ٤$ وبصورة أخرى $\sqrt[٣]{٢^{٦}} = ٢^{٢}$

لقد قسم اللوغاريتم ٦ على ٣ حتى يمكن إيجاد لوغاريتم الجذر التكعيبى .

هذه أمثلة للقانون الذى ينص على أن «لوغاريتم جذر عدد يساوى لوغاريتم العدد مقسوما على دليل الجذر (تذكر أن $\sqrt{٢^{١٠}}$ تدل على $\sqrt[٢]{٢^{١٠}}$) .

باستخدام الجذور يمكن إيجاد الجذر عن طريق عملية قسمة .

هذا كل ما فى الأمر من معنى ودلالة للوغاريتمات ، ويبدو هذا بسيطا لدرجة تدعو إلى التقليل من أهمية العمل الذى قام به نابيير ، إلا أن الأمر كان شديد الصعوبة نظراً لضآلة الخيط الذى بدأ منه .

لنختلس النظر إلى الطريقة التى يعبر بها نابيير عن مفهومه للوغاريتم عدد ما فى كتيب صغير اسمه Constructio نشر فى عام ١٦١٩ ، أى بعد وفاته بعامين ، يشرح نابيير كيف توصل إلى نتائجه ، وكيف أجرى حسابات الجداول التى يتضمنها كتابه الآخر Descriptio . لم يقدم فى هذا الأخير من الشرح إلا ما يكفى للرياضيين فى إدراك المفهوم الجديد وفى استخدام الجداول ، ولقد أضاف تعليقا غاية فى التواضع هو أنه لا ينوى شرح الطريقة التى وضعها ما لم يجد الرياضيون الآخرون أن العمل الذى ابتدعه ذو قيمة .

يوضح كتيب Constructio كيف طور نابيير أفكاره خلال فترة طويلة من الزمن ، وإن المرء ليحس أن الفكرة واتته وهو يعالج المتواليات الحسابية والهندسية . المتوالية الحسابية متسلسلة من الحدود مثل هذه التى عالجناها فى صفحة ٧٩ ، وعلى العموم فإن حدود هذه المتوالية تتزايد (أو تتناقص) بحيث يكون الفرق بين كل حد والحد الذى يسبقه ثابتا (لا يذكر نابيير متواليات حسابية تناقصية بل إن النمط الوحيد الذى استخدمه هو ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٠٠٠٠) .

أما المتوالية الهندسية فهى متسلسلة من الأعداد أو الحدود تزيد أو تنقص بحيث تكون النسبة بين أى حد والحد الذى يسبقه ثابتة ، وعلى ذلك فإن الأعداد ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ٠٠٠ تكون متوالية هندسية أساسها ٢ ،

كذلك تكون الأعداد ٧٢٩ ، ٢٤٣ ، ٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ٣ ، ١ متوالية هندسية أساسها $\frac{١}{٣}$.

ومما لاشك فيه أن نابيير كان يعرف الحقيقة التي عرفها الرياضيون منذ أيام أرشميدس، تلك أنه في أي متوالية هندسية تبدأ بالواحد الصحيح يكون حاصل ضرب أي حدين حداً في المتوالية . خذ مثلا المتوالية : ١ ، ٣ ، ٩ ، ٢٧ ، ٨١ ، ٢٤٣ ، ٧٢٩ . وإذا رمزنا لهذه الحدود بالرموز ح$_{١}$ ، ح$_{٢}$ ، ح$_{٣}$ ، ح$_{٤}$ ، ح$_{٥}$ ، ح$_{٦}$ ، ... لوجدنا أن ح$_{١}$ح$_{٣}$ = ح$_{٤}$ ، ح$_{٢}$ح$_{٤}$ = ح$_{٦}$ ، ... واضح أن هناك علاقة بين الأعدد التي تكون المتوالية الهندسية ، وتلك التي تكون المتوالية الحسابية ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ...

ولقد كانت المتوالية الهندسية هي النقطة التي بدأ منها نابيير بحثه ، لذلك يرى بعض الناس أنه ما دامت المتوالية الهندسية هي البذرة التي نمت عنها اللوغاريتمات فإن ابتداع نابيير لها ينبغي أن يدرج مع غيره من الاكتشافات الرياضية التي أشتركت في إنتاجها عقول كثيرة . إلا أن المفهوم الكامل للوغاريتمات قد ابتعد عن مفهوم المتوالية الهندسية ونتائجها إلى الدرجة التي لايحق معها إرجاع الفضل في ابتداع اللوغاريتمات إلى من ابتدع السلم العددي لالشيء إلا لأن نابيير قد استعمل ذلك السلم .

ويبدو أن الفكرة الأولى عند نابيير كانت أن يضع متوالية هندسية تبدأ بالحدود ١٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ، ٩ ٩٩٩ ٩٩٩ وتستمر في الهبوط مقتربة من الصفر ، بحيث يكون كل حد $\frac{٩\ ٩٩٩\ ٩٩٩}{١٠\ ٠٠٠\ ٠٠٠}$ من الحد الذي يسبقه ، فإذا أطلق على الحدود المتتالية ح. ، ح$_{١}$ ، ح$_{٢}$ ، ... فإنه يكون قد ربط بين المتوالية الهندسية

كذلك تكون الأعداد ٧٢٩ ، ٢٤٣ ، ٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ٣ ، ١ متوالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$.

ومما لاشك فيه أن نابيير كان يعرف الحقيقة التي عرفها الرياضيون منذ أيام أرشميدس، تلك أنه في أي متوالية هندسية تبدأ بالواحد الصحيح يكون حاصل ضرب أي حدين حداً في المتوالية . خذ مثلا المتوالية : ١ ، ٣ ، ٩ ، ٢٧ ، ٨١، ٢٤٣ ، ٧٢٩ . وإذا رمزنا لهذه الحدود بالرموز ح$_1$، ح$_2$، ح$_3$، ح$_4$، ح$_5$، ح$_6$ ، ... لوجدنا أن ح$_1$ح$_3$ = ح$_4$ ، ح$_2$ح$_4$ = ح$_6$ ، . . . واضح أن هناك علاقة بين الأعدد التي تكون المتوالية الهندسية ، وتلك التي تكون المتوالية الحسابية ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ...

ولقد كانت المتوالية الهندسية هي النقطة التي بدأ منها نابيير بحثه ، لذلك يرى بعض الناس أنه ما دامت المتوالية الهندسية هي البذرة التي نمت عنها اللوغاريتمات فإن ابتداع نابيير لها ينبغي أن يدرج مع غيره من الاكتشافات الرياضية التي أشتركت في إنتاجها عقول كثيرة . إلا أن المفهوم الكامل للوغاريتمات قد ابتعد عن مفهوم المتوالية الهندسية ونتائجها إلى الدرجة التي لايحق معها إرجاع الفضل في ابتداع اللوغاريتمات إلى من ابتدع السلم العددي لاشيء إلا لأن نابيير قد استعمل ذلك السلم .

ويبدو أن الفكرة الأولى عند نابيير كانت أن يضع متوالية هندسية تبدأ بالحدود ١٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ، ٩ ٩٩٩ ٩٩٩ وتستمر في الهبوط مقتربة من الصفر ، بحيث يكون كل حد $\frac{٩\ ٩٩٩\ ٩٩٩}{١٠\ ٠٠٠\ ٠٠٠}$ من الحد الذي يسبقه ، فإذا أطلق على الحدود المتتالية ح$_0$ ، ح$_1$ ، ح$_2$ ، ... فإنه يكون قد ربط بين المتوالية الهندسية

والمتوالية الحسابية التي يكونها ترتيب الحدود ، ويكون في هذه الحالة مجموع رتبتي أي حدين مساويا لرتبة حاصل ضربهما ، وقبل أن نستعرض كيف اكتشف نابيير عدم صلاحية هذه الفكرة ، ينبغي أن نوضح لماذا اعتبر الحد الأول في متواليته الهندسية ١٠ ٠٠٠ ٠٠٠ .

يقدم نابيير السبب في هذا الاختيار . لقد كان هو العدد الذي اختير في أحسن الجداول المثلثية في تلك الأيام للدلالة على طول نصف القطر الذي يتوقف عليه عدد وحدات الجيب ، وفي ذلك يقول « بدلا من ١٠٠ ٠٠٠ التي يأخذها قليل الخبرة قيمة لأكبر جيب (جيب ٩٠°) . أما الأكثر علما فإنه يأخذ ١٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ، وبذلك يمكن التعبير عن الفروق بين جميع الجيوب بصورة أفضل ، ومن أجل ذلك أيضاً نستعمل العدد الواحد لنصف القطر ولأكبر التناسبات الهندسية عندنا » .

ويثير هذا سؤالا هاما هو : أي جداول للجيوب استعملها نابيير ؟ . فقد كان في متناول يديه الكثير منها ، ويقول إنه قد أنفق عشرين عاما في إعداد جداول اللوغاريتمات التي ملأت الصفحات التسعين من كتابه Descriptio ، ونظراً لأن هذا الكتاب قد نشر عام ١٦١٤ ، فلابد أنه قد بدأ العمل عام ١٥٩٤ . في هذا العام كانت هناك جداول متعددة في حساب المثلثات ، أحدها الجدول الذي نشره ريتيكوس عام ١٥٥١ ، وكان هذا الجدول — كما رأينا — يعطي جيوب الزوايا في فترات من ١٠ دقائق ، لذلك لم يكن ذا نفع لنابيير الذي كان يضع لوغاريتمات جيوب الزوايا في فترة من دقيقة واحدة ، ولقد وسع فيتا هذا الجدول عام ١٥٧٩ ليشمل دوال الزوايا من ٠° إلى ٩٠° في فترات من دقيقة واحدة ، ونظراً لأن كلا الجدولين كان مؤسساً على نصف قطر قدره

والمتوالية الحسابية التي يكونها ترتيب الحدود ، ويكون في هذه الحالة مجموع رتبتي أي حدين مساويا لرتبة حاصل ضربهما ، وقبل أن نستعرض كيف اكتشف نابيير عدم صلاحية هذه الفكرة ، ينبغي أن نوضح لماذا اعتبر الحد الأول في متواليته الهندسية ١٠ ٠٠٠ ٠٠٠ .

يقدم نابيير السبب في هذا الاختيار . لقد كان هو العدد الذي اختير في أحسن الجداول المثلثية في تلك الأيام للدلالة على طول نصف القطر الذي يتوقف عليه عدد وحدات الجيب ، وفي ذلك يقول « بدلا من ١٠٠ ٠٠٠ التي يأخذها قليل الخبرة قيمة لأكبر جيب (جيب ٩٠°) . أما الأكثر علما فإنه يأخذ ١٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ، وبذلك يمكن التعبير عن الفروق بين جميع الجيوب بصورة أفضل ، ومن أجل ذلك أيضاً نستعمل العدد الواحد لنصف القطر ولأكبر التناسبات الهندسية عندنا » .

ويثير هذا سؤالا هاما هو : أي جداول للجيوب استعملها نابيير ؟ . فقد كان في متناول يديه الكثير منها ، ويقول إنه قد أنفق عشرين عاما في إعداد جداول اللوغاريتمات التي ملأت الصفحات التسعين من كتابه Descriptio ، ونظراً لأن هذا الكتاب قد نشر عام ١٦١٤ ، فلابد أنه قد بدأ العمل عام ١٥٩٤ . في هذا العام كانت هناك جداول متعددة في حساب المثلثات ، أحدها الجدول الذي نشره ريتيكوس عام ١٥٥١ ، وكان هذا الجدول — كما رأينا — يعطي جيوب الزوايا في فترات من ١٠ دقائق ، لذلك لم يكن ذا نفع لنابيير الذي كان يضع لوغاريتمات جيوب الزوايا في فترة من دقيقة واحدة ، ولقد وسع فيتا هذا الجدول عام ١٥٧٩ ليشمل دوال الزوايا من ٠° إلى ٩٠° في فترات من دقيقة واحدة ، ونظراً لأن كلا الجدولين كان مؤسساً على نصف قطر قدره

والمتوالية الحسابية التى يكونها ترتيب الحدود ، ويكون فى هذه الحالة مجموع رتبتى أى حدين مساويا لرتبة حاصل ضربهما ، وقبل أن نستعرض كيف اكتشف نابيير عدم صلاحية هذه الفكرة ، ينبغى أن نوضح لماذا اعتبر الحد الأول فى متواليته الهندسية ١٠ ٠٠٠ ٠٠٠ .

يقدم نابيير السبب فى هذا الاختيار . لقد كان هو العدد الذى اختير فى أحسن الجداول المثلثية فى تلك الأيام للدلالة على طول نصف القطر الذى يتوقف عليه عدد وحدات الجيب ، وفى ذلك يقول « بدلا من ١٠٠ ٠٠٠ التى يأخذها قليل الخبرة قيمة لأكبر جيب (جيب ٩٠°) . أما الأكثر علما فإنه يأخذ ١٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ، وبذلك يمكن التعبير عن الفروق بين جميع الجيوب بصورة أفضل ، ومن أجل ذلك أيضاً نستعمل العدد الواحد لنصف القطر ولأكبر التناسبات الهندسية عندنا » .

ويثير هذا سؤالا هاما هو : أى جداول للجيوب استعملها نابيير ؟ . فقد كان فى متناول يديه الكثير منها ، ويقول إنه قد أنفق عشرين عاما فى إعداد جداول اللوغاريتمات التى ملأت الصفحات التسعين من كتابه Descriptio ، ونظراً لأن هذا الكتاب قد نشر عام ١٦١٤ ، فلابد أنه قد بدأ العمل عام ١٥٩٤ . فى هذا العام كانت هناك جداول متعددة فى حساب المثلثات ، أحدها الجدول الذى نشره ريتيكوس عام ١٥٥١ ، وكان هذا الجدول — كما رأينا — يعطى جيوب الزوايا فى فترات من ١٠ دقائق ، لذلك لم يكن ذا نفع لنابيير الذى كان يضع لوغاريتمات جيوب الزوايا فى فترة من دقيقة واحدة ، ولقد وسع فيتا هذا الجدول عام ١٥٧٩ ليشمل دوال الزوايا من ٠° إلى ٩٠° فى فترات من دقيقة واحدة ، ونظراً لأن كلا الجدولين كان مؤسساً على نصف قطر قدره

١٠ ٠٠٠ ٠٠٠ وحدة فمن المحتمل أن يكون نابيير قد استعمل التعديل الذى أجراه ڤيتا على الجداول التى وضعها ريتيكوس عام ١٥٥١ ، أما الجداول التى نشرت لريتيكوس بعد ذلك عام ١٥٩٦ فلم يكن نابيير يعرف عنها شيئاً عندما شرح نصف القطر الذى يختاره « الأكثر علماً » ، وإلا لكان قد استعمل الجداول المبنية على نصف قطر قدره ١٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ وحدة ، والتى نشرت عام ١٥٩٦ فى Opus Palatinum ، ولعله كان يعنى بإشارته إلى « الأقل خبرة » أولئك الذين أعدوا جدولى الدوال المثلثية اللذين ظهرا فى إنجلترا فى عامى ١٥٩٠ ، ١٥٩٤ ، « وبالأكثر علماً » ريتيكوس وڤيتا .

وبعد أن اختار نابيير العدد ١٠ ٠٠٠ ٠٠٠ حداً أول فى متواليته الهندسية بدأ يحسب الحدود المائة التالية كل منها $\frac{٩ ٩٩٩ ٩٩٩}{١٠ ٠٠٠ ٠٠٠}$ من الحد السابق له فلو استمر فى ذلك لحصل على سلسلة هائلة من الأعداد فى متوالية هندسية ، كل منها قريب جداً من العدد السابق له لدرجة أن جميع الأعداد التى يشتمل عليها جدول الجيوب تكون ضمنها ، وكذلك ملايين من الأعداد الأخرى . إن اختيار هذا الأساس أدى بنابيير أن يحصل على متوالية حدها الثانى ٩ ٩٩٩ ٩٩٩ وهو العدد الذى يقل ١ عن العدد السابق له ، وبالتدريج تضيق الفجـــوة بين كل عددين متتاليين . ومع الاستمرار فى العمل أخذ عدد الحدود اللازم لملء الفجوة بين العددين المتتاليين يزيد شيئاً فشيئاً حتى أصبح حساب هذا العدد متضمناً ملايين من العمليات الحسابية المنفصلة ، ويعرض نابيير فى Constructio الأعداد نفسها التى استعملها فى المراحل الأولى من عمله أى قبل أن يتخلى عن هذا

٠٠٠ ٠٠٠ ١٠ وحدة فمن المحتمل أن يكون نابيير قد استعمل التعديل الذى أجراه ڤيتا على الجداول التى وضعها ريتيكوس عام ١٥٥١ ، أما الجداول التى نشرت لريتيكوس بعد ذلك عام ١٥٩٦ فلم يكن نابيير يعرف عنها شيئاً عندما شرح نصف القطر الذى يختاره « الأكثر علماً » ، وإلا لكان قد استعمل الجداول المبنية على نصف قطر قدره ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ١٠ وحدة ، والتى نشرت عام ١٥٩٦ فى Opus Palatinum ، ولعله كان يعنى بإشارته إلى « الأقل خبرة » أولئك الذين أعدوا جدولى الدوال المثلثية اللذين ظهرا فى إنجلترا فى عامى ١٥٩٠ ، ١٥٩٤ ، « وبالأكثر علماً » ريتيكوس وڤيتا .

وبعد أن اختار نابيير العدد ٠٠٠ ٠٠٠ ١٠ حداً أول فى متواليته الهندسية بدأ يحسب الحدود المائة التالية كل منها $\frac{9\,999\,999}{10\,000\,000}$ من الحد السابق له فلو استمر فى ذلك لحصل على سلسلة هائلة من الأعداد فى متوالية هندسية ، كل منها قريب جداً من العدد السابق له لدرجة أن جميع الأعداد التى يشتمل عليها جدول الجيوب تكون ضمنها ، وكذلك ملايين من الأعداد الأخرى . إن اختيار هذا الأساس أدى بنابيير أن يحصل على متوالية حدها الثانى ٩٩٩ ٩٩٩ ٩ وهو العدد الذى يقل ١ عن العدد السابق له ، وبالتدريج تضيق الفجوة بين كل عددين متتاليين . ومع الاستمرار فى العمل أخذ عدد الحدود اللازم لملء الفجوة بين العددين المتتاليين يزيد شيئاً فشيئاً حتى أصبح حساب هذا العدد متضمناً ملايين من العمليات الحسابية المنفصلة ، ويعرض نابيير فى Constructio الأعداد نفسها التى استعملها فى المراحل الأولى من عمله أى قبل أن يتخلى عن هذا

الأسلوب فى العمل ، وهنا يمر بأول مثال استعملت فيه العلامة العشرية لتحديد الكسر العشرى .

إن الكسور العشرية هى أهم تطور فى الحساب منذ إدخال الرموز العددية الهندية العربية . عن طريقها يمكن جمع وطرح وضرب وقسمة أجزاء من الوحدة ، وبذلك نتجنب الطرق المعقدة التى تنطوى عليها الكسور الأخرى ،ولقد كان الرياضى سيمون ستيڤن Simon Stevin من بروجس Bruges أول من حبذ استعمالها فى كتابه الذى نشره عام ١٥٨٢ La Practique d'Arithmetique. لقد كاد كثير من الرياضيين السابقين يصلون إلى الكسور العشرية . مثلا أعدت جداول للجذور التربيعية لأعداد ضربت فى ١٠٠٠٠٠٠ وبذلك كانت الجذور التى تحتوى عليها الجداول مكبرة ١٠٠٠ مرة ، وبهذه الطريقة أمكن تفادى استعمال الكسور على الأقل للقيم التقريبية للجذور ، ولقد رأينا من قبل أن طريقة مثل هذه قد استخدمها واضعو جداول الدوال المثلثية . أما الفكرة التى تكمن وراء كسورنا العشرية فقد تم الوصول إليها بالتدريج خلال مئات من السنين . لقد اقترح ستيڤن طريقة معقدة لاستخدام الكسور العشرية عن طريقها يكتب ٢٣٫٥٤٨ مثلا فى الصورة الآتية :

٢٣ ⓪ ٥ ① ٤ ② ٨ ③ .

ويبدو أن نابيير كان أول من استعمل علامة يحدد بها نهاية الأعداد الصحيحة ، وأول من أدرك أن الكسور العشرية تقع فى خانات تعتبر امتداداً للسلم العددى على يمين خانة الوحدات . يقول نابيير فى Constructio « فى الأعداد التى تميزها علامة فى وسطها يكون ما يكتب على يمين العلامة كسراً مقامه واحد أمامه أصفار بعدد الأرقام الواقعة على يمين العلامة » . هذا

مثال آخر لفكرة غاية فى البساطة قدر أن تكون لها نتائج بالغة الأهمية . وهنا ينبغى أن نتذكر أن كتيب Constructio لم ينشر إلا بعد عامين من موت نابيير ، لذلك لسنا نستطيع أن نقطع أيهما الذى أدخل العلامة العشرية أهو نابيير نفسه ، أم بريجز فى أثناء إعداده الكتيب للنشر ، وإذا كان الافتراض الثانى أكثر ترجيحاً فكيف أمكن لنابيير أن يقوم بالحسابات التى أجراها دون أن يستخدم العلامة العشرية .

كى يحسب نابيير حدود متواليته الهندسية بأقل جهد ممكن أخذ يطرح من كل حد يضيفه للمتوالية كسراً مقداره واحد على عشرة ملايين منه ، ولعل اقتطافنا لما جاء فى Constructio يوضح الطريقة :

الحد الأول فى المتوالية الهندسية المطلوبة ١٠ ٠٠٠ ٠٠٠

الأساس $\frac{٩٩٩٩٩٩٩}{١٠٠٠٠٠٠٠}$

اطرح $\frac{١}{١٠٠٠٠٠٠٠}$ من كل حد على التوالى

```
١٠٠٠٠٠٠٠,٠٠٠٠٠٠٠
       ١,٠٠٠٠٠٠٠
----------------
 ٩٩٩٩٩٩٩,٠٠٠٠٠٠٠
        ,٩٩٩٩٩٩٩
----------------
 ٩٩٩٩٩٩٨,٠٠٠٠٠٠١
        ,٩٩٩٩٩٩٨
----------------
 ٩٩٩٩٩٩٧,٠٠٠٠٠٠٣
        ,٩٩٩٩٩٩٧
----------------
 ٩٩٩٩٩٩٦,٠٠٠٠٠٠٦
```

مثال آخر لفكرة غاية فى البساطة قدر أن تكون لها نتائج بالغة الأهمية .
وهنا ينبغى أن نتذكر أن كتيب Constructio لم ينشر إلا بعد عامين من موت نابيير ، لذلك لسنا نستطيع أن نقطع أيهما الذى أدخل العلامة العشرية أهو نابيير نفسه ، أم بريجز فى أثناء إعداده الكتيب للنشر ، وإذا كان الافتراض الثانى أكثر ترجيحاً فكيف أمكن لنابيير أن يقوم بالحسابات التى أجراها دون أن يستخدم العلامة العشرية .

كى يحسب نابيير حدود متواليته الهندسية بأقل جهد ممكن أخذ يطرح من كل حد يضيفه للمتوالية كسراً مقداره واحد على عشرة ملايين منه ، ولعل اقتطافنا لما جاء فى Constructio يوضح الطريقة :

الحد الأول فى المتوالية الهندسية المطلوبة ١٠ ٠٠٠ ٠٠٠

الأساس $\frac{٩٩٩٩٩٩٩}{١٠٠٠٠٠٠٠}$

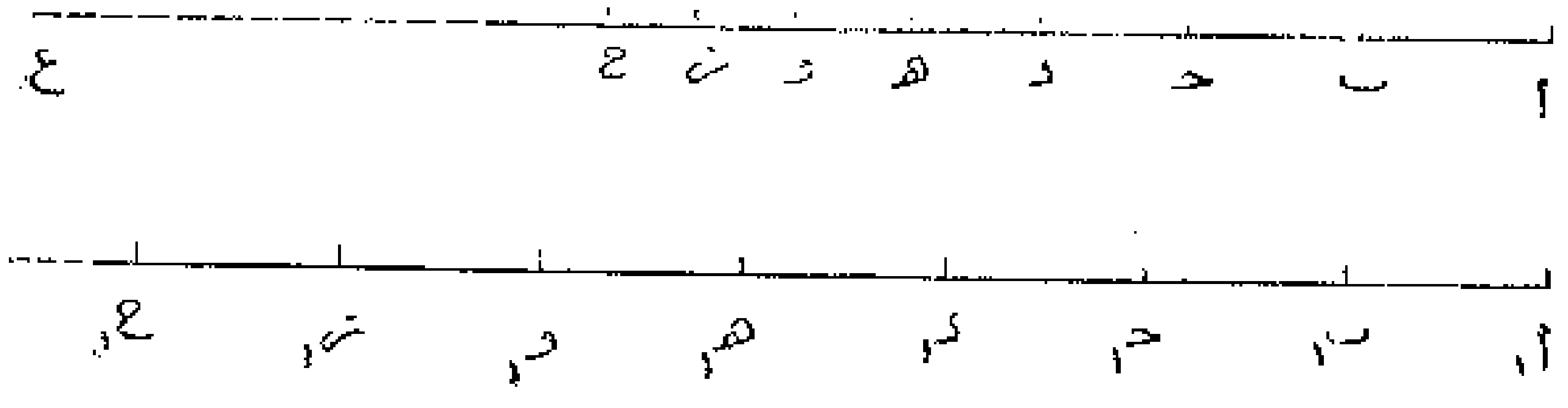
اطرح $\frac{١}{١٠٠٠٠٠٠٠}$ من كل حد على التوالى

١٠٠٠٠٠٠٠,٠٠٠٠٠٠٠
١,٠٠٠٠٠٠٠
٩٩٩٩٩٩٩,٠٠٠٠٠٠٠
,٩٩٩٩٩٩٩
٩٩٩٩٩٩٨,٠٠٠٠٠٠١
,٩٩٩٩٩٩٨
٩٩٩٩٩٩٧,٠٠٠٠٠٠٣
,٩٩٩٩٩٩٧
٩٩٩٩٩٩٦,٠٠٠٠٠٠٦

واستمر نابيير حتى وصل إلى الحد المائة فكان ٩٥٠ ٠٠٠٤و٩٠٠ ٩٩٩ ٩ أى يقل عن الحد الأول بمقدار ١٠٠ تقريباً .

عند هذا تبين لنابيير أنه لا بد من طريقة أخرى ، وعند هذه المرحلة ابتدع تمثيلا هندسيا للنسبة والتناسب حتى يعرف عن طبيعة المسألة التى يبحثها شيئا أكثر ، أى إنه بدأ فى تطبيق التحليل على هذه المسألة بالرغم من أنه لم يكن لديه الرموز الجبرية كلغة يعبر بها عن خطوات هذا التحليل . ونظراً لأن نظامه فى اللوغاريتمات وطرقه فى الحساب قد أهملت منذ عهد بعيد ، فإننا نحتاج إلى التدقيق فيها حتى نتمكن من إدراك الأسس التى تقوم عليها .

لقد أدت بنابيير دراسته للمشكل إلى تصور حركة نقطة فى خط يمثل ٠٠٠ ٠٠٠ ١٠ وحدة . لنفرض أن ا ع فى شكل ٦١ هو هذا الخط ، ولنفترض أن نقطة تتحرك من ا نحو ع بحيث تنقص سرعتها الابتدائية عند ا بانتظام . إن المسافات المقطوعة فى فترات زمنية متساوية تقل بالتدريج لكن النسبة بين أى مسافتين متتاليتين تظل دائما ثابتة ، ذلك لأن السرعة تقل بانتظام . لاحظ أن نابيير هنا يقدم صورة « عامة » لمتوالية هندسية . فى هذا الشكل يطبق التحليل ويهرب من الحساب بشكل ما ينقصه من تعميم .



شكل (٦١)

فى شكل ٦١ لا تدل النقط ا ، ب ، حـ ، ى ، . . . على المواضع المتتالية للنقطة المتحركة بعد فترات زمنية متساوية فقط ، ولكنها تدل أيضا على مواضع الحدود ٠٠٠ ٠٠٠ ١٠ ، ٩٩٩ ٩٩٩ ٩ ، ٠٠٠ الخ فى متوالية نابيير الهندسية على السلم العددى ، فيمثل ا ع كله الحد الأول ٠٠٠ ٠٠٠ ١٠ ، ب ع الحد الثانى ٩٩٩ ٩٩٩ ٩ ، ٠٠٠ وهكذا .

بعد ذلك رسم نابيير خطا ثانيا (الخط الأسفل فى شكل ٦١) وتصور نقطة تتحرك عليه دون تغير فى سرعتها ، أى أن تظل السرعة عند أى لحظة مساوية للسرعة الابتدائية . فى هذه الحالة تكون المسافات ا١ب١ ، ب١حـ١ ، حـ١ ى١ ، متساوية ، ولقد أوضح نابيير أنه عندما تصل النقطة على الخط الأعلى إلى ب تصل النقطة على الخط الأسفل إلى ب١ حيث ا١ ب١ أكبر قليلا من ا ب . السبب فى ذلك هو أن النقطتين تبدآن الحركة بسرعة واحدة ، إلا أن سرعة النقطة على الخط الأعلى تأخذ فى التناقص باستمرار ، بينما سرعة النقطة على الخط الأسفل لا تتغير، ثم أخذ نابيير ا ب وحدة للقياس قـــدر بها ا١ب١ فوجده ١,٠٠٠٠٠٠١ فاعتبر هذا « عددا دالا » للعدد ٩٩٩ ٩٩٩ ٩ وبذلك ربط بين طول ا١ ب١ وطول ب ع نظرا لأن هذا الأخير يمثل ٩٩٩ ٩٩٩ ٩ .

وبدلا من استخدام مصطلح مثل « العدد الدال » فإن نابيير أطلق على الأعداد التى يمثلها ا١ ب١ ، ا١حـ١ ، ا١ى١ ، ... « أعدادا زائفة » ، وأخيرا ابتدع لها كلمة Logarithm مستعملا فى ذلك الكلمتين اليونانيتين — اللتين مررنا بهما قبل ذلك — arithmos أى عدد ، Logos أى نسبة ، ومن المستحيل معرفة ما كان يجول فى ذهنه عند تركيبه لهذه الكلمة ، إلا أنه بعد

فى شكل ٦١ لا تدل النقط ١ ، ب ، حـ ، ى ، . . . على المواضع المتتالية للنقطة المتحركة بعد فترات زمنية متساوية فقط ، ولكنها تدل أيضا على مواضع الحدود ٠٠٠ ٠٠٠ ١٠ ، ٩٩٩ ٩٩٩ ٩ ، ٠٠٠ الخ فى متوالية نابيير الهندسية على السلم العددى ، فيمثل ١ ع كله الحد الأول ٠٠٠ ٠٠٠ ١٠ ، ب ع الحد الثانى ٩٩٩ ٩٩٩ ٩ ، ٠٠٠ وهكذا .

بعد ذلك رسم نابيير خطا ثانيا (الخط الأسفل فى شكل ٦١) وتصور نقطة تتحرك عليه دون تغير فى سرعتها ، أى أن تظل السرعة عند أى لحظة مساوية للسرعة الابتدائية . فى هذه الحالة تكون المسافات ١,ب, ، ب,حـ, ، حـ,ى, ، متساوية ، ولقد أوضح نابيير أنه عندما تصل النقطة على الخط الأعلى إلى ب تصل النقطة على الخط الأسفل إلى ب, حيث ١,ب, أكبر قليلا من ١ ب. السبب فى ذلك هو أن النقطتين تبدآن الحركة بسرعة واحدة ، إلا أن سرعة النقطة على الخط الأعلى تأخذ فى التناقص باستمرار ، بينما سرعة النقطة على الخط الأسفل لا تتغير، ثم أخذ نابيير ١ ب وحدة للقياس قـدر بها ١,ب, فوجده ١,٠٠٠٠٠٠١ فاعتبر هذا « عددا دالا » للعدد ٩٦٩ ٩٩٩ ٩ وبذلك ربط بين طول ١,ب, وطول ب ع نظرا لأن هذا الأخير يمثل ٩٩٩ ٩٩٩ ٩.

وبدلا من استخدام مصطلح مثل « العدد الدال » فإن نابيير أطلق على الأعداد التى يمثلها ١,ب, ، ١,حـ, ، ١,ى, ، ٠٠٠ « أعدادا زائفة » ، وأخيرا ابتدع لها كلمة Logarithm مستعملا فى ذلك الكلمتين اليونانيتين — اللتين مررنا بهما قبل ذلك — arithmos أى عدد ، Logos أى نسبة ، ومن المستحيل معرفة ما كان يجول فى ذهنه عند تركيبه لهذه الكلمة ، إلا أنه بعد

سبع سنوات أعلن زميله فى العمل هنرى بريجز أنه « يبـدو أنها سميت لوغاريتمات .. لأنها تدلنا على أعداد يحتفظ أحدها للآخر بنفس النسبة » .

ولقد كانت الخطة الأصلية لنابيير أن يعطى (اختياريا) لوغاريتما قدره صفر للطول ا ع الذى يمثل نصف قطر قدره ١٠٠٠٠٠٠٠ وحدة ؛ فقد اعتبر نابيير أن ال ١٠٠٠٠٠٠٠ وحدة هى بعد النقطة المتحركة عن ع عند بداية الحركة (أى بعد مضى صفر من الوقت) أو بتعبيره هو « من تعريف المسافة يكون لوغاريتم نصف القطر صفرا » وبالتحليل نفسه استنتج أن الطول الذى يمثله ا ب، هو لوغاريتم الطول الذى يمثله ب ع ، وأن ا، حـ، هو لوغاريتم حـ ع ، وأن ا، و، هو لوغاريتم و ع ... وهكذا أى إنه كلما صغر العدد زاد لوغاريتمه ؛ إلا أنه بعد ذلك عندما وجد أنه توصل إلى مفهوم يمكن تعميم تطبيقه على الأعداد ، لا على قيم الجيوب فقط ، قرر أنه بالنسبة للأعداد التى هى أكبر من ١٠٠٠٠٠٠٠ فإن المستقيم ا ع ينبغى أن يمد إلى الخلف ، وعند ذاك تعتبر النقطة المتحركة كما لو كانت تتحرك إلى اليسار ، وفى هذه الحالة يعتبر لوغاريتم العدد « ناقصاً » وهى الكلمة التى حل محلها المصطلح الحديث « سالب » ؛ وفى هـذا يقول نابيير . إن لوغاريتمات الجيـوب موجبة دائمـا لأنها دائما أكبر من الصفر ، فلذلك نضع قبلها العلامة + » وسنرى فيما بعد أن هذا المفهوم قد انعكس بعد أن قدم نابيير وبريجز نوعا من اللوغاريتمات نعرفه الآن باللوغاريتمات المعتادة ، واليوم يعتبر لوغاريتم أى عدد أكبر من ١ موجبا ، ولوغاريتم أى عدد أقل من ١ سالباً .

ولكى يجد نابيير طريقة عملية يحسب بها جدول اللوغاريتمات استغل النسبة ، ودون أن يعطى برهاناً كاملا أوضح أنه إذا كانت $\frac{ا}{ب} = \frac{حـ}{ء}$

فإن لوغاريتم ب - لوغاريتم ا = لوغاريتم ء — لوغاريتم حـ ، ويصوغ نابيير

هذه النظرية التى تنطبق على اللوغاريتمات الحديثة كما تنطبق على اللوغاريتمات التى ابتدعها هو قائلا : « إن الفروق بين لوغاريتمات الجيوب المتناسبة متساوية وهذا ينشأ حتما من تعريف اللوغاريتم والحركتين ، وطبقاً لهذه التعاريف تناظر الزيادة الحسابية الثابتة نقصا هندسياً متناسباً ، ومن هـــذا يتعين استنتاج أن اللوغاريتمات التى تكون الأبعاد بينها متساوية تناظر جيوباً متساوية . لهذه العبارة أهمية قصوى فقد مكنت نابيير من اختيار اللوغاريتمات اللازمة لجداول الجيوب ، وكان لا بد من تطبيقها مع النظريات التى نشأت عنها قبل أن تستخدم اللوغاريتمات .

وفى أول طبعة لكتاب Descriptio التى ظهرت عام ١٦١٤ ، كانت اللوغاريتمات ذات سبعة أرقام ، وفى الطبعات التالية كانت ذات ستة أرقام ولعل ذلك راجع إلى خطأ صغير حدث فى عمل نابيير تراكم ونتج عنه خطأ فى الرقم الأخير ، وفيما يلى صورة للسطرين الأول والأخير فى طبعة ١٦١٦ .

٣٠°

دقائق	الجيب	اللوغاريتم	+/– الفرق	اللوغاريتم	الجيب	
٠	٥٠٠٠٠٠	٦٩٣١٤٧	٥٤٩٣٠٦	١٤٣٨٤١	٨٦٦٠٢٥	٦٠
	(ثم يتلو ذلك ٢٩ سطراً حذفناها هنا)					
٣٠	٥٠٧٥٣٨	٦٧٨١٨٣	٥٢٩٢٥٢	١٤٨٩٣٠	٨٦١٦٢٩	٣٠

٥٩°

يمكن إيجاد لوغاريتمـــات دوال الزوايا من ٠َ ٣٠° إلى ٣٠ ٣٠°

هذه النظرية التى تنطبق على اللوغاريتمات الحديثة كما تنطبق على اللوغاريتمات التى ابتدعها هو قائلا : « إن الفروق بين لوغاريتمات الجيوب المتناسبة متساوية وهذا ينشأ حتما من تعريف اللوغاريتم والحركتين ، وطبقاً لهذه التعاريف تناظر الزيادة الحسابية الثابتة نقصا هندسياً متناسباً ، ومن هـــذا يتعين استنتاج أن اللوغاريتمات التى تـكون الأبعاد بينها متساوية تناظر جيوباً متساوية . لهذه العبارة أهمية قصوى فقد مكنت نابيير من اختيار اللوغاريتمات اللازمة لجداول الجيوب ، وكان لا بد من تطبيقها مع النظريات التى نشأت عنها قبل أن تستخدم اللوغاريتمات .

وفى أول طبعة لـكتاب Descriptio التى ظهرت عام ١٦١٤ ، كانت اللوغاريتمات ذات سبعة أرقام ، وفى الطبعات التالية كانت ذات ستة أرقام ولعل ذلك راجع إلى خطأ صغير حدث فى عمل نابيير تراكم ونتج عنه خطأ فى الرقم الأخير ، وفيما يلى صورة للسطرين الأول والأخير فى طبعة ١٦١٦ .

٣٠°

دقائق	الجيب	اللوغاريتم	+/− الفرق	اللوغاريتم	الجيب	
٠	٥٠٠٠٠٠	٦٩٣١٤٧	٥٤٩٣٠٦	١٤٣٨٤١	٨٦٦٠٢٥	٦٠
	(ثم يتلو ذلك ٢٩ سطراً حذفناها هنا)					
٣٠	٥٠٧٥٣٨	٦٧٨١٨٣	٥٢٩٢٥٢	١٤٨٩٣٠	٨٦١٦٢٩	٣٠

٥٩°

يمكن إيجاد لوغاريتمات دوال الزوايا من ٠° ٣٠َ إلى ٣٠َ ٣٠°

بقراءة العمود الأيمن من أعلى إلى أسفل ثم أفقياً من اليمين إلى اليسار ، فمثلا : لوجا ٣٠َ ٣٠° = ٦٧٨١٨٣ ، أما الزوايا من ٣٠َ ٥٩° إلى ٦٠َ ٥٩° (أى ٦٠°) فبقراءة العمود الأيسر من أسفل إلى أعلى ثم أفقياً من اليسار إلى اليمين ، فمثلا لو جا ٦٠° (أى ٦٠َ ٥٩°) = ١٤٣٨٤١ .

وسنرى أن هذه الجداول تعطى لوغاريتمات دوال أخرى غير الجيوب ، فإذا تذكرنا أن جيب أى زاوية حادة يساوى جيب تمام المتممة لوجدنا أن العمود الخامس لا يعطى فقط لوغاريتمات جيوب الزوايا الموجودة فى العمود السابع ، بل يعطى أيضا لوغاريتمات جيوب تمام الزوايا الموجودة فى العمود الأول ، وكذلك لا يعطى العمود الثالث لوغاريتمات جيوب الزوايا الموجودة فى العمود الأول فقط ، بل يعطى كذلك لوغاريتمات جيوب تمام الزوايا الموجودة فى العمود السابع .

أما العمود الأوسط ، عمود «الفروق» بين العددين اللذين يحتوى عليهما العمودان الثالث والخامس فهو ذو أهمية خاصة نظراً لأن (حسب مصطلحاتنا الحديثة) طا θ = $\frac{\text{جا } \theta}{\text{جتا } \theta}$ فإن : لو طا θ = لوجا θ — لوجتا θ ، وعلى ذلك فإن :

٦٩٣١٤٧ — ١٤٣٨٤١ = لوجا ٣٠° — لوجتا ٣٠° ، وتساوى لوطا ٣٠° كذلك ١٤٣٨٤١ — ٦٩٣١٤٧ تساوى لوجا ٦٠° — لوجتا ٦٠° ، وتساوى لوطا ٦٠° لكن ١٤٣٨٤١ — ٦٩٣١٤٧ مقدار سالب ، إلا أن الأرقام هنا هى نفسها أرقام لوغاريتم طا ٣٠° . هذا يفسر علامتى + و — فى الجدول .

نظراً لأن الزوايا التى يحتوى عليها العمود الأول محصورة بين ٠° ، ٤٥°

فإن قيم الظلال أقل من جيب ٩٠° ، كما أن لوغاريتمات الظلال تكون (فى النظام الذى وضعه نابيير) موجبة تدل عليها علامة + فى الجهة اليمنى من الجدول . وجميع الزوايا المحصورة بين ٤٥° ، ٩٠° تكون ظلالها أكبر من جيب ٩٠° ويتبع ذلك أن تكون لوغاريتماتها (حسب نظام نابيير) سالبة تدل عليها علامة — فى الجهة اليسرى من الجدول .

وما زالت الجداول الحديثة للوغاريتمات الدوال المثلثية للزوايا تعد بنفس الطريقة إلا أن —/+ تحل فيها محل +/— ، ولقد وجد أنه من الأسهل تغيير لوغاريتمات الدوال المثلثية للزوايا إلى أعداد موجبة ، وذلك عن طريق إضافة ١٠ إلى اللوغاريتم السالب ، فمثلا تعطى الجداول الحديثة للأساس ١٠ ما يأتى :

لو طا ٦٠° = + ٢٣٨٥٦و

لو طا ٣٠° = + ٩و٧٦١٤٤

وينبغى عند استعمال الجداول الحديثة أن يكون مفهوماً أنه قد أضيفت ١٠ للحصول على العدد + ٩و٧٦١٤٤ أى وأن اللوغاريتم الحقيقى لظل ٣٠° فى نظامنا الحاضر هو ٩و٧٦١٤٤ — ١٠ = — ٠و٢٣٨٥٦ إن أرقام هذا العدد هى نفسها أرقام لوغاريتم ظل ٦٠° ، وعلى ذلك فإن لو طا ٣٠° ، لو طا ٦٠° تدل عليهما ٢٣٨٥٦و . ونظراً لأن التعامل باللوغاريتمات الموجبة أمر سهل ، فقد أضيف الآن عمود آخر حتى لا تظهر فى الجداول إلا أعداد موجبة .

لقد ملأت الجداول التى أعدها نابيير تسعين صفحة من الكتيب الذى عرض فيه نتائج جهد عشرين عاما لحكم غيره من الرياضيين ، وقال لهم إنه

مستعد أن يشرح كيف أعد الجداول إذا هم وجدوا عمله ذا قيمة . لقد كان يعلم أنه لابد من بعض أوجه النقص وفى ذلك يقول: « لايمكن أن يكون الشيء كاملا عند مولده » وظل قلقاً ينتظر كيف يستقبل عمله ، إلا أن هذا القلق لم يدم إذ سرعان ماقوبل العمل بالتقدير الكبير ، خاصة من رياضى مشهور فى جامعة كامبردج هو إدوارد رايت Edward Wright ، وآخر أكثر شهرة هو هنرى بريجز Henry Briggs أستاذ الرياضيات فى كلية جريشام بلندن. لقد كتب رايت قبل ذلك كتباً كثيرة فى الملاحة ، لذلك أدرك للتو قيمة اللوغاريتمات فى حسابات الملاحة ، فأسرع بترجمة Descriptio إلى الإنجليزية ، وقبل أن ينشر الترجمة عرضها على نابيير ليحصل على موافقته ، ولما نشرت كانت تحتوى على الحاشية التالية كتبها نابيير بنفسه « لقد تأثر بعض المواطنين فى هذه الجزيرة بهذه الدراسة و بقيمتها للصالح العام فقام رياضى بارز منهم بترجمتها إلى لغتنا الإنجليزية الدراجة ، و بعد أن انتهى من الترجمة أرسلها إلى لأراها وأدرسها بنفسى ، ولقد قمت بهذا عن طيب خاطر فوجدتها دقيقة للغاية متفقة مع الأصل تمام الاتفاق» ولقد مات إدوارد رايت عام ١٦١٥؛ فقام أبنه صموئيل رايت Samuel Wright فى عام ١٦١٨ بنشر ترجمة والده لكتاب نابيير .

فى ١٠ من مارس عام ١٦١٥ كتب هنرى بريجز إلى صديق له يقول «إن نابيير قد شغل يدى وعقلى بلوغاريتماته ، إذا شاء الرب فإننى أرجو أن ألقاه هذا الصيف . إننى لم أر كتابا أكثر منه مدعاة للسرور وللعجب » ويضيف : « لقد اندهشت غاية الدهشة لهذا الابتداع الرائع » ، وفى صيف هذا العام قضى شهراً مع نابيير فى ميرشستون كاسل التى ورثها نابيير عن أبيه ، وفى عام ١٦٢٤ أى بعد وفاة نابيير بسبعة أعوام نشر بريجز جداول للوغاريتمات تحت عنوان Arithmetica Logarithmica وقد ذكر فى مقدمتها محادثات هامة

مستعد أن يشرح كيف أعد الجداول إذا هم وجدوا عمله ذا قيمة . لقد كان يعلم أنه لا بد من بعض أوجه النقص وفى ذلك يقول: « لا يمكن أن يكون الشيء كاملا عند مولده » وظل قلقاً ينتظر كيف يستقبل عمله ، إلا أن هذا القلق لم يدم إذ سرعان ماقوبل العمل بالتقدير الكبير ، خاصة من رياضى مشهور فى جامعة كامبردج هو إدوارد رايت Edward Wright ، وآخر أكثر شهرة هو هنرى بريجز Henry Briggs أستاذ الرياضيات فى كلية جريشام بلندن. لقد كتب رايت قبل ذلك كتباً كثيرة فى الملاحة ، لذلك أدرك للتو قيمة اللوغاريتمات فى حسابات الملاحة ، فأسرع بترجمة Descriptio إلى الإنجليزية ، وقبل أن ينشر الترجمة عرضها على نابيير ليحصل على موافقته ، ولما نشرت كانت تحتوى على الحاشية التالية كتبها نابيير بنفسه « لقد تأثر بعض المواطنين فى هذه الجزيرة بهذه الدراسة وبقيمتها للصالح العام فقام رياضى بارز منهم بترجمتها إلى لغتنا الإنجليزية الدراجة ، وبعد أن انتهى من الترجمة أرسلها إلى لأراها وأدرسها بنفسى ، ولقد قمت بهذا عن طيب خاطر فوجدتها دقيقة للغاية متفقة مع الأصل تمام الاتفاق» ولقد مات إدوارد رايت عام ١٦١٥ فقام ابنه صموئيل رايت Samuel Wright فى عام ١٦١٨ بنشر ترجمة والده لكتاب نابيير .

فى ١٠ من مارس عام ١٦١٥ كتب هنرى بريجز إلى صديق له يقول «إن نابيير قد شغل يدى وعقلى بلوغاريتماته ، إذا شاء الرب فإننى أرجو أن ألقاه هذا الصيف . إننى لم أر كتابا أكثر منه مدعاة للسرور وللعجب » ويضيف : « لقد اندهشت غاية الدهشة لهذا الابتداع الرائع » ، وفى صيف هذا العام قضى شهراً مع نابيير فى ميرشستون كاسل التى ورثها نابيير عن أبيه ، وفى عام ١٦٢٤ أى بعد وفاة نابيير بسبعة أعوام نشر بريجز جداول للوغاريتمات تحت عنوان Arithmetica Logarithmica وقد ذكر فى مقدمتها محادثات هامة

جرت بينه وابين نابيير خلال الزيارة التى أشرنا إليها ، ولقد كان لهذه الحادثات أثرها فى نشأة لوغاريتماتنا الحديثة. بعد أن وصل نابيير إلى هدفه الأصلى وجد أن إجراء بعض التعديلات فى البنيان الذى أقامه يؤدى إلى كثير من المميزات وإلى كثير من التبسيط ناظراً فى ذلك — هو وبريجز — إلى عمل السنوات العشرين كهيكل مؤقت ، وعلى الفور أخذا فى إقامة بناء جديد ، وعندما تم البناء ألقى الهيكل — الذى لولاه لما تم البناء — جانباً ولم تعد له سوى قيمة تاريخية .

لقد توقع نابيير فى الـ Descriptio تغييراً فى أفكاره ، ففيه يذكر أن اعتبار الصفر لوغاريتماً لجيب ٩٠° (أو لنصف القطر) كان أمراً اختيارياً ، وفى هذا يقول « لقد تركت لنفسى الحرية أن آخذ الصفر لوغاريتماً لأى جيب أو كمية » ويقول بريجز موضحاً إن اللوغاريتمات فى كتابه Arithmetica Logarithmica تختلف عنها فى Descriptio « عندما شرحتها (جداول نابيير الأصلية) لناشرى فى لندن ذكرت أنه يكون من الأسهل استخدام الصفر لوغاريتماً للجيب الكامل ، أما لوغاريتم عشر الجيب الكامل فيكون ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ١٠ (أى واحداً أمامه أى عدد شئت من الأصفار : ٧ للجداول ذات السبعة الأرقام ، ١٠ للجداول ذات العشرة الأرقام وهكذا ...) وفى التو كتبت للمؤلف وعندما انتهيت من موسم التدريس سافرت إلى ادنبرة وهناك — حيث استقبلنى بحفاوة بالغة — بقيت شهراً كاملا ، وعندما تحدثنا فى التغيير الذى اقترحت إدخاله على اللوغاريتمات قال إن نفس الفكرة راودته منذ زمن وأنه يعتزم تنفيذها ، وأنه نشر ما لديه إلى حين أن تمكنه شئونه وصحته من إعداد غيرها ، إلا أنه كان يعتقد أن التغيير ينبغى أن يتم بحيث يكون الصفر لوغاريتماً للوحدة ، ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ١٠ لوغاريتماً للجيب الكامل وهو ما اعترف أنه أكثر سهولة فى الاستعمال ، لذلك أهملت

الجداول التى كنت قد أعددتها وبدأت بتعضيده فى التفكير فى حساب هذه اللوغاريتمات». وفى الجداول التى نشرها بريجز فى Arithmetica Logarithmica بعد سبع سنوات من موت نابيير اعتبر الصفر لوغاريتما للواحد الصحيح ، وثبت لوغاريتم ١٠ (وليس للجيب الكامل) أساساً للنظام واختار ١ (متبوعاً بأربعة عشر صفراً) لوغاريتما للعدد ١٠ ، ولقد أضيفت جميع هذه الأصفار حتى يمكن التعبير عن اللوغاريتمات ، فى دقة كبيرة بأعداد صحيحة . لقد كانت هذه التغييرات من اقتراح نابيير فى ملحق له Constructio عنوانه « فى إنشاء نوع أحسن من اللوغاريتمات يكون فيه لوغاريتم الوحدة صفرا » . ويستمر نابيير قائلا : « إن أهم تحسين فى اللوغاريتمات هو ذاك الذى يؤخذ لوغاريتم الوحدة فيه صفرا ، أما لوغاريتم عشر الوحدة أو عشرة أمثالها فيؤخذ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ١٠ » .

بهذه الصورة نشأ نظام للوغاريتمات أساسها ١٠ ، وهى ما نعرفه اليوم باللوغاريتمات المعتادة ، للتفرقة بينهما وبين لوغاريتمات نابيير أو بينها وبين اللوغاريتمات الطبيعية التى تختلف عن لوغاريتمات نابيير وأن اشتركت معها فى الاسم .

وفى عام ١٦١٧ نشر بريجز كتيبا يحتوى على لوغاريتمات الأعداد الألف الأولى للأساس ١٠ ، وفى عام ١٦٢٠ نشر أدموند جنتر Edmund Gunter أستاذ الفلك فى كلية جريشام بلندن ، أول جدول للوغاريتمات الجيوب للأساس ١٠ ، وفى عام ١٦٢٤ ظهر Arithmetica Logarithmica لبريجز يعطى جداول لوغاريتمات الأعداد من ١ إلى ٠٠٠ ٢٠ ومن ٠٠٠ ٩٠ إلى ٠٠٠ ١٠٠ ، وبعد أربع سنوات نشر رياضى هولندى اسمه أدريان فلاك Adrian Vlacq فى جودا بهولنده جدولا أتم فيه الفجوة التى تركها بريجز بين ٠٠٠ ٢٠ ، ٠٠٠ ٩٠ ،

الجداول التى كنت قد أعددتها وبدأت بتعضيده فى التفكير فى حساب هذه اللوغاريتمات». وفى الجداول التى نشرها بريجز فى Arithmetica Logarithmica بعد سبع سنوات من موت نابيير اعتبر الصفر لوغاريتما للواحد الصحيح ، وثبت لوغاريتم ١٠ (وليس للجيب الكامل) أساساً للنظام واختار ١ (متبوعاً بأربعة عشر صفراً) لوغاريتما للعدد ١٠ ، ولقد أضيفت جميع هذه الأصفار حتى يمكن التعبير عن اللوغاريتمات ، فى دقة كبيرة بأعداد صحيحة . لقد كانت هـــذه التغييرات من اقتراح نابيير فى ملحق له Constructio عنوانه « فى إنشاء نوع أحسن من اللوغاريتمات يكون فيه لوغاريتم الوحدة صفرا » . ويستمر نابيير قائلا : « إن أهم تحسين فى اللوغاريتمات هو ذاك الذى يؤخذ لوغاريتم الوحدة فيه صفرا ، أما لوغاريتم عشر الوحـــدة أو عشرة أمثالها فيؤخـــذ ١٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ » .

بهذه الصورة نشأ نظام للوغاريتمات أساسها ١٠ ، وهى ما نعرفه اليوم باللوغاريتمات المعتادة ، للتفرقة بينهما وبين لوغاريتمات نابيير أو بينها وبين اللوغاريتمات الطبيعية التى تختلف عن لوغاريتمات نابيير وأن اشتركت معها فى الاسم .

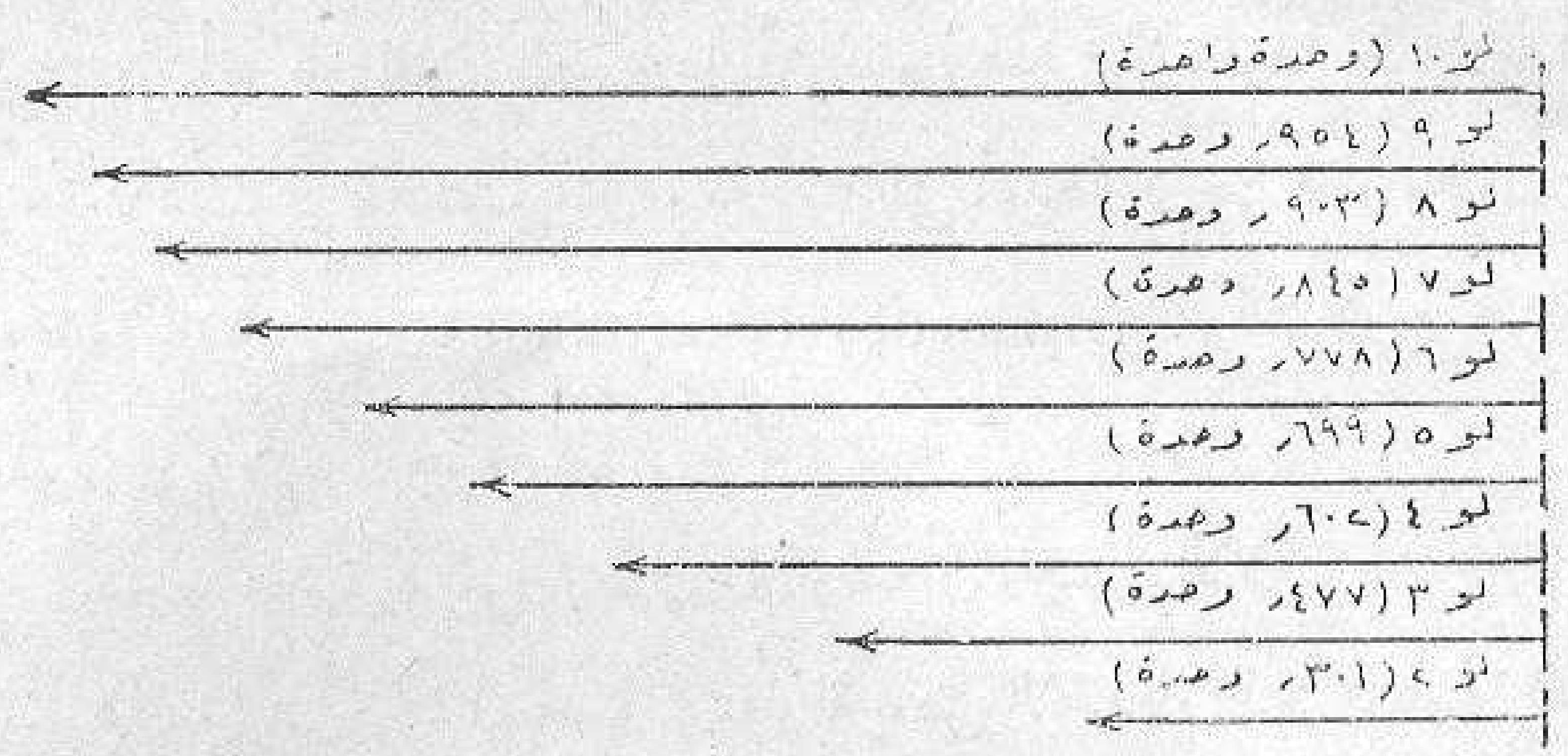
وفى عام ١٦١٧ نشر بريجز كتيبا يحتوى على لوغاريتمات الأعداد الألف الأولى للأساس ١٠ ، وفى عام ١٦٢٠ نشر أدموند جنتر Edmund Gunter أستاذ الفلك فى كلية جريشام بلندن ، أول جدول للوغاريتمات الجيوب للأساس ١٠ ، وفى عام ١٦٢٤ ظهر Arithmetica Logarithmica لبريجز يعطى جداول لوغاريتمات الأعداد من ١ إلى ٢٠ ٠٠٠ ومن ٩٠ ٠٠٠ إلى ١٠٠ ٠٠٠ ، وبعد أربع سنوات نشر رياضى هولندى اسمه أدريان فلاك Adrian Vlacq فى جودا بهولنده جدولا أتم فيه الفجوة التى تركها بريجز بين ٢٠ ٠٠٠ ، ٩٠ ٠٠٠ ،

وبالرغم من أنه كان لفلاك القدرة على أن يسمى هذا عملا جديداً نظراً لأنه أعد ٧٠٠٠٠ لوغاريتم واستعمل ال ٣٠٠٠٠ التى أعدها بريجز فقد وصف عمله بأنه طبعة ثانية من ال Arithmetica Logarithmica . ولقد كان بريجز نفسه مشغولا بملء هذه الفجوة .

كتب لصديق له يقول . « إن لى رغبة أن أحسب الآلاف بين ٢٠ و ٩٠ وأنشرها ، ولقد أجريتها وحدى وبمعاونة بعض الأصدقاء الذين قاسمونى العمل بعد أن اتفقنا على القواعد تماما ، إلا أن هولنديا اسمه أدريان فلاك أزاح عنى المسئولية بأن أجرى مائة الألف كلها ونشرها باللاتينية والهولندية والفرنسية . لقد طبعت ١٠٠٠ نسخة باللغات الثلاث وبيع أغلبها » وحتى ستين سنة مضت كانت المئات من جداول اللوغاريتمات التى نشرت تقوم على نفس الأساس الذى قام عليه عمل بريجز وفلاك فى السنوات الثلاث عشر بين ١٦١٥ و ١٦٢٨ .

وبالإضافة إلى جداول الأعداد من ١ إلى ١٠٠٠٠٠ وضع فلاك جداول اللوغاريتمات للجيوب وجيوب التمام ، والظلال وظلال التمام ، والقواطع وقواطع التمام ، محسوبة إلى عشرة أرقام ، وعلى أساس قيم هذه الدوال المثلثية التى احتوت عليها الجداول التى أعدها ريتيكوس .

لقد أشرنا إلى الجداول التى وضعها إدموند جنتر ، كذلك كان هو الذى قدم الفكرة التى أدت إلى المسطرة الحاسبة . رسم عدداً من الخطوط المستقيمة تتناسب أطوالها مع لوغاريتمات الأعداد المختلفة ، وعن طريق قياس الأطوال المختلفة بفرجار استطاع إجراء عمليات الضرب والقسمة . فى شكل ٦٢ تسعة مستقيمات ، يمثل الخط الأعلى فيها وحدة واحدة . كذلك يمكن اعتباره ممثلا للوغاريتم ١٠ ، وعلى ذلك يمكن اعتباره مقياسا تمثل به اللوغاريتمات الأخرى :

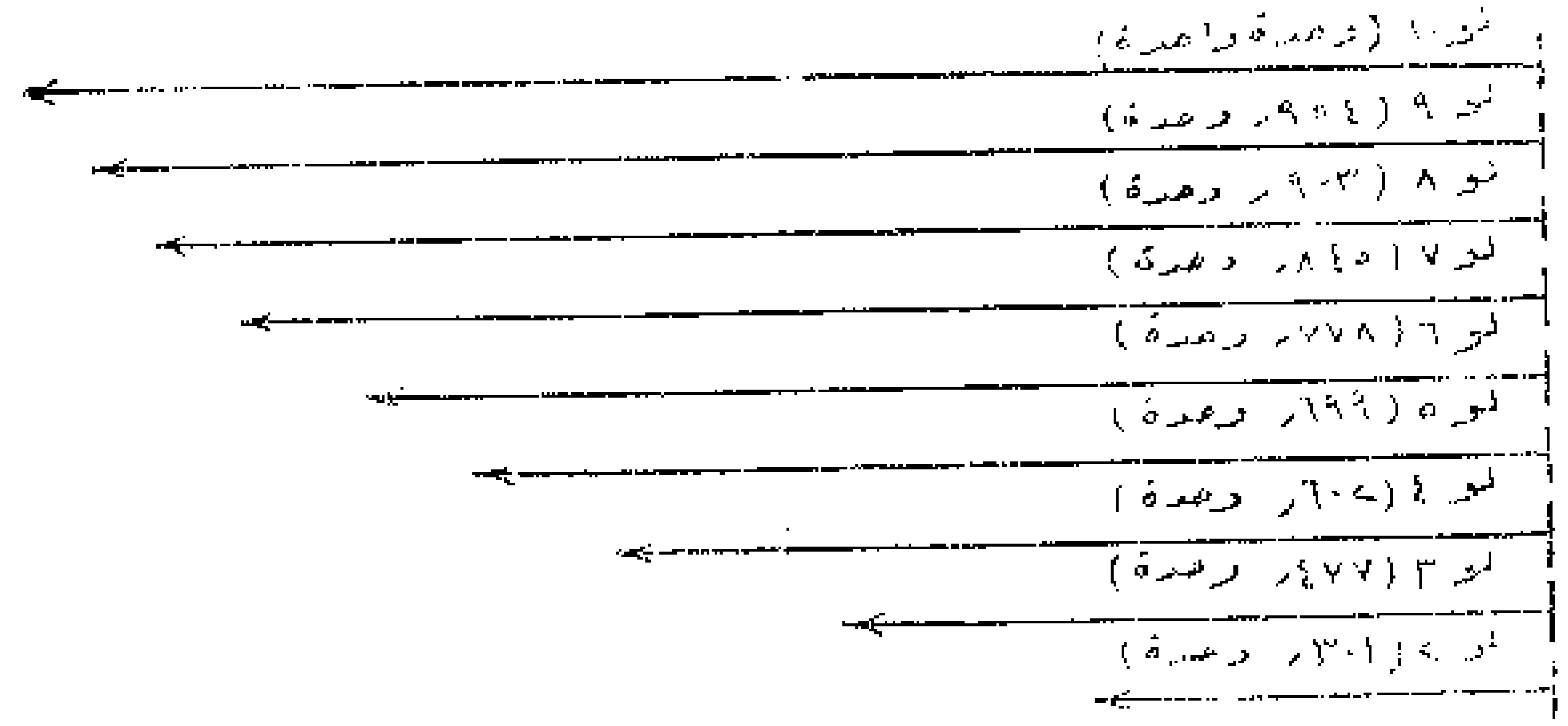


شكل (٦٢)

من جداول اللوغاريتمات نعلم أن لو ٩ = ٩٥٤ر ، فإذا جعل طول المستقيم التالى ٩٥٤ر وحدة فإنه يمثل لو ٩ ، كذلك تمثل المستقيمات الأخرى لو ٨ ، لو ٧ ، لو ٦ ، لو ٥ ، لو ٤ ، لو ٣ ، لو ٢ ، أما لو ١ فهو الصفر ، أى لا يمثله طول ما .

لضرب ٤ فى ٢ ضع الطولين اللذين يمثلان لوغاريتمى العددين بحيث يبدأ أحدهما عند نهاية الآخر . الطول الناتج هو ٩٠٣ر الذى يمثل لو ٨ ، وعن طريق رسم عدد أكبر من المستقيمات تتسع إمكانية الضرب بهذه الطريقة اتساعا لا حد له .

فى ١٦٣٦ وضع رياضى معروف هو وليام أوترد Reverend William Oughtred (يقال إنه توفى فى نوبة فرح انتابته عند سماعه أن مجلس العموم وافق على إنهاء تحكم البيوريتانيين وعودة الملك تشارلس الثانى) مسطرتين من مساطر جنتر إحداهما بجوار الأخرى بحيث يمكن أن تنزلق إحداهما على الأخرى . هذا هو الأساس الذى أنبنت عليه المسطرة الحاسبة الحديثة التى تعتبر دينا آخر فى أعناقنا لنابيير .



شكل (٦٢)

من جداول اللوغاريتمات نعلم أن لو ٩ = ٩٥٤و ، فإذا جعل طول المستقيم التالى ٩٥٤و وحدة فإنه يمثل لو ٩ ، كذلك تمثل المستقيمات الأخرى لو ٨ ، لو ٧ ، لو ٦ ، لو ٥ ، لو ٤ ، لو ٣ ، لو ٢ ، أما لو ١ فهو الصفر ، أى لايمثله طول ما .

لضرب ٤ فى ٢ ضع الطولين اللذين يمثلان لوغاريتمى العددين بحيث يبدأ أحدهما عند نهاية الآخر . الطول الناتج هو ٩٠٣و الذى يمثل لو ٨ ، وعن طريق رسم عدد أكبر من المستقيمات تتسع إمكانية الضرب بهذه الطريقة اتساعا لاحد له .

فى ١٦٣٦ وضع رياضى معروف هو وليام أوترد Reverend William Oughtred (يقال إنه توفى فى نوبة فرح انتابته عند سماعه أن مجلس العموم وافق على إنهاء تحكم البيوريتانيين وعودة الملك تشارلس الثانى)مسطرتين من مساطر جنتر إحداهما بجوار الأخرى بحيث يمكن أن تنزلق إحداهما على الأخرى . هذا هو الأساس الذى أنبنت عليه المسطرة الحاسبة الحديثة التى تعتبر دينا آخر فى أعناقنا لنابيير .

فى نفس الوقت الذى كان فيه نابيير يعمل فى ابتداعه ، كان صانع ساعات سويسرى اسمه جوبست برجى Jobst Bürgi يعمل فى موضوع مشابه إنما من وجهة نظر مختلفة تماما ، بينما كان تعليل نابيير هندسيا كان تعليل برجى جبريا فقد كان أساسه المتواليات الهندسية .

و كما أشرنا من قبل كان أرشميدس مهتما بالمتوالية الهندسية :

١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ٦٤ ، ....

وظلت هذه المتسلسلة قرونا طويلة أساساً لعدد لا حصر له من المسائل المشهورة تدهش أجوبتها غالبيتنا الآن ، فهناك مثلا قصة الملك الشرقى (لايدرى أحد أكان هنديا أم فارسيا أم عربيا) الذى وعد أن يمنح مخترع لعبة الشطرنج أى جائزة يريدها ، فأخذ المخترع رقعة الشطرنج وأشار إلى مربعاتها الأربعة والستين ، وأبدى رغبة متواضعة هى أن توضع حبة قمح فى المربع الأول ، وحبتين فى المربع الثانى ، وأربع حبات فى المربع الثالث ، وهكذا يستطيع القارىء أن يأخذ ورقة وقلما ليتحقق من أن الأمر اقتضى ٤٥٧ ٧٦٢ ١٣١ سفينة تحمل كل منها ١٠ ٠٠٠ طن من القمح (مع حساب أن الرطل يزن ٧٠٠٠ حبة قمح) وبقيت بعد ذلك ٦١٥ ٥٥١ ٧٠٩ ٩٣ حبة قمح .

ومسألة أخرى هى تلك المتصلة بحداد يتقاضى بنسا واحداً عن أول مسار يدقه فى حدوة الحصان ، وبنسين عن الثانى ، وأربعة بنسات عن الثالث ... وهكذا حتى المسمار الرابع والعشرين ، وصورة حديثة للقصة ، هى قصة طالب العمل الذى طلب سنتا واحداً عن اليوم الأول ، وسنتين عن اليوم الثانى ، وأربعة سنتات عن اليوم الثالث ، وهكذا ... مبديا رضاه أن يبدأ من جديد فى أول كل شهر ، إلا أن أرشميدس ومن تبعه من الرياضيين لم يكن يعجبهم هذا

النوع من المسائل ، بل كان اهتمامهم موجها إلى اكتشاف العلاقة بينها وبين المتوالية الحسابية ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ...

هذه مسألة أدى حلها إلى قوانين الأسس التى أدت بدورها إلى تبسيط كبير للأفكار الجبرية وإلى امتدادها . لقد تحقق فى أوائل القرن السادس عشر أن جمع أى حدين فى المتوالية الحسابية له صلة بحاصل ضرب الحدين المناظرين لهما (فى الرتبة) فى المتوالية الهندسية . وفى أيامنا هذه لا نكاد نكتب المتسلسلة :

$$٢^{٠} ، ٢^{١} ، ٢^{٢} ، ٢^{٣} ، ٢^{٤} ، ٢^{٥} ، ...$$

حتى ندرك العلاقة بينها ، لكن فى عام ١٦٠٠ لم يكن التعبير الرمزى قد ابتدع . لقد كانت الفكرة فى هذه العلاقة هى التى مكنت جوبست برجى من إعداد جدول للأعداد المقابلة للوغاريتمات (للأساس ١٫٠٠٠١) . ونظراً لأن الأساس فى اللوغاريتمات الحديثة هو ١٠ ، وأن $١٠^{٢} = ١٠٠$ فإنه يقال إن ٢ هى لوغاريتم ١٠٠ للأساس ١٠ كما يقال إن ١٠٠ هى العدد المقابل للوغاريتم ٢ للأساس ١٠ . وفى جداول برجى كانت اللوغاريتمات مطبوعة باللون الأحمر والأعداد المقابلة للوغاريتمات باللون الأسود . ولقد نشرت هذه الجداول فى عام ١٦٢٠ ، ولكن قبيل ذلك كانت الجداول الأكثر بساطة ذات الأساس ١٠ التى نشرها نابيير وبريجز قد استقرت وقبلها الرياضيون فى كل مكان . واليوم وإن تكن هناك جداول للأعداد المقابلة أساسها ١٠ فإنها ليست لازمة ، إذ يمكن بسهولة إيجاد العدد الذى يناظر لوغاريتما معينا .[١]

إن ابتداع اللوغاريتمات يعتبر نهاية لعصر النهضة فى تطور الرياضيات ، ومن هذه النقطة ندخل إلى عصر الرياضيات الحديثة .

---

(١) لا يستخدم الأمريكيون جداول للأعداد المقابلة ، بل يستخدمون جداول اللوغاريتمات لإيجاد الأعداد المقابلة بالطريقة التى نوجد نحن بها الزاوية إذا علم جيبها أو جيب تمامها . (المترجم)

النوع من المسائل ، بل كان اهتمامهم موجها إلى اكتشاف العلاقة بينها وبين المتوالية الحسابية ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ...

هذه مسألة أدى حلها إلى قوانين الأسس التى أدت بدورها إلى تبسيط كبير للأفكار الجبرية وإلى امتدادها . لقد تحقق فى أوائل القرن السادس عشر أن جمع أى حدين فى المتوالية الحسابية له صلة بحاصل ضرب الحدين المناظرين لهما (فى الرتبة) فى المتوالية الهندسية وفى أيامنا هذه لا نكاد نكتب المتسلسلة :

$$٢^{٠} ، ٢^{١} ، ٢^{٢} ، ٢^{٣} ، ٢^{٤} ، ٢^{٥} ، ...$$

حتى ندرك العلاقة بينها ، لكن فى عام ١٦٠٠ لم يكن التعبير الرمزى قد ابتدع . لقد كانت الفكرة فى هذه العلاقة هى التى مكنت جوبست برجى من إعداد جدول للأعداد المقابلة للوغاريتمات (للأساس ١٫٠٠٠١) . ونظراً لأن الأساس فى اللوغاريتمات الحديثة هو ١٠ ، وأن $١٠^{٢} = ١٠٠$ فإنه يقال إن ٢ هى لوغاريتم ١٠٠ للأساس ١٠ كما يقال إن ١٠٠ هى العدد المقابل للوغاريتم ٢ للأساس ١٠ . وفى جداول برجى كانت اللوغاريتمات مطبوعة باللون الأحمر والأعداد المقابلة للوغاريتمات باللون الأسود . ولقد نشرت هذه الجداول فى عام ١٦٢٠ ، ولكن قبيل ذلك كانت الجداول الأكثر بساطة ذات الأساس ١٠ التى نشرها نابيير وبريجز قد استقرت وقبلها الرياضيون فى كل مكان . واليوم وإن تكن هناك جداول للأعداد المقابلة أساسها ١٠ فإنها ليست لازمة ، إذ يمكن بسهولة إيجاد العدد الذى يناظر لوغاريتما معينا .(١)

إن ابتداع اللوغاريتمات يعتبر نهاية لعصر النهضة فى تطور الرياضيات ، ومن هذه النقطة ندخل إلى عصر الرياضيات الحديثة .

(١) لا يستخدم الأمريكيون جداول الأعداد المقابلة ، بل يستخدمون جداول اللوغاريتمات لإيجاد الأعداد المقابلة بالطريقة التى نوجد نحن بها الزاوية إذا علم جيبها أو جيب تمامها . (المترجم)

الفصل السادس

التمهيد لمجيء نيوتن وليبنتز

كان نابيير في الرابعة عشرة من عمره حين ولد جاليليو جاليلي Galileo Galilei، الذي أصبح فيما بعد أبا الديناميــــكا — وهي فرع من الرياضيات يتعلق بتأثير القوة في إحداث الحركة — في بيزا من مدن إيطاليا والشهيرة ببرجها المائل .

وكانت آراء أرسطو إذ ذاك تهيمن على جميع فروع العلوم رغم أخطائها وعــدم دقتها ، كما هيمنت لمـــدة ألفي عام دون منافس ، ولم يثر عليها سوى أرستارخوس الذي سبق أن تحدثنا عنه في الباب الرابع ، ولكن ثورته العلمية سرعان ما خمدت وطويت في مخطوطات أرشميدس الباهتة، وظلت مجهولة بعيدة عن علماء أوروبا طوال القرون الوسطى .

ولد جاليليو لنبيل فقير من فلورنسا وكان أبوه مولعا بالرياضيات والموسيقى، وما إن بلغ الصبي السابعة عشرة حتى أرسل إلى جامعة بيزا ليدرس الطب .

وبينما هو في الكاتدرائية يستمع إلى الصلاة إذ لفت نظره مصباح ضخم من البرونز فوجد نفسه يبتعد عن التفكير في الروحانيات ويراقب ذبذبة المصباح مستعينا بنبضات قلبه لضبط الوقت ، ودهش لما وجد أن زمن الذبذبة الصغير هو نفس الزمن اللازم لذبذبة كبيرة (وقد أثبت هويجنز Huygens العالم

الهولندى فى عام ١٦٥٦ أن الزمن اللازم لحدوث ذبذبة واحـــدة من ذبذبات «البندول» هو $٢ط\sqrt{\frac{ل}{ح}}$ حيث ل هو طول « البنــــدول » بالأقدام ، ح عجلة الجاذبية الأرضية وتقـــدر بحوالى ٣٢ قدما /ثانية/ ثانية أى إن «البندول» الذى طوله قدمان يستغرق ١و٥٧ ثانية ليكمل ذبذبة كاملة) .

وأيقظ هذا المشكل اهتمام جاليليو بالعلوم وزاد اهتمامه بها استماعه مصادفة إلى محاضرة فى الرياضيات كانت أول معرفته بهذه المادة ، فشغف بها إلى الحد الذى شغله عن دراسة الطب ، فما إن غادر الجامعة فى سن الواحدة والعشرين حتى بدأ بحوثه فى الديناميكا .

وعين أستاذاً للرياضيات فى جامعة بيزا وهو فى الخامسة والعشرين وهناك أجرى تجاربه المشهورة على الأجسام الساقطة مستخدما فى ذلك برج بيزا المائل. وأمام جمع حافل من الطلاب والأساتذة والقسس ألقى جاليليو قطعتين من المعدن ، وزن إحداهما عشرة أمثال وزن الأخرى ، من قمة البرج فوصلتا فى نفس الوقت تقريباً ، إلا أن هذا لم يزعزع عقيدة الأساتذة فى آراء أرسطو الذى ادعى أن الجسم الثقيل ينزل بسرعة أكبر من سرعة الجسم الخفيف ، وتهور الأستاذ الشاب فأعلن أن أرسطو كان مخطئا فى آرائه ، فحنق عليه أصحاب النفوذ فى بيزا واستقبحوا هجومه الوقح على آراء يقدسونها ، وظلوا يهاجمونه حتى شعر بأن حياته أصبحت عبئا ثقيلا واضطر أخيراً الى الاستقالة من منصبه .

ومع كل فقد استطاع أن يصبح أستاذاً للرياضيات فى بادوا حيث سمع

الكثير ولا شك عن كاردان وكوبرنيكوس اللذين عملا هناك فى نفس القسم ، وكانت بادوا إحدى مدن جمهورية البندقية حيث يشجع التفكير الحر، وبذا استطاع جاليليو أن يستمر فى إجراء تجاربه وفى التدريس فى جو ملؤه الصداقة والإخاء ونجح هناك بدرجة جعلت العلماء من جميع أنحاء أوروبا — وبعضهم من الأمراء — يفدون إليه يستمعون لمحاضراته فأعطاه أولو الأمر صالة للمحاضرات تسع ألفين ، وبقى فى بادوا ثمانية عشر عاماً ونالت محاضراته وبحوثه العلمية تقديراً كبيراً بدرجة جعلت مرتبه يرتفع من ١٨٠ فلورين عام ١٥٩٣ إلى ١٠٠٠ فلورين عام ١٦١٠ .

كان أرشميدس قد بنى علم « الوزن » أى الاتزان ، وكان على جاليليو أن يضع أساس علم الحركة ، ولولا بحوثه فى هـــذا الميدان لتعذر على نيوتن نفسه حل مشكلة حركة الكواكب .

افترض جاليليو أولا أنه إذا سقط جسم من السكون حراً نحو الأرض فإن سرعته تزداد بمقادير متساوية فى أزمنة متساوية (أى إنه يتحرك بعجلة منتظمة كما هو تعبيرنا اليوم) واستنتج من ذلك القانون الهام الآتى : « المسافة المقطوعة تتناسب مع مربع الزمن اللازم لها » .

ولقد ألفنا فكرة « العجلة » أو زيادة السرعة فى وحدة الزمن من حركة السيارة . وعليه فمن الواضح أنه إذا كانت حـ (قدما / ثانية / ثانية) تمثل العجلة المنتظمة لجسم يسقط من السكون وكانت ع (قدما / ثانية) هى سرعته النهائية بعد ن (ثانية) فإن ع لا بد وأن تساوى حـ ن .

ولنفرض الآن جسما آخر يسقط لمدة ن ثانية ويكتسب سرعة نهائية قدرها

الكثير ولا شك عن كاردان وكوبرنيكوس اللذين عملا هناك فى نفس القسم ، وكانت بادوا إحدى مدن جمهورية البندقية حيث يشجع التفكير الحر ، وبذا استطاع جاليليو أن يستمر فى إجراء تجاربه وفى التدريس فى جو ملؤه الصداقة والإخاء ونجح هناك بدرجة جعلت العلماء من جميع أنحاء أوروبا — وبعضهم من الأمراء — يفدون إليه يستمعون لمحاضراته فأعطاه أولو الأمر صالة للمحاضرات تسع ألفين ، وبقى فى بادوا ثمانية عشر عاماً ونالت محاضراته وبحوثه العلمية تقديراً كبيراً بدرجة جعلت مرتبه يرتفع من ١٨٠ فلورين عام ١٥٩٣ إلى ١٠٠٠ فلورين عام ١٦١٠ .

كان أرشميدس قد بنى علم « الوزن » أى الاتزان ، وكان على جاليليو أن يضع أساس علم الحركة ، ولولا بحوثه فى هـــذا الميدان لتعذر على نيوتن نفسه حل مشكلة حركة الكواكب .

افترض جاليليو أولا أنه إذا سقط جسم من السكون حراً نحو الأرض فإن سرعته تزداد بمقادير متساوية فى أزمنة متساوية (أى إنه يتحرك بعجلة منتظمة كما هو تعبيرنا اليوم) واستنتج من ذلك القانون الهام الآتى : « المسافة المقطوعة تتناسب مع مربع الزمن اللازم لها » .

ولقد ألفنا فكرة « العجلة » أو زيادة السرعة فى وحدة الزمن من حركة السيارة . وعليه فمن الواضح أنه إذا كانت حـ (قدما / ثانية / ثانية) تمثل العجلة المنتظمة لجسم يسقط من السكون وكانت ع (قدما / ثانية) هى سرعته النهائية بعد ن (ثانية) فإن ع لا بد وأن تساوى حـ ن .

ولنفرض الآن جسما آخر يسقط لمدة ن، ثانية ويكتسب سرعة نهائية قدرها

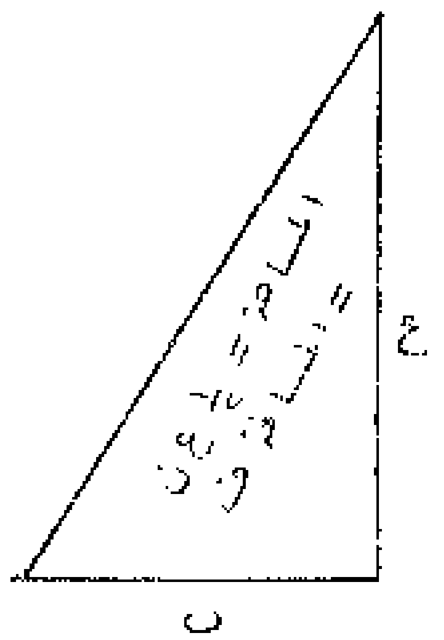
$ع_1$ قدماً / ثانية . حيث إن عجلته تكون هى نفس عجلة الجسم الأول فإن :

$ع_1 = ح\,ن_1$ وبمقارنة هاتين النتيجتين نرى أن ح تساوى كلا من $\frac{ع}{ن}$ ، $\frac{ع_1}{ن_1}$

أى إن $\frac{ع}{ن} = \frac{ع_1}{ن_1}$ أو $\frac{ع}{ع_1} = \frac{ن}{ن_1}$

لنفرض الآن أن ع ، ن لهما نفس المعانى السابقة وأن ف (قدما) تمثل المسافة التى يقطعها الجسم الساقط حرا دون قيد . فالسرعة تزداد باستمرار من صفر إلى ع ، وعليه حيث إن العجلة أو الزيادة فى السرعة تكون منتظمة طوال فترة السقوط فإن متوسط السرعة يكون $\frac{صفر + ع}{٢}$ أو ½ ع وحيث أن الزمن هو ن ثانية فإن المسافة المقطوعة تساوى ½ ع ن . وعليه فإن :
ف = ½ ع ن .

ويمكن أن نمثل هذه النتيجة (كما مثلها جاليليو) بمساحة مثلث قائم الزاوية فيه الضلعان القصيران يمثلان ع ، ن من الوحدات ، (حيث إن مساحة المثلث = ½ القاعدة × الارتفاع) كما هو موضح فى شكل ٦٣ .



شكل (٦٣)

قارن بين المسافتين ف ، $ف_1$ اللتين قطعهما الجسمان الساقطان من السكون . لنفرض أن أحد الجسمين يسقط لمدة ن ثانية مكتسباً سرعة نهائية قدرها ع قدماً / ثانية وأن الجسم التالى يستغرق $ن_1$ ثانية فى السقوط وتصبح سرعته النهائية $ع_1$ قدما / ثانية . هاتان المسافتان تمثلان بمساحتى مثلثين كما فى شكل ٦٤ .

هي عليه ، فأخبر سيده بذلك فوضع الرجل عدستين في أنبوبة وعرضها كلعبة في نافذة المحل ورآها موظف حكومي فاشتراها وأهداها إلى الأمير موريس ناسو Maurice of Nassau حاكم هولندا الذي رأى في « اللعبة » أداة للتجسس في الحروب ، ووصل خبر هذا الاكتشاف إلى جاليليو سنة ١٦٠٩ وسرعان ما عمل هو عدسة تجسس تفوق الأخرى بكثير ، واستدعى إلى مدينة البندقية ليشرح آلته ، وتسابق شيوخ البندقية — على الرغم من تقدمهم في السن — قمة أعلى كنيسة هناك ، واستطاعوا أن يروا قلاع سفينة تتقدم منهم قبل أن تمكن رؤيتها بالعين المجردة بساعتين . ورأى دوق البندقية فائدة مثل هذه الآلة في العمليات البحرية والحربية وسر كل السرور عندما قدمها له جاليليو كهدية ، وبهذه المناسبة ارتفع مرتبه إلى ١٠٠٠ فلورين في السنة .

عمل جاليليو بعد ذلك أربعة منظارات أخرى كان كل منها أقوى من سابقه. أما الخامس فكان يكبر الجسم ثلاثين مرة عن رؤيته بالعين ، بواسطته لاحظ جاليليو يوم ٧ من يناير عام ١٦١٠ أن هناك نجمين صغيرين يقعان شرق الكوكب جوبيتر ، ونجما واحدا يقع غربه . وفي الليلة التالية ما كان أعظم دهشته حين رأى النجوم الثلاثة تقع غرب جوبيتر ، وبعد ثلاث ليال وجد نجما صغيرا جديداً يدور حول جوبيتر ، وكان هذا تحقيقاً مدهشا لنظرية كوبرنيكوس القائلة بأن النجوم هي التي تدور حول الشمس . ومرة أخرى لقي معارضة جنونية من رجال الدين الذين كانوا يفضلون تعاليم أرسطو الذي عتبر الأرض — وبالتبعية الإنسان — مركزا للكون ، وذهب أحدهم إلى حد القول بأن جاليليو وضع هذه النجوم الجديدة الأربعة داخل منظاره ! ولم يثن ذلك دوق توسكانيا الأعظم عن إبداء اغتباطه الشديد حين سمى جاليليو هذه

عددية بين أبعاد الكواكب عن الشمس وعدد دوراتها حول الشمس ، أن يجد فجأة أن النسبة بين القوة الثانية للزمن والقوة الثالثة للمسافة واحدة لا تتغير ، وإذا استخدمنا الأعداد الحديثة وطريقتنا المعروفة لحساب البعد عن الشمس بالوحدات الفلكية (الوحدة الفلكية هى متوسط البعد بين الأرض والشمس) لوجدنا النتائج التالية .

	الزمن بالسنوات ن	المسافة ف		ن٢	ف٣
عطارد	و٢٤	و٣٨٧	وحدة فلك	و٠٥٨	و٠٥٨
الزهرة	و٦١	و٧٢٣	«	و٣٧٨	و٣٧٨
الأرض	١و٠٠	١و٠٠٠	«	١و٠٠٠	١و٠٠٠
المريخ	١و٩٨	١و٥٢٤	«	٣و٥٤	٣و٥٤
جوبيتر	١١و٨٦	٥و٢٠٢	«	١٤٠و٧	١٤٠و٨
زحل	٢٩و٤٦	٩و٥٣٩	«	٨٦٧و٩	٨٦٨و٠

وعلى الرغم من أن معظم عمل كبلر كان منصباً على دراسة الفلك الرياضى فإنه أسهم بقسط هام من الرياضيات البحتة ، وكان من المسئولين عن إدخال اللوغاريتمات فى ألمانيا فى حين كان أول رياضى فى القرن السابع عشر يستخدم الطرق التى تشتمل على فكرة « مالانهاية » ، وكانت الفكرة قد استبعدت منذ عهد زينو Zeno ، وفى عام ١٦١٣ كان محصول النبيذ ممتازاً مما أدى بكبلر إلى النظر فى أفضل الطرق لقياس محتويات زجاجة نبيذ ، واستقر على طريقة

النجوم الأربعة « نجوم مدسيس » ، نسبة إلى أسرة العاهل حاكم توسكانيا ، وعرض عليه أن يصبح « فيلسوف ورياضى » الدوق الرسمى ، وكان هذا لقب شرف يتبعه مرتب ضخم ، وقبل جاليليو هذا اللقب بعد قليل (وكان يشمل لقب الرياضى الأول بجامعة بيزا دون أعباء تقع على حامله) ، وقد أخطأ جاليليو كل الخطأ فى ترك جو البندقية الملىء بالحرية والذى ينكر على البابا سلطته ليعود إلى توسكانيا ، وكان يجب أن يعلم أن آراءه المتطرفة سوف تجر عليه الوبال وتجلب عليه أشد المعارضة وأمرها . وفى فلورنسا مستعينا بمنظاره قام باكتشافات جديدة كان من شأنها دعم صحة النظام الكوبرنيكى ، كما اكتشف وجود بقع شمسية ، وسبب هذا استياء شديداً بين أتباع أرسطو الذين كانوا يؤمنون بأن الشمس خالية تماما من البقع والشوائب ، وعلى الرغم من الثورة العارمة التى قام بها بعض الجهلة من رجال الدين إلا أن بعض رجال الدين مثل البابا والكردينال بربرينى الذى أصبح بابا روما فيما بعد لم يعترضا على آرائه بل أمَّن الكردينال بربرينى فعلا على صحة اكتشافه بالنظر إلى النجوم خلال المنظار .. ولكن قوى الرجعية كسبت المعركة فوضع كتاب كوبرنيكوس فى قائمة الكتب المحرمة (حيث ظلت مدفونة لمدة مائتى عام) ونصح جاليليو بالتخلى عن النظام الذى أوجده كوبرنيكوس ، ولكن جاليليو على الرغم من كل هذا نشر فى عام ١٦٣٠ كتابا يؤيد فيه بطريق غير مباشر هذا النظام ، وكان صديقه بربرينى قد اعتلى الكرسى البابوى تحت اسم يوريان الثامن وبدأ يستمع إلى الرجعيين الذين أوعزوا إليه بأن « الأبله » فى كتاب جاليليو إنما يمثله هو باعتباره مناصرا لنظام بطليموس الذى يقوم على آراء أرسطو ، وحرم بيع الكتاب وعينت لجنة للتحقيق فجاء تقريرها عن

النجوم الأربعة « نجوم مدسيس » ، نسبة إلى أسرة العاهل حاكم توسكانيا ، وعرض عليه أن يصبح « فيلسوف ورياضي » الدوق الرسمي ، وكان هذا لقب شرف يتبعه مرتب ضخم ، وقبل جاليليو هذا اللقب بعد قليل (وكان يشمل لقب الرياضي الأول بجامعة بيزا دون أعباء تقع على حامله) ، وقد أخطأ جاليليو كل الخطأ فى ترك جو البندقية المليء بالحرية والذى ينكر على البابا سلطته ليعود إلى توسكانيا ، وكان يجب أن يعلم أن آراءه المتطرفة سوف تجر عليه الوبال وتجلب عليه أشد المعارضة وأمرها . وفى فلورنسا مستعينا بمنظاره قام باكتشافات جديدة كان من شأنها دعم صحة النظام الكوبرنيكى ، كما اكتشف وجود بقع شمسية ، وسبب هذا استياء شديداً بين أتباع أرسطو الذين كانوا يؤمنون بأن الشمس خالية تماما من البقع والشوائب ، وعلى الرغم من الثورة العارمة التى قام بها بعض الجهلة من رجال الدين إلا أن بعض رجال الدين مثل البابا والكردينال بربرينى الذى أصبح بابا روما فيما بعد لم يعترضا على آرائه بل أمَّن الكردينال بربرينى فعلا على صحة اكتشافه بالنظر إلى النجوم خلال المنظار .. ولكن قوى الرجعية كسبت المعركة فوضع كتاب كوبرنيكوس فى قائمة الكتب المحرمة (حيث ظلت مدفونة لمدة مائتى عام) ونصح جاليليو بالتخلى عن النظام الذى أوجده كوبرنيكوس ، ولكن جاليليو على الرغم من كل هذا نشر فى عام ١٦٣٠ كتابا يؤيد فيه بطريق غير مباشر هذا النظام ، وكان صديقه بربرينى قد اعتلى الكرسى البابوى تحت اسم يوربان الثامن وبدأ يستمع إلى الرجعيين الذين أوعزوا إليه بأن « الأبله » فى كتاب جاليليو إنما يمثله هو باعتباره مناصرا لنظام بطليموس الذى يقوم على آراء أرسطو ، وحرم بيع الكتاب وعينت لجنة للتحقيق فجاء تقريرها عن

جاليليو سيئا للغاية ، فقد أثبت التقرير أنه قال : « إن الأرض تتحرك وإن الشمس ثابتة » ، واستدعى جاليليو للمثول أمام المحققين .

وفى ٢٢ من يونيو عام ١٦٣٣ أجبر جاليليو ـ تحت التهديد بالتعذيب ـ أن يعلن « أننى أنكر وألعن وأكره الأخطاء والكفر السابق ذكره ، وبصفة عامة كل خطأ لا يتفق ومبادىء الكنيسة المقدسة ، وأقسم إننى لن أقول أو أؤكد مستقبلا شفويا أو كتابة شيئا يجلب على مثل هذا الشك ، وإذا عرفت كافراً أو شخصا يشتبه فى أنه كافر فسوف أبلغ عنه فورا هذه الإدارة المقدسة أو المحقق والأسقف فى البلد الذى أكون فيه » .

من السهل أن ندين جاليليو كما فعل كثير من المؤرخين لأنه لم يجد فى نفسه الشجاعة لأن يستشهد ، ولكن لا . فلنترك الذين استبسلوا فى ظروف مماثلة لظروفه أن ينقدوا الرجل المسن الذى خانته شجاعته تخالف ضميره . لقد تحطمت حياته ، وعلى الرغم من أنه استمر فى بحوثه العلمية (التى قام عليها معظم عمل نيوتن فى قوانين الحركة) فإنه أصيب بالعمى وتوفى فى يناير عام ١٦٤٢ وهو تحت رقابة المحققين سجينا فى بيته .

وبجانب اكتشافاته فى علم الفلك والديناميكا فقد وضع جاليليو أساس الطريقة العلمية الحديثة التى تعتبر أن جميع الأدلة العملية مقدمة أساسية لتكوين القوانين العلمية والنظريات .

ومن الغريب حقاً أن يتجاهل جاليليو القوانين الثلاثة الهامة التى تتعلق بحركة النجوم التى اكتشفها معاصره العظيم يوهان كبلر Johann Kepler والتى

تعتبر بدء مرحلة جديدة فى قصة العلوم الرياضية ، وهى التى اعتمد عليها نيوتن كأساس لكثير من عمله فى الجاذبية الكونية .

ولد يوهان كپلر الذى وضعته قوانينه فى مصاف أعاظم رجال الفلك فى العالم فى ويل ديرستادت بالقرب من ستتجارت عام ١٥٧١ ، وكان أبوه السكير ابن ملاحظ المدينة السابق الذى دخل جيش المرتزقة بعد أن فقد ثروته وكانت أم يوهان تجهل القراءة والكتابة ، وكان يشك فى أنها ساحرة ، ويظهر أن أباه ربح بعض المال لأنه فتح فندقا بعد خروجه من الجيش ، وقد اهتم بتعليم ابنه فنال يوهان قسطا من التعليم يؤهله للالتحاق بمدرسة المتفوقين التى كان ينفق عليها دوق ورتمبرج . وذهب بعدها إلى جامعة توبنجن وكان فى نيته أن يصبح قسا فى الكنيسة اللوثرية ولكنه أولع بالفلك وآمن بنظرية كوبرنيكوس ، وفى عام ١٥٩٤ عين محاضرا بجامعة جراتز بالنمسا ، وكان من سوء طالعه أن عرف أرملة على جانب من الثراء ثم زاد من سوء حظه أن تزوجها ، فقد كان زواجها مصدر شقاء دائم . وحلت به مصيبة جديدة حين وقعت جراتز فى قبضة الكاثوليك لأنه طرد من الجامعة باعتباره بروتستنتيا ، وكان تشريده هذا سببا فى اتصاله بعالم يدعى تيكو براهيه Tycho Brabe وتسبب هذا الاتصال فى حصوله على أعظم مجموعة من المذكرات الفلكية التى جمعها هذا الفلكى السويدى الدانيماركى .

ولد تيكو براهيه فى السويد بعد عشرين عاما من استقلال هذا البلد عن الدانيمارك ، وكان ينحدر من أسرة أرستقراطية غنيـــة امتدت فروعها فى السويد والدانيمارك . وأدى به كسوف الشمس عام ١٥٦٠ إلى دراسة الفلك فى

تعتبر بدء مرحلة جديدة فى قصة العلوم الرياضية ، وهى التى اعتمد عليها نيوتن كأساس لكثير من عمله فى الجاذبية الكونية .

ولد يوهان كپلر الذى وضعته قوانينه فى مصاف أعاظم رجال الفلك فى العالم فى ويل ديرستادت بالقرب من ستتجارت عام ١٥٧١ ، وكان أبوه السكير ابن ملاحظ المدينة السابق الذى دخل جيش المرتزقة بعد أن فقد ثروته وكانت أم يوهان تجهل القراءة والكتابة ، وكان يشك فى أنها ساحرة ، ويظهر أن أباه ربح بعض المال لأنه فتح فندقا بعد خروجه من الجيش ، وقد اهتم بتعليم ابنه فنال يوهان قسطا من التعليم يؤهله للالتحاق بمدرسة المتفوقين التى كان ينفق عليها دوق ورتمبرج . وذهب بعدها إلى جامعة توبنجن وكان فى نيته أن يصبح قسا فى الكنيسة اللوثرية ولكنه أولع بالفلك وآمن بنظرية كوبرنيكوس ، وفى عام ١٥٩٤ عين محاضرا بجامعة جراتز بالنمسا ، وكان من سوء طالعه أن عرف أرملة على جانب من الثراء ثم زاد من سوء حظه أن تزوجها ، فقد كان زواجها مصدر شقاء دائم . وحلت به مصيبة جديدة حين وقعت جراتز فى قبضة الكاثوليك لأنه طرد من الجامعة باعتباره بروتستنتيا ، وكان تشريده هذا سببا فى اتصاله بعالم يدعى تيسكو براهيه Tycho Brahe وتسبب هذا الاتصال فى حصوله على أعظم مجموعةمن المذكرات الفلكية التى جمعها هذا الفلكى السويدى الدانيماركى .

ولد تيكو براهيه فى السويد بعد عشرين عاما من استقلال هذا البلد عن الدانيمارك ، وكان ينحدر من أسرة أرستقراطية غنيـــــة امتدت فروعها فى السويد والدانيمارك . وأدى به كسوف الشمس عام ١٥٦٠ إلىدراسة الفلك فى

جامعة كوبنهاجن ، ثم فى جامعة روستوك ، وهى إحدى مدن البلطيق وكان فيما مضى عضوا ناجحا من أعضاء هيئة هانييتى ، وبينما هو هناك إذ تشاجر مع نبيل دانيماركى فبارزه ، وفقد جزءا من أنفه فوضع له بدلا منه قطعة مكونة من الشمع والذهب والفضة ، وبعد ذلك بمدة أثار سخط أسرته الأرستقراطية بزواجه من فتاة ريفية ولكنه لم يندم على فعلته هذه فقد كان زواجهما موفقا .

وفى عام ١٥٧٦ منحه فردريك الثانى ملك النرويج والدانيمارك ، جزيرة هفيين فى المضيق الذى يفصل بين السويد والدانيمارك ، وهناك بنى مرصده بعد أن حصل على معونة مالية سخية من فردريك وأسماه يورانيبرج « أى قصر السماء » . وظل تيكو براهيه فى يورانيبرج ما يزيد على عشرين عاماً وكون أعظم مجموعة من المعلومات الفلكية وأكثرها دقة قبل اختراع المنظار ، ولما زاره جيمس السادس ملك اسكتلندا الذى عرفه التاريخ باسم جيمس الأول ملك إنجلترا والذى لقب « بأحكم غبى » كتب بعض الأبيات يمدح فيها الفلكى العظيم .

وبعد وفاة فردريك الثانى أوقفت الدانيمارك المعونة المالية التى كان الملك قد قررها للمرصد فاستشاط براهيه غضبا ، وكان حاد الطبع ، وغادر البلد إلى ألمانيا ، وهنا دعاه الإمبراطور رودلف الثانى لأن يكون « رياضى الإمبراطور » فى قصر بنتاكى بالقرب من براغ وقرر له مرتبا سنويا قدره ٣٠٠٠ كرون ، وتصادف أن ارتحال براهيه إلى بنتاكى حدث فى نفس الوقت الذى طرد فيه كبلر من جامعة جراتز ، ولما كان براهيه فى حاجة إلى مساعدين فقد عرض الأمر على كبلر الذى قبله وذهب ليعيش فى براغ بالقرب من براهيه الذى ذهب إلى هناك نزولا على رغبة الإمبراطور ، وتوفى براهيه فجأة عام ١٦٠١ بالغا من

العمر خمسة وخمسين عاما وطلب إلى كپلر — وهو على فراش الموت — أن يكمل بعض الجداول عن حركات النجوم التى كان قد أمضى بضعة أعوام فى إعدادها ، وبذلك أنتقلت أدق وأجمل مجموعة من الأرصاد الفلكية فى ذلك الوقت إلى أيدى كپلر الذى خلف براهيه فى منصب فلكى الإمبراطور ، وكان من دأب هذا الملك أن ينسى دفع المرتبات مما اضطر كپلر إلى كسب قوته عن طريق قراءة الطالع — وكان هذا أمراً مشروعاً فى عصره — وكثرت مشاكله العائلية فمات طفله المفضل بمرض الجدرى ، وجنت زوجته وماتت ، وأمضى هو عدة شهور فى الدفاع عن أمه التى اتهمت بجريمة السحر فتراكمت عليه الديون .

وعلى الرغم من كل هذا فقد ركز كپلر تفكيره فى وضع القوانين التى تخضع لها حركة الكواكب مستندا فى عمله على المجموعة الفريدة من المشاهدات التى دونها تيكو براهيه . وبعد ثمانية أعوام من العمل المتواصل نشر كتابه عن تحركات النجم مارس (المريخ)

وكان كپلر متأثراً برأى كوبرنيكوس القائل بأن كل نجم يتحرك فى دائرة حول الشمس ، وتحت هذا التأثير المضلل أمضى كپلر سنوات يحاول عبثا تفسير تحركات النجم مارس غير المنتظمة كما استقاها من مشاهدات براهيه . وأخيراً بعد حسابات ضخمة وجد أن حركة المريخ يمكن أن تفسر إذا كان مساره قطعا ناقصا[1] تقع الشمس فى إحدى بؤرتيه ويتعلق قانون كپلر الأول

---

(١) القطع الناقص عندما نتحرك نقطة بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين ثابتاً . وتسمى كل من هاتين النقطتين بؤرة القطع الناقص . وللقارىء الذى لم يدرس الرياضيات أن يضع نقطتين ب ، ب١ على قطعة من الورق ثم يثبت طرفى خيط عند هاتين النقطتين بحيث يكون طول الخيط أكبر من المسافة ب ب١ فإذا شد الخيط بواسطة سن قلم رصاص وحرك القلم فإنه يرسم منحنيا هو قطع ناقص بؤرتاه هما ب ، ب١

العمر خمسة وخمسين عاما وطلب إلى كپلر — وهو على فراش الموت — أن يكمل بعض الجداول عن حركات النجوم التي كان قد أمضى بضعة أعوام في إعدادها ، وبذلك انتقلت أدق وأجمل مجموعة من الأرصاد الفلكية في ذلك الوقت إلى أيدي كپلر الذي خلف براهيه في منصب فلكي الإمبراطور ، وكان من دأب هذا الملك أن ينسى دفع المرتبات مما اضطر كپلر إلى كسب قوته عن طريق قراءة الطالع — وكان هذا أمراً مشروعاً في عصره — وكثرت مشاكله العائلية فمات طفله المفضل بمرض الجدري ، وجنت زوجته وماتت ، وأمضى هو عدة شهور في الدفاع عن أمه التي اتهمت بجريمة السحر فتراكمت عليه الديون .

وعلى الرغم من كل هذا فقد ركز كپلر تفكيره في وضع القوانين التي تخضع لها حركة الكواكب مستندا في عمله على المجموعة الفريدة من المشاهدات التي دونها تيكو براهيه . وبعد ثمانية أعوام من العمل المتواصل نشر كتابه عن تحركات النجم مارس (المريخ)

وكان كپلر متأثراً برأي كوبرنيكوس القائل بأن كل نجم يتحرك في دائرة حول الشمس ، وتحت هذا التأثير المضلل أمضى كپلر سنوات يحاول عبثا تفسير تحركات النجم مارس غير المنتظمة كما استقاها من مشاهدات براهيه . وأخيراً بعد حسابات ضخمة وجد أن حركة المريخ يمكن أن تفسر إذا كان مساره قطعا ناقصا[1] تقع الشمس في إحدى بؤرتيه ويتعلق قانون كپلر الأول

---

(١) القطع الناقص عندما تتحرك نقطة بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين ثابتاً . وتسمى كل من هاتين النقطتين بؤرة القطع الناقص . وللقارىء الذي لم يدرس الرياضيات أن يضع نقطتين ب ، ب١ على قطعة من الورق ثم يثبت طرفي خيط عند هاتين النقطتين بحيث يكون طول الخيط أكبر من المسافة ب ب١ فإذا شد الخيط بواسطة سن قلم رصاص وحرك القلم ، فإنه يرسم منحنيا هو قطع ناقص بؤرتاه هما ب ، ب١

بهذه الحركة البيضية للكواكب .

وبعد أن درس مجموعة المشاهدات العظيمة التى تركها براهيه استنتج — وكان هذا على عكس المعتقدات السائدة — أن المريخ لا يتحرك بسرعة منتظمة ثابتة – بل وجد أنه إذا رُسم خط وهمى من الكواكب إلى الشمس، فإن هذا الخط سوف يمسح مساحات متساوية فى أزمنة متساوية مهما يكن موقع مارس على مداره البيضى عند بدء المشاهدات . ومن ذلك يتبع أن سرعة المريخ تبلغ أقصاها عندما يكون فى أقرب نقطة إلى الشمس وأصغرها عندما يكون فى أبعد نقطة عن الشمس ، وبعد أن وصل إلى نتائج مماثلة بالنسبة إلى مدار وحركة الأرض عمم نتائجه قياسا على ما سبق بالنسبة لبقية الكواكب ، ونشر هذه القوانين فى عام ١٦٠٩ فى كتابه الذى أسماه « عن حركة النجم مارس »(١) وفى نفس الكتاب عرج على موضوع الجاذبية واقترح أن « شد » القمر هو الذى يحدث المد والجزر على الأرض .

وبعد عشر سنوات من هذا التاريخ نشر كتابا اسماه «التجانس العالمى»(٢) حاول فيه إثبات نظرية تقول بأن النجوم وهى تهرع فى السموات بسرعاتها المختلفة تحدث تجانسا سماويا تسمعه « الروح المرهفة الحس » فيما وراء الكون وفى أثناء تخبطه فى عالم الخيال وضع كيلر ثالث قوانينه وأهمها وهو أن « مربع الزمن اللازم لدورة واحدة بالنسبة لأى كوكب يتناسب مع مكعب متوسط بعده عن الشمس » ويمكننا أن نشعر بسرور كيلر واغتباطه حين اكتشف بعد سنوات أمضاها فى حسابات مضنية ومحاولات عديدة فاشلة لإيجاد علاقة

---

(١) كان عنوان الكتاب De motibus stellae Martis

(٢) كان عنوان الكتاب Harmonices Mundi

عددية بين أبعاد الكواكب عن الشمس وعدد دوراتها حول الشمس ، أن يجد فجأة أن النسبة بين القوة الثانية للزمن والقوة الثالثة للمسافة واحـــدة لاتتغير ، وإذا استخدمنا الأعداد الحديثة وطريقتنا المعروفة لحساب البعد عن الشمس بالوحدات الفلكية (الوحدة الفلكية هى متوسط البعد بين الأرض والشمس) لوجدنا النتائج التالية .

	الزمن بالسنوات ن	المسافة ف	ن^٢	ف^٣
عطارد	٫٢٤	٫٣٨٧ وحدة فلك	٫٠٥٨	٫٠٥٨
الزهرة	٫٦١	٫٧٢٣ «	٫٣٧٨	٫٣٧٨
الأرض	١٫٠٠	١٫٠٠٠ «	١٫٠٠٠	١٫٠٠٠
المريخ	١٫٩٨	١٫٥٢٤ «	٣٫٥٤	٣٫٥٤
جوبيتر	١١٫٨٦	٥٫٢٠٢ «	١٤٠٫٧	١٤٠٫٨
زحل	٢٩٫٤٦	٩٫٥٣٩ «	٨٦٧٫٩	٨٦٨٫٠

وعلى الرغم من أن معظم عمل كبلر كان منصباً على دراسة الفلك الرياضى فإنه أسهم بقسط هام من الرياضيات البحتة ، وكان من المسئولين عن إدخـال اللوغاريتمات فى ألمانيا فى حين كان أول رياضى فى القرن السابع عشر يستخدم الطرق التى تشتمل على فكرة « مالانهاية » ، وكانت الفكرة قد استبعدت منذ عهد زينو Zeno ، وفى عام ١٦١٣ كان محصول النبيذ ممتازاً مما أدى بكبلر إلى التفكير فى أفضل الطرق لقياس محتويات زجاجة نبيذ ، واستند على طريقة

أرشميدس واختصر الطريق باستخدام ما عرف بعد ذلك بالمقادير المتناهية الصغر (التى سنتحدث عنها فيما بعد) وعلى الرغم من أن طريقته هذه واجهت نقداً شديداً لأنها استخدمت عبارات لا منطقية ، إلا أنها وصلت به إلى النتائج المطلوبة ، كما أنها مهدت السبيل لطريقة « اللامنقسمات » التى سنقابلها عندما نصل فى قصتنا إلى كافالييرى Cavalieri وإلى حساب التفاضل والتكامل لنيوتن وليبنتز .

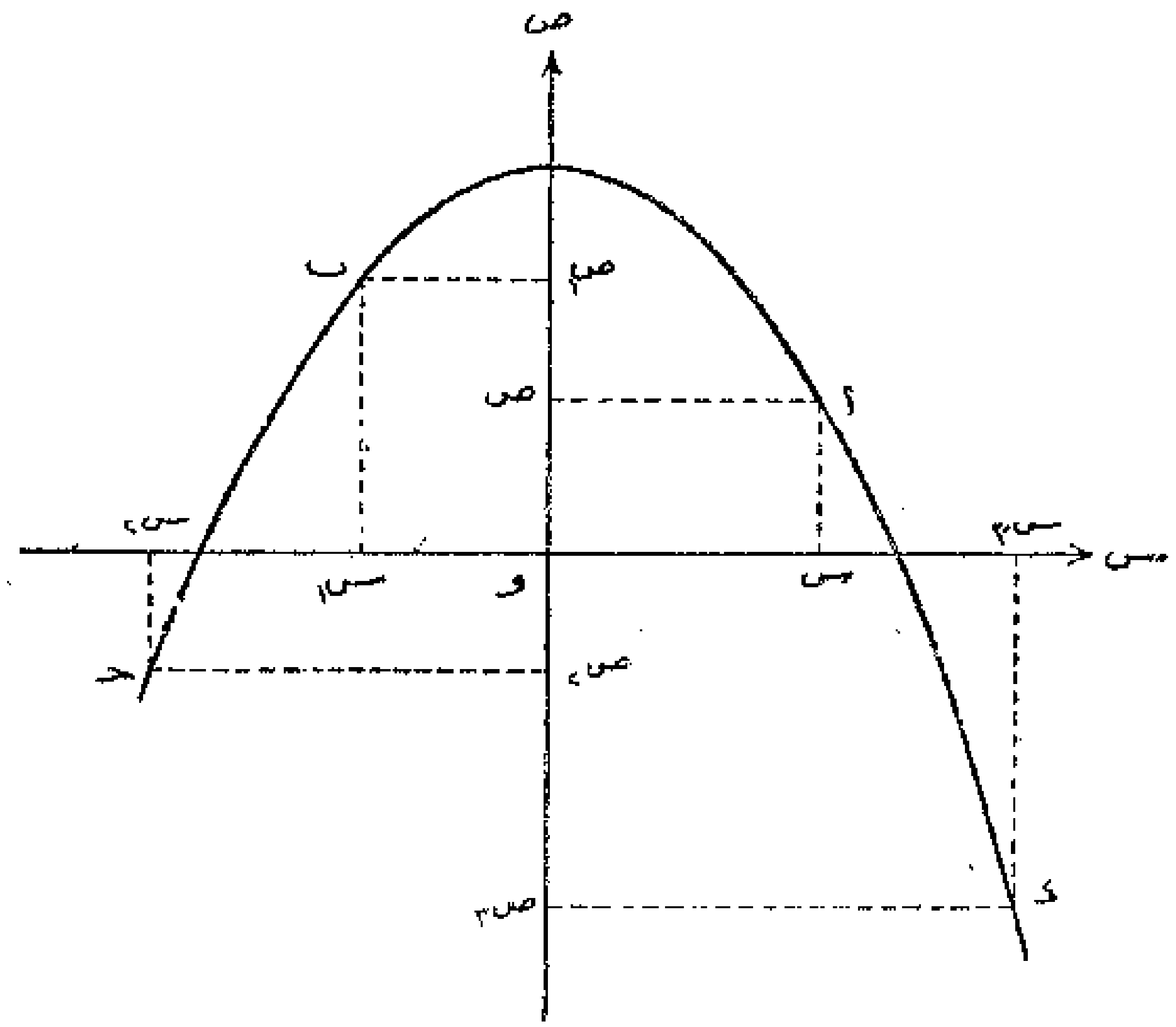
ورغم المتاعب التى أحاطت بحياة كبلر وجد الرجل السعادة أخيراً بزواجه الثانى عام ١٦١٢ .

وكتب كبلر مزيج عجيب من التصوف والخيال تقترن بفهم تام للحقائق العلمية ، وقد اختصرت قوانينه الثلاثة النظام الشمسى إلى مرتبة البساطة وأثبتت أن الشمس تقع فى البؤرة المشتركة للمدارات البيضية لجميع الكواكب ، كما أنها مكنت علماء الفلك من حساب موقع أى نجم فى أى لحظة حساباً دقيقاً ، وتوفى كبلر عام ١٦٣٠ بالغاً من العمر ٥٩ عاماً وهو فى طريقه لتحصيل بعض المتأخر من مرتبه .

لقد أوصلتنا قصة نابيير وجاليليو وكبلر إلى قلب القرن السابع عشر وهو القرن الذى شهد تقدم الرياضيات وإشراقها فى معظم دول أوروبا .

وفى عام ١٥٩٦ — وهو العام الذى بدأ فيه نابيير رحلته الزمنية الطويلة بحثاً عن طريقة لتبسيط الحسابات المعقدة وظهر بنتائجه الفذة — ولد صبى بالقرب من تور بفرنسا كتب له تطوير الآراء الرياضية وإدخال الرياضيات الحديثة ، كان هذا الصبى هو ديكارت René Descartes وكان — مثل نابيير — ابناً

(شكل ٦٥) تقع فيما نسميه بالربع الأول والثانى والثالث والرابع ، أو الأرباع التي يعملها المحوران .



شكل (٦٥)

إحداثيا ا هما ص ا (أو و س) ، س ا (أو و ص) ، وكل من هذين موجب ، لأن القياس إلى يمين المحور الرأسى ولأعلى بالنسبة للمحور الأفقى يعتبر موجباً .

إحداثيا ب هما البعدان ص١ ب (أو و س١) ، س١ ب (أو و ص١) أول الاحداثيين سالب وثانيهما موجب .

إحداثيا حـ هما ص٢ حـ (أو و س٢) ، س٢ حـ (أو و ص٢) وكلاهما سالب .

إحداثيا ى هما ص٣ ى (أو و س٣) ، س٣ ى (أو و ص٣) أولهما موجب وثانيهما سالب .

لإقطاعى موسر . وذهب رينيه ديكارت إلى المدارس الداخلية فى سن الثامنة حيث كان يسمح له — بسبب صحته المعتلة أو بفضل ثراء والده — أن يتأخر فى فراشه فى الصباح كما يشاء ، وظلت معه هذه العادة طوال حياته القصيرة التى بلغت أربعة وخمسين عاماً . كان تلميذاً نجيباً ، ولكنه كان يقول إن دراسته لم تفده فى شيئا سوى إقناعه بجهله المطبق ، وكان مثله فى ذلك مثل إسحق نيوتن الذى صرح فى أواخر حياته الحافلة بأنه كان يشعر بأنه صبى يلعب على الشاطىء بينما كنوز الحقائق ترقد فى بحرها الزاخر ولا تجد من يكتشفها .

لم يجد ديكارت أى متعة عقلية فى نظم الفلسفة السائدة التى كان يعلمها الجيزويت ، ويقول ديكارت : « إن السبب هو أننى بمجرد أن سمحت سنى بهجر المدرسة صممت على ألا أطلب من العلم إلا ما أحب بين طيات نفسى أو فى كتاب الحياة ، ولذا أمضيت ماتبقى من شبابى فى السفر ، ومشاهدة المعسكرات وبلاط الملوك ، والاجتماع بأناس من مختلف المشارب والميول »

بهذه الكلمات أعطانا ديكارت مفتاحاً لحياته القلقة التى كانت تتأرجح بين فترات اجتماعية وأخرى يكون فيها فى عزلة تامة .

وكان هذا الرجل ذو الأنف الضخم والجبهة الناتئة التى تدلى عليها شعره الأسود إلى الحاجبين ، والذى كان يتشح دائماً بالسواد ، أنانياً محباً لذاته ، ولم يتزوج رغم أنه أنجب ابنة غير شرعية ماتت فى طفولتها . كان هدفه الرئيسى فى الحياة هو تأسيس مدرسة جديدة للفلسفة وظهر اختراعه الرياضى الفذ عفواً كمقدمة لعمله فى الفلسفة ، وانتشر أتباعه « الديكارتيون » — كما كانوا يسمون — ردحاً من الزمن فى بعض بلدان أوروبا رغم المعارضة الشديدة

لإقطاعي موسر . وذهب رينيه ديكارت إلى المدارس الداخلية في سن الثامنة حيث كان يسمح له — بسبب صحته المعتلة أو بفضل ثراء والده — أن يتأخر في فراشه في الصباح كما يشاء ، وظلت معه هذه العادة طوال حياته القصيرة التي بلغت أربعة وخمسين عاماً . كان تلميذاً نجيباً ، ولكنه كان يقول إن دراسته لم تفده في شيئا سوى إقناعه بجهله المطبق ، وكان مثله في ذلك مثل إسحق نيوتن الذي صرح في أواخر حياته الحافلة بأنه كان يشعر بأنه صبي يلعب على الشاطىء بينما كنوز الحقائق ترقد في بحرها الزاخر ولا تجد من يكتشفها .

لم يجد ديكارت أي متعة عقلية في نظم الفلسفة السائدة التي كان يعلمها الجيزويت ، ويقول ديكارت : « إن السبب هو أنني بمجرد أن سمحت سني بهجر المدرسة صممت على ألا أطلب من العلم إلا ما أحب بين طيات نفسي أو في كتاب الحياة ، ولذا أمضيت ماتبقى من شبابي في السفر ، ومشاهدة المعسكرات وبلاط الملوك ، والاجتماع بأناس من مختلف المشارب والميول »

بهذه الكلمات أعطانا ديكارت مفتاحاً لحياته القلقة التي كانت تتأرجح بين فترات اجتماعية وأخرى يكون فيها في عزلة تامة .

وكان هذا الرجل ذو الأنف الضخم والجبهة الناتئة التي تدلى عليها شعره الأسود إلى الحاجبين ، والذي كان يتشح دائماً بالسواد ، أنانياً محباً لذاته ، ولم يتزوج رغم أنه أنجب ابنة غير شرعية ماتت في طفولتها . كان هدفه الرئيسي في الحياة هو تأسيس مدرسة جديدة للفلسفة وظهر اختراعه الرياضي الفذ عفواً كمقدمة لعمله في الفلسفة ، وانتشر أتباعه « الديكارتيون » — كما كانوا يسمون — ردحاً من الزمن في بعض بلدان أوروبا رغم المعارضة الشديدة

وقد هجرت مبادئهم منذ أمد بعيد . أما المادة الرياضية فقد عادت على مبتدعها بالشهرة الخالدة .

بعد أن ترك ديكارت المدرسة سار فى نهج شباب عصره الأغنياء فى فرنسا ، حيث كان الكردينال ريشيليو فى طريقه إلى المجد فى عهد الملك الشاب لويس الثالث عشر فاشترك فى مجون المجتمع الراقى فى باريس، والتحق بعد ذلك بالجيش فى خدمة الأمير موريس أورانج بهولندة . وبينما هو فى باريس اتصل برياضى فرنسى اسمه كلود ميدورج Claude M,dorge الذى أثار اهتمامه بمادة الرياضيات ، وقيل إن ديكارت التحق بالجيش هربا من مجون باريس ، ولكن الحقيقة هى أن شباب الأسر العريقة فى ذلك الحين كانوا يتجهون إما إلى الكنيسة وإما إلى الجيش .

وتصادف وصول ديكارت إلى هولندة فى فترة كان القتال قد توقف فيها إلى حين ، فاستغل فرصة الهدوء هذه لدراسة الرياضيات ، وبعد أن قضى سنتين فى هولندة دون أن يرى شيئا من الحرب التحق بالجيش البافارى الذى كان مشغولا بحرب الثلاثين السنة التى اجتاحت ألمانيا بأسرها كالعاصفة ، ويقول ديكارت إنه بينما كان فى منطقة الدانوب فى شتاء ١٦١٩ وفى أثناء اشتعال المعركة « اتقدت عزيمته واكتشف أساس علم مدهش » وربما قصد بذلك اكتشافه للهندسة التحليلية ، أو ربما كان يقصد طرقه فى الفلسفة العامة التى استخدمها فيما بعد .

واشترك ديكارت فى معركة براغ فى سبتمبر ١٦٢٠ حين كان بريجز فى إنجلترا يعد جداول اللوغاريتمات . وفى السنة التالية كان يخدم فى هنغاريا ، وكانت

وقد هجرت مبادئهم منذ أمد بعيد . أما المادة الرياضية فقد عادت على مبتدعها بالشهرة الخالدة .

بعد أن ترك ديكارت المدرسة سار فى نهج شباب عصره الأغنياء فى فرنسا ، حيث كان الكردينال ريشيليو فى طريقه إلى المجد فى عهد الملك الشاب لويس الثالث عشر فاشترك فى مجون المجتمع الراقى فى باريس ، والتحق بعد ذلك بالجيش فى خدمة الأمير موريس أورانج بهولندة . وبينما هو فى باريس اتصل برياضى فرنسى اسمه كلود ميدورج Claude M,dorge الذى أثار اهتمامه بمادة الرياضيات ، وقيل إن ديكارت التحق بالجيش هربا من مجون باريس ، ولكن الحقيقة هى أن شباب الأسر العريقة فى ذلك الحين كانوا يتجهون إما إلى الكنيسة وإما إلى الجيش .

وتصادف وصول ديكارت إلى هولندة فى فترة كان القتال قد توقف فيها إلى حين ، فاستغل فرصة الهدوء هذه لدراسة الرياضيات ، وبعد أن قضى سنتين فى هولندة دون أن يرى شيئا من الحرب التحق بالجيش البافارى الذى كان مشغولا بحرب الثلاثين السنة التى اجتاحت ألمانيا بأسرها كالعاصفة ، ويقول ديكارت إنه بينما كان فى منطقة الدانوب فى شتاء ١٦١٩ وفى أثناء اشتعال المعركة « اتقدت عزيمته واكتشف أساس علم مدهش » وربما قصد بذلك اكتشافه للهندسة التحليلية ، أو ربما كان يقصد طرقه فى الفلسفة العامة التى استخدمها فيما بعد .

واشترك ديكارت فى معركة براغ فى سبتمبر ١٦٢٠ حين كان بريجز فى إنجلترا يعد جداول اللوغاريتمات . وفى السنة التالية كان يخدم فى هنغاريا ، وكانت

هذه خاتمة خدمته العسكرية إذ سافر بعدها إلى أوروبا ومكنه دخله المستقل الذى ورثه بوفاة أمه من إشباع رغبته فى التنقل. واستقر فى باريس حيث بدأ اهتمامه بنظرية انكسار الضوء، وبطحن العدسات لعمل الآلات البصرية، وكان العلماء فى تلك الفترة مهتمين بالجهاز الجديد المسمى بالمنظار الذى كان يصنع التاريخ بالنسبة لعلم الفلك الحديث.

وما لبث أن وجد ديكارت نفسه يضيق بزيارة أصدقائه القدامى من ماجنى باريس، فقد كانوا يشغلونه عن تأملاته، وبلغت القحة بأحدهم أن زاره فى الحادية عشرة من صباح أحد الأيام، ولما سئم هذه المقاطعات لحياته العلمية هجر باريس وذهب ليعيش فى هولندة حيث يمكنه أن يمضى أيامه فى التأمل والبحث عن الحقيقة، وأخذ يتنقل فى هولندة من مسكن إلى آخر فغير مسكنه فى العشرين عاما التى قضاها هناك حوالى أربع وعشرين مرة. وأخيراً تحرر من الفضوليين وكتب من امستردام يقول: «أنام عشر ساعات كل ليلة، وليس من يقصر من هذه الساعات أو يقلل من راحتى»، ودرس هناك الطبيعة والرياضيات والموسيقى التى كان مشغوفاً بها. ولكنه لم يكن ممن يرهقون أنفسهم بالعمل وكتب مرة يقول: «إن مبدئى فى الدراسة الذى أعتقد أنه كان السر فى تعلمى ما تعلمت، هو أننى لا أقضى سوى بضع ساعات يومياً فى الأمور التى تشغل التصور وبعض ساعات قلائل سنوياً فى الأمور التى تشغل الإدراك، وأعطى لنفسى بقية الوقت لاسترخاء المشاعر ولراحة العقل». قد يقال إن حياة ديكارت الأولى كانت غير عادية، وإن شخصيته لم تكن جذابة. أما عبقريته فلاشك أنها وضعته فى مصاف كبار الرياضيين قاطبة.

فى عام ١٦٣٧ نشر كتاباً يعرض فيه آراءه فى الفلسفة أسماه «بحث عن

هذه خاتمة خدمته العسكرية إذ سافر بعدها إلى أوروبا ومكنه دخله المستقل الذى ورثه بوفاة أمه من إشباع رغبته فى التنقل. واستقر فى باريس حيث بدأ اهتمامه بنظرية انكسار الضوء ، وبطحن العدسات لعمل الآلات البصرية ، وكان العلماء فى تلك الفترة مهتمين بالجهاز الجديد المسمى بالمنظار الذى كان يصنع التاريخ بالنسبة لعلم الفلك الحديث .

وما لبث أن وجد ديكارت نفسه يضيق بزيارة أصدقائه القدامى من ماجنى باريس ، فقد كانوا يشغلونه عن تأملاته ، وبلغت القحة بأحدهم أن زاره فى الحادية عشرة من صباح أحد الأيام ، ولما سئم هذه المقاطعات لحياته العلمية هجر باريس وذهب ليعيش فى هولندة حيث يمكنه أن يمضى أيامه فى التأمل والبحث عن الحقيقة ، وأخذ يتنقل فى هولندة من مسكن إلى آخر فغير مسكنه فى العشرين عاما التى قضاها هناك حوالى أربع وعشرين مرة . وأخيراً تحرر من الفضوليين وكتب من امستردام يقول : « أنام عشر ساعات كل ليلة ، وليس من يقصر من هذه الساعات أو يقلل من راحتى » ، ودرس هناك الطبيعة والرياضيات والموسيقى التى كان مشغوفاً بها . ولكنه لم يكن ممن يرهقون أنفسهم بالعمل وكتب مرة يقول : « إن مبدئى فى الدراسة الذى أعتقد أنه كان السر فى تعلمى ما تعلمت ، هو أننى لا أقضى سوى بضع ساعات يومياً فى الأمور التى تشغل التصور وبعض ساعات قلائل سنوياً فى الأمور التى تشغل الإدراك ، وأعطى لنفسى بقية الوقت لاسترخاء المشاعر ولراحة العقل» . قد يقال إن حياة ديكارت الأولى كانت غير عادية ، وإن شخصيته لم تكن جذابة . أما عبقريته فلاشك أنها وضعته فى مصاف كبار الرياضيين قاطبة .

فى عام ١٦٣٧ نشر كتاباً يعرض فيه آراءه فى الفلسفة أسماه « بحث عن

الطريقة السليمة لضبط العقل والبحث عن الحقيقة فى العلوم » ، وكان يعمل فى هذا الكتاب دون انتظام لمدة ثمانية عشر عاما . وكان للكتاب ثلاثة ملاحق وكان ثالثهما فى الهندسة ، وهى التى خلدت اسم ديكارت وتبدأ بالمسائل التى يمكن حلها عن طريق الرسم باستخدام المسطرة والفرجار فقط ، ثم ينتقل إلى البحث فى أنواع مختلفة من المنحنيات .

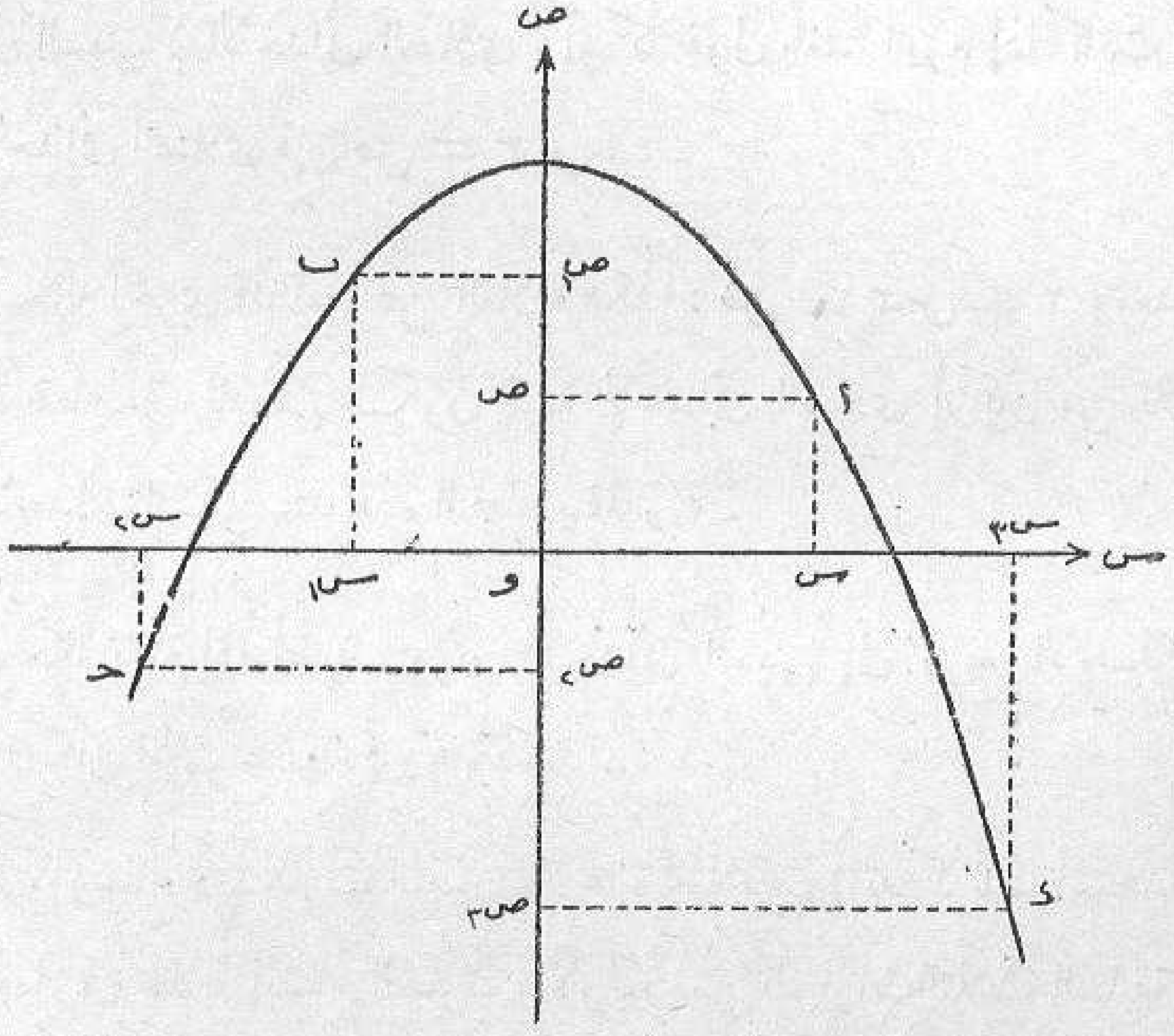
والهندسة الإقليدية التى درسها ديكارت فى شبابه تتألف من عدد كبير من النظريات المنفردة تقف كل منها كما يبدو مستقلة عن الأخريات ، وأدرك ديكارت أن هناك حقائق عامة معينة تقوم عليها الأشكال الهندسية ، وفى هذا يقول : « ولكن يظهر لى أنها لم تقل لعقلى بوضوح كاف لم كانت الأشياء كما تظهر لى ، ولا بأى وسيلة تم اكتشافها » .

وظهرت عبقرية ديكارت فى طريقته التى تمكننا من تمثيل أى منحنى بواسطة علاقة يمكن إثبات وجودها بين طولى مستقيمين . وقال ديكارت : « هذه طريقة لم أجد أسهل منها أو أكثر وضوحاً بالنسبة للخيال أو المشاعر » .

وطولا هذين المستقيمين يعرفان بالإحداثيين ، ولو أن هذه التسمية ليست من وضع ديكارت ، بل من وضع ليبنتز الذى سوف نقابله قريباً فى صفحات هذا الكتاب . فى شكل ٦٥ بالإضافة إلى منحنى معلوم نرى مستقيمين يسميان بمحورى الإحداثيات مرسومين متعامدين . ومن المعتاد أن يرسم المحوران هكذا متعامدين إلا أن هذا التعامد ليس شرطاً أساسياً .

ولتفسير معنى الإحداثيات نأخذ أربع نقط ا ، ب ، حـ ، ى على المنحنى

(شكل ٦٥) تقع فيما نسميه بالربع الأول والثاني والثالث والرابع ، أو الأرباع التي يعملها المحوران .



شكل (٦٥)

إحداثيا ا هما ص ا (أو و س) ، س ا (أو و ص) ، وكل من هذين موجب ، لأن القياس إلى يمين المحور الرأسى ولأعلى بالنسبة للمحور الأفقى يعتبر موجباً .

إحداثيا ب هما البعدان ص$_1$ ب (أو و س$_1$) ، س$_1$ ب (أو و ص$_1$) أول الاحداثيين سالب وثانيهما موجب .

إحداثيا ح هما ص$_2$ ح (أو و س$_2$) ، س$_2$ ح (أو و ص$_2$) وكلاهما سالب .

إحداثيا ء هما ص$_3$ ء (أو و س$_3$) ، س$_3$ ء (أو و ص$_3$) أولهما موجب وثانيهما سالب .

أثبت ديكارت أنه فى حالة أى منحنى يمكن إثبات وجود علاقة بين إحداثيى نقطة واقعة على المنحنى ، فمثلا فى حالة منحنى معين يمكن أن يساوى الاحداثى السينى ⅓ الاحداثى الصادى ، أو كما نقول بلغتنا اليوم إذا كانت س تمثل الاحداثى الصادى فإن ص = ٣ س .

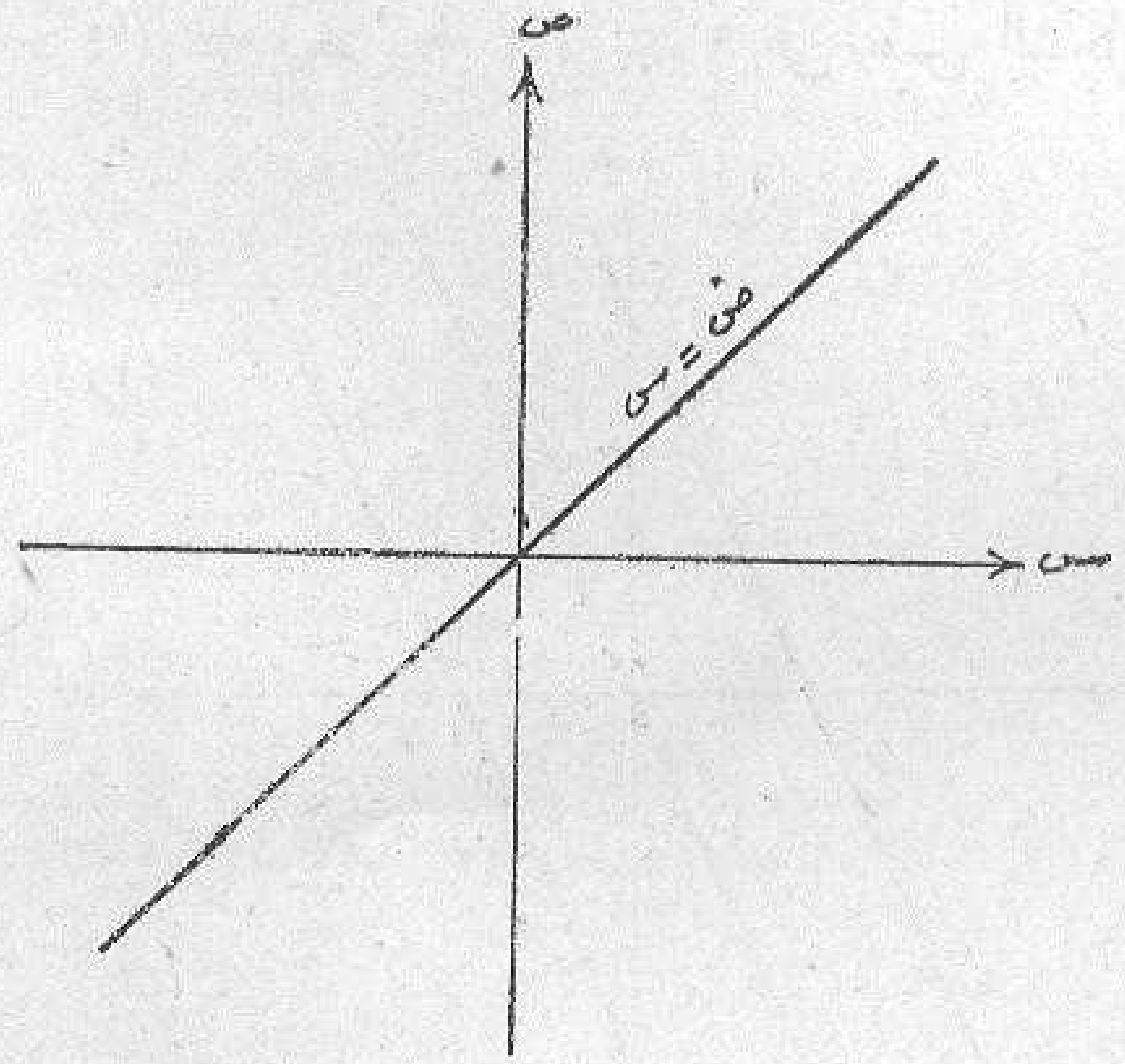
وفى حالة أخرى قد نعبر عن العلاقة هكذا : ص = ٣ س + ٢ ومعناها أنه لأى نقطة على المنحنى تكون قيمة الإحداثى الصادى أكبر من ثلاثة أمثال الاحداثى السينى عند هذه النقطة بمقدار ٢ .

وفى حالة ثالثة إذا أضيف مربع الاحداثى السينى إلى مربع الاحداثى الصادى لكان المجموع يساوى ٩ وهكذا .

كيف استطاع ديكارت التعبير عن هذه العلاقات (تذكر أننا استخدمنا فكرته فعلا فى محاولة إيضاح العبارتين الأوليين من العبارات الثلاث السابقة).

وقد قال « فكرت أنه حتى أحتفظ بها جميعا فى ذاكرتى أو حتى أضمن مجموعة كبيرة منها بعضها مع بعض على أن أعبر عنها بحروف معينة فى أقصر عبارة ». فماذا كان يعنى حين قال « حروف معينة فى أقصر عبارة »؟ . كان يرمى إلى التعبير الرمزى فى الجبر الذى كان يجرى إعداده فى تلك الأيام كما سبق أن أوضحنا فى الباب الثالث ، وبجعل س تمثل الاحداثى السينى ، ص تمثل الاحداثى الصادى أمكنه أن يعبر عن العلاقات مثل : ص = س ، ص = ٢ س ، ص = ٢ س + ٣. ويستطيع القارئ الذى نسى معلوماته فى الهندسة التحليلية أن يتذكر أن كلا من هذه المعادلات يمثل مستقيما . إذا استخدم قطعة من الورق المربعات ورسم محورين متعامدين واختار قيمتين من قيم س فى كل معادلة

وحسب قيم ص المناظرة لها من العلاقة القائمة فى نفس المعادلة ثم حدد موقعى النقطتين على الورقة ورسم مستقيما يمر بهما . فالمستقيمان الأولان ص = س ،

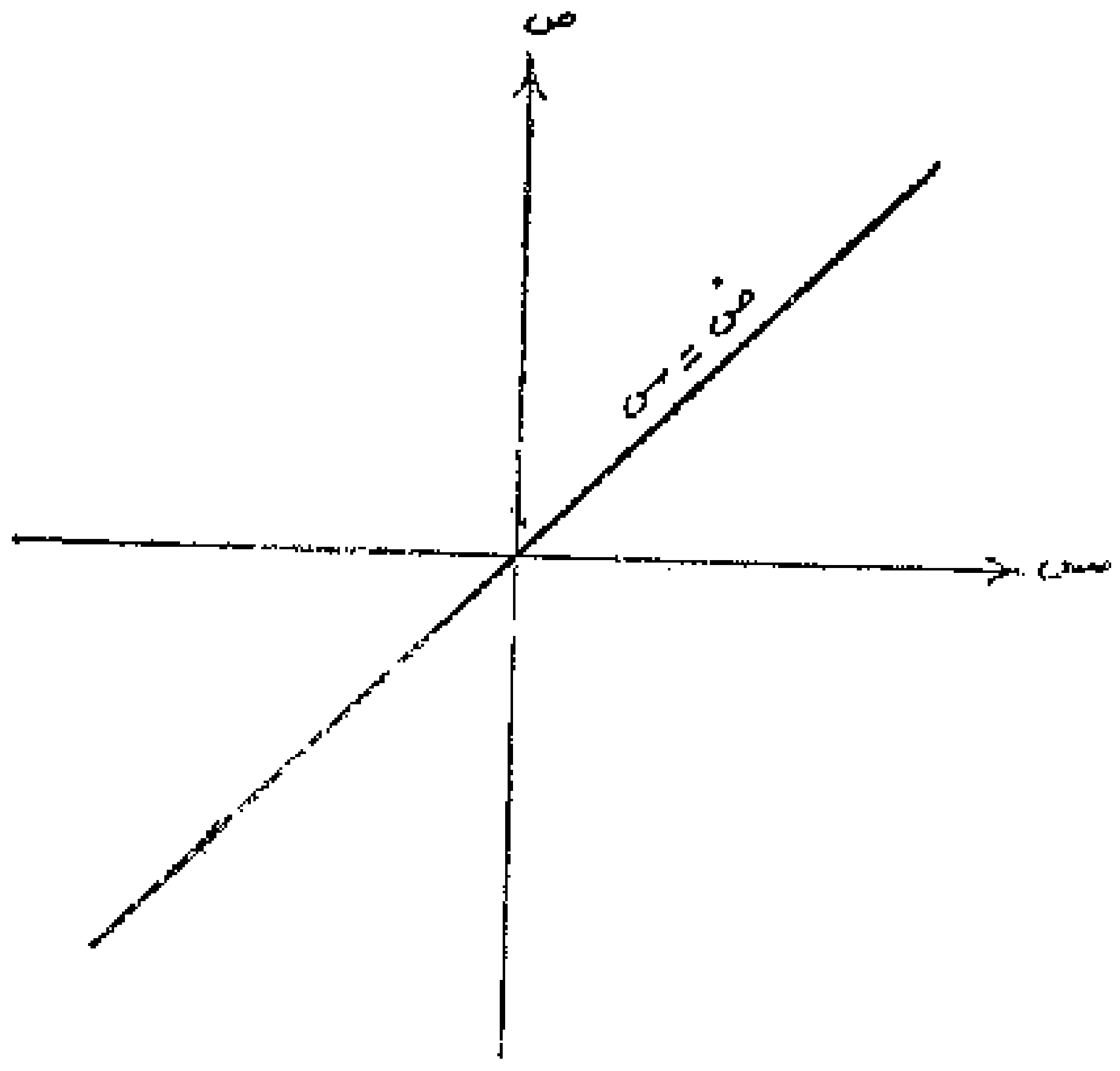


شكل (٦٦)

ص = ٢ س يمران حتما بنقطة الأصل أى بنقطة تقاطع المحورين ، والمستقيم الثالث ص = ٢ س + ٣ يكون له نفس ميل المستقيم الثانى (انظر شكل ٦٦) ولكنه يقطع المحور الرأسى على بعد ٣ وحدات من نقطة الأصل . وإذا كانت معادلة المستقيم الثالث هى ص = ٢ س — ٣ اظل المستقيم موازيا لكل من المستقيمين الأصليين ولكنه يقطع المحور الرأسى على بعد ٣ وحدات تحت نقطة الأصل .

وباستخدام نفس الطريقة الرمزية أى س دلالة على الاحداثى السينى ، ص دلالة على الاحداثى الصادى ، نجد أن المعادلة س٢ + ص٢ = ٩ تمثل دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $\sqrt{٩}$ أى ٣ وحدات .

وحسب قيم ص المناظرة لها من العلاقة القائمة فى نفس المعادلة ثم حدد موقعى النقطتين على الورقة ورسم مستقيما يمر بهما . فالمستقيمان الأولان ص = س ،



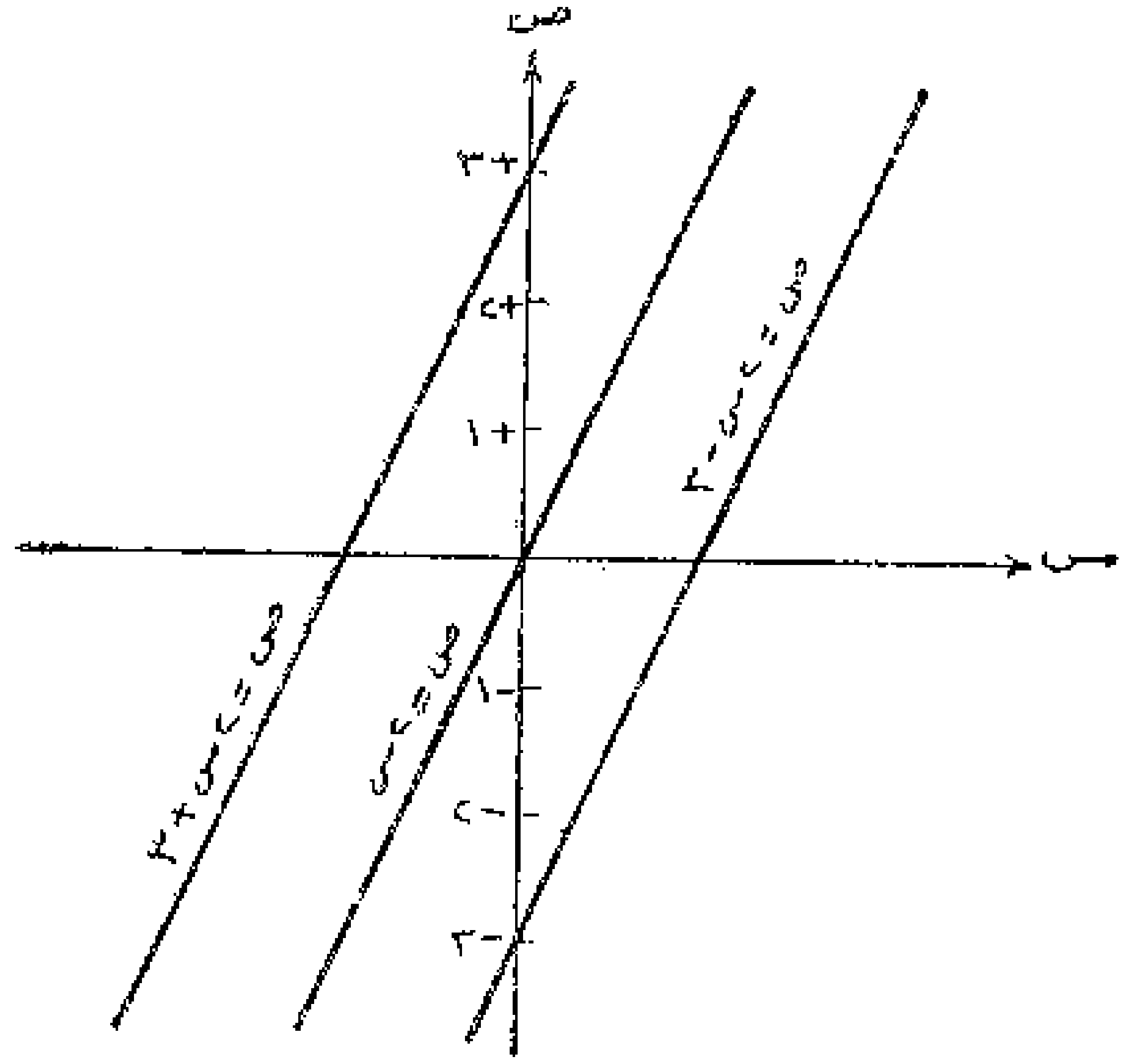
شكل (٦٦)

ص = ٢ س يمران حتما بنقطة الأصل أى بنقطة تقاطع المحورين ، والمستقيم الثالث ص = ٢ س + ٣ يكون له نفس ميل المستقيم الثانى (انظر شكل ٦٦) ولكنه يقطع المحور الرأسى على بعد ٣ وحدات من نقطة الأصل . وإذا كانت معادلة المستقيم الثالث هى ص = ٢ س — ٣ اظل المستقيم موازيا لكل من المستقيمين الأصليين ولكنه يقطع المحور الرأسى على بعد ٣ وحدات تحت نقطة الأصل .

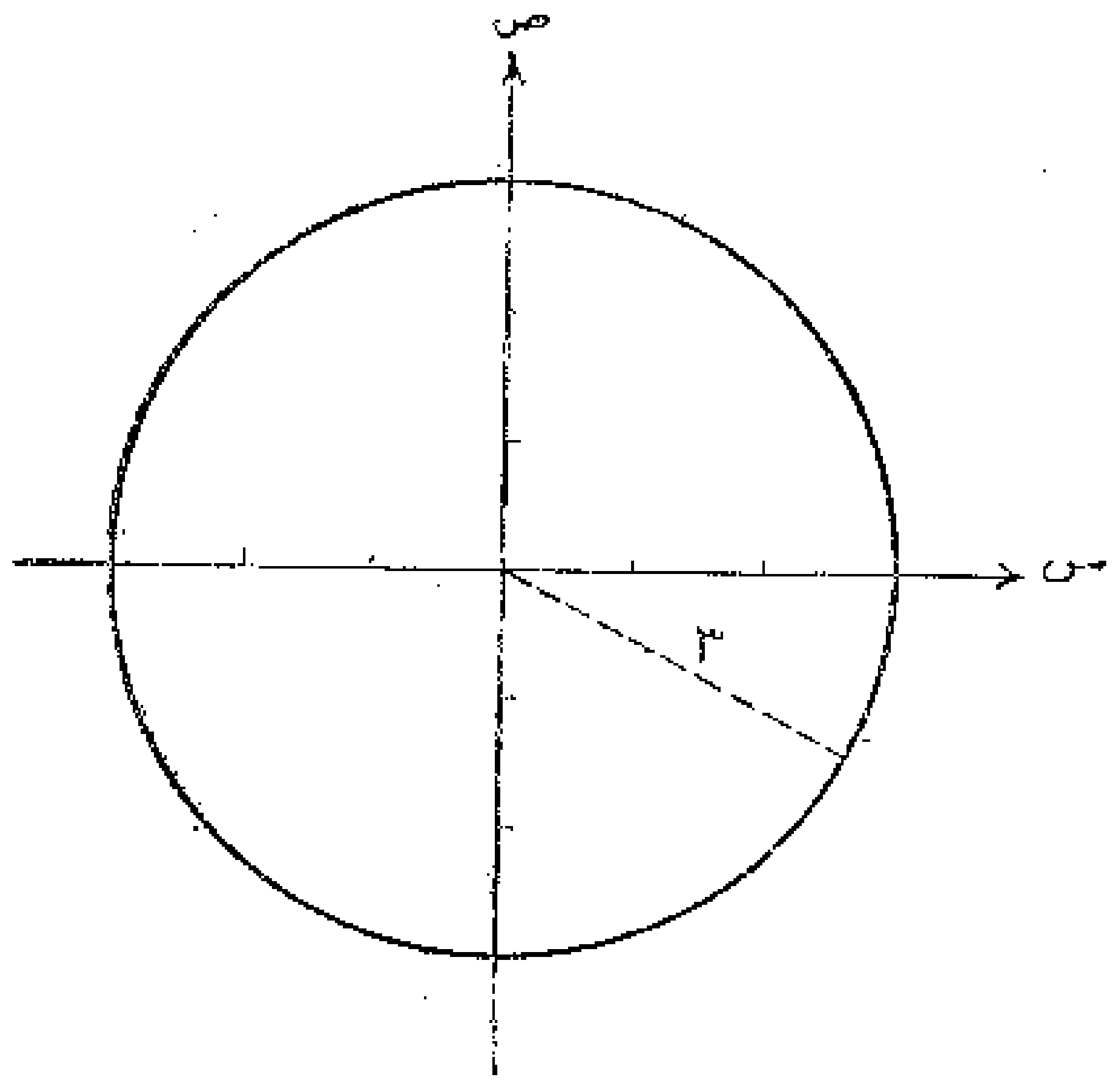
وباستخدام نفس الطريقة الرمزية أى س دلالة على الاحداثى السينى ، ص دلالة على الاحداثى الصادى ، نجد أن المعادلة س٢ + ص٢ = ٩ تمثل دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $\sqrt{٩}$ أى ٣ وحدات .

كما أن المعادلة $س^{٢} - ٨ س + ص^{٢} + ٤ ص + ١١ = ٠$ التي يمكن كتابتها بعد شيء من التمرين فى الجبر على الصورة التالية :

$(س - ٤)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٩$ هى نفس الشكل السابق على

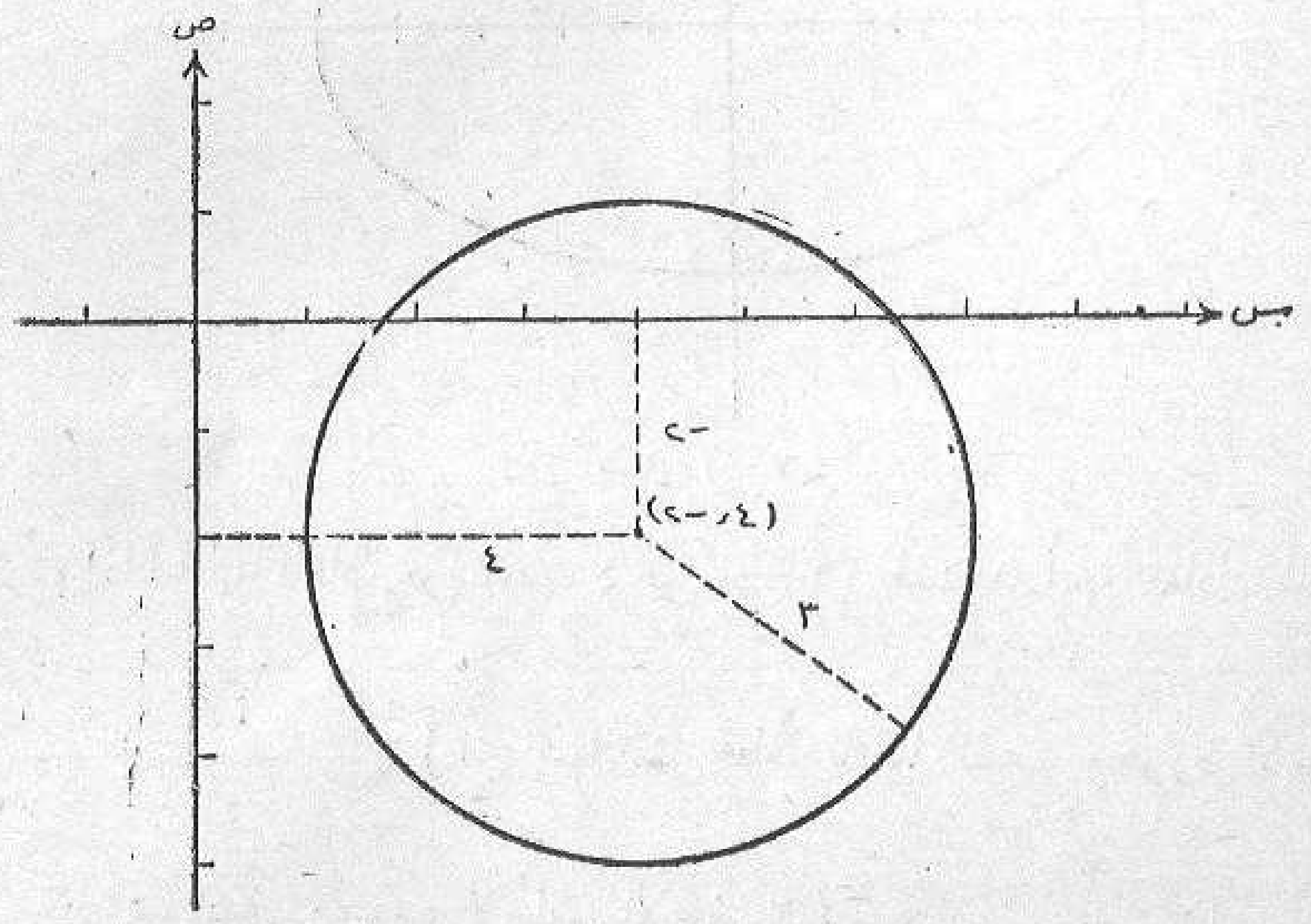


شكل (٦٧)



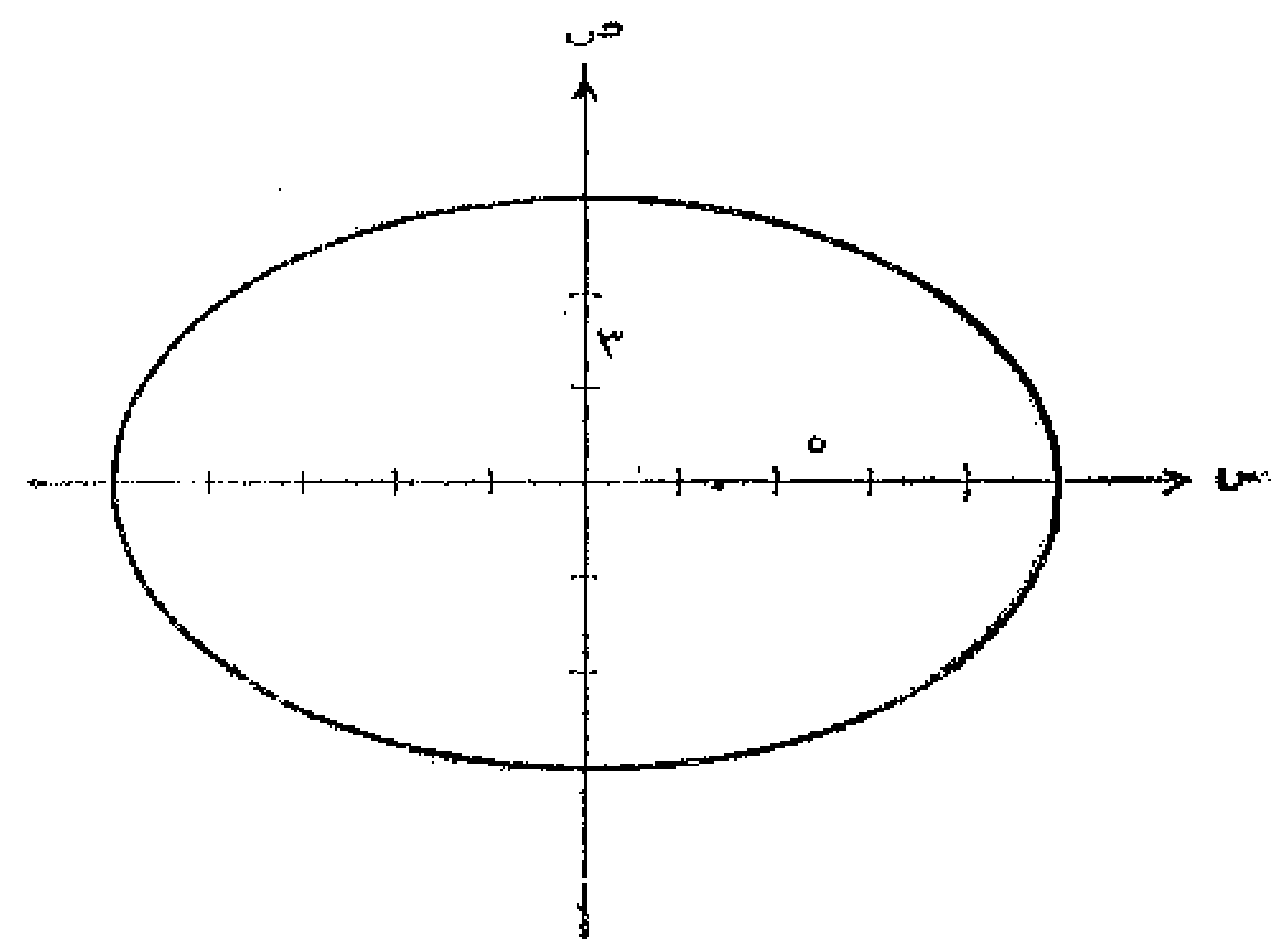
(شكل ٦٨)

أنها تمثل دائرة كما تمثل س ٢ + ص ٢ = ٩ دائرة ، غير أن مركزها هو (٤ ، — ٢) أى النقطة التى أحداثيها السينى + ٤ ، احداثيهما الصادى — ٢ وأن نصف قطرها $\sqrt{٩}$ أى ٣ . (انظر شكل ٦٩) .



شكل (٦٩)

وحالما يرى الرياضى فى يومنا هـذا المعادلة $\frac{س^٢}{٢٥} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$ (تكتب أحيانا على الصورة ٩ س^٢ + ٢٥ ص^٢ = ٢٢٥) فإنه يعرف دون اللجوء إلى الرسم أنها تمثل قطعا ناقصا مركزه نقطة الأصل ونصف محوره الأساس الأكبر $\sqrt{٢٥}$ أى ٥ كما أن نصف محوره الأساسى الأصغر هو $\sqrt{٩}$ أى ٣ وأن محوره الأساسى الأكبر أفقى (ويمكن أن نستخلص من المعادلة حقائق أخرى نتركها الآن خشية التعقيد) ويتضح فى شكل ٧٠ القطع الناقص الذى تمثله هذه المعادلة .



شكل (٧٠)

وإذا أعطينا المعادلة س ٢ + ٤ ص^{٢} = ١٦ فسنجد أنها تعادل المعادلة

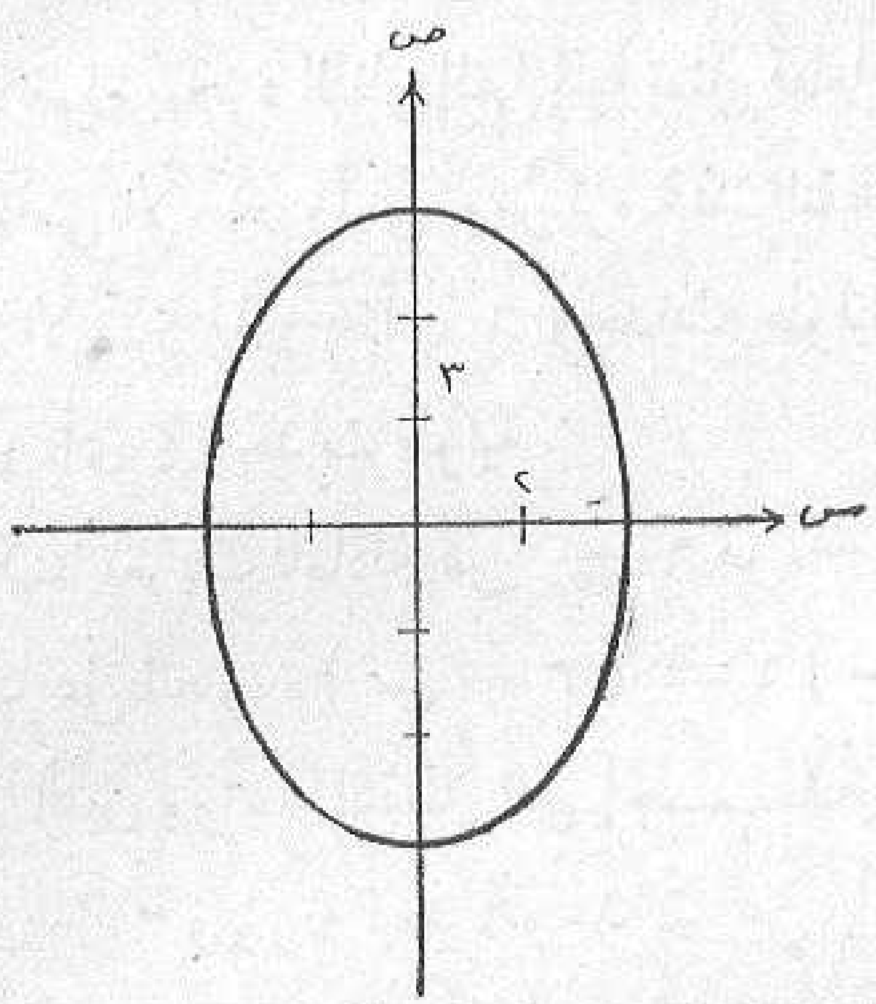
$$\frac{\text{س}^{٢}}{١٦} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٤} = ١$$

(أى إنها تمثل قطعاً ناقصا نصف محوره الأساسى الأكبر ٤ ونصف محوره الأساسى الأصغر ٢).

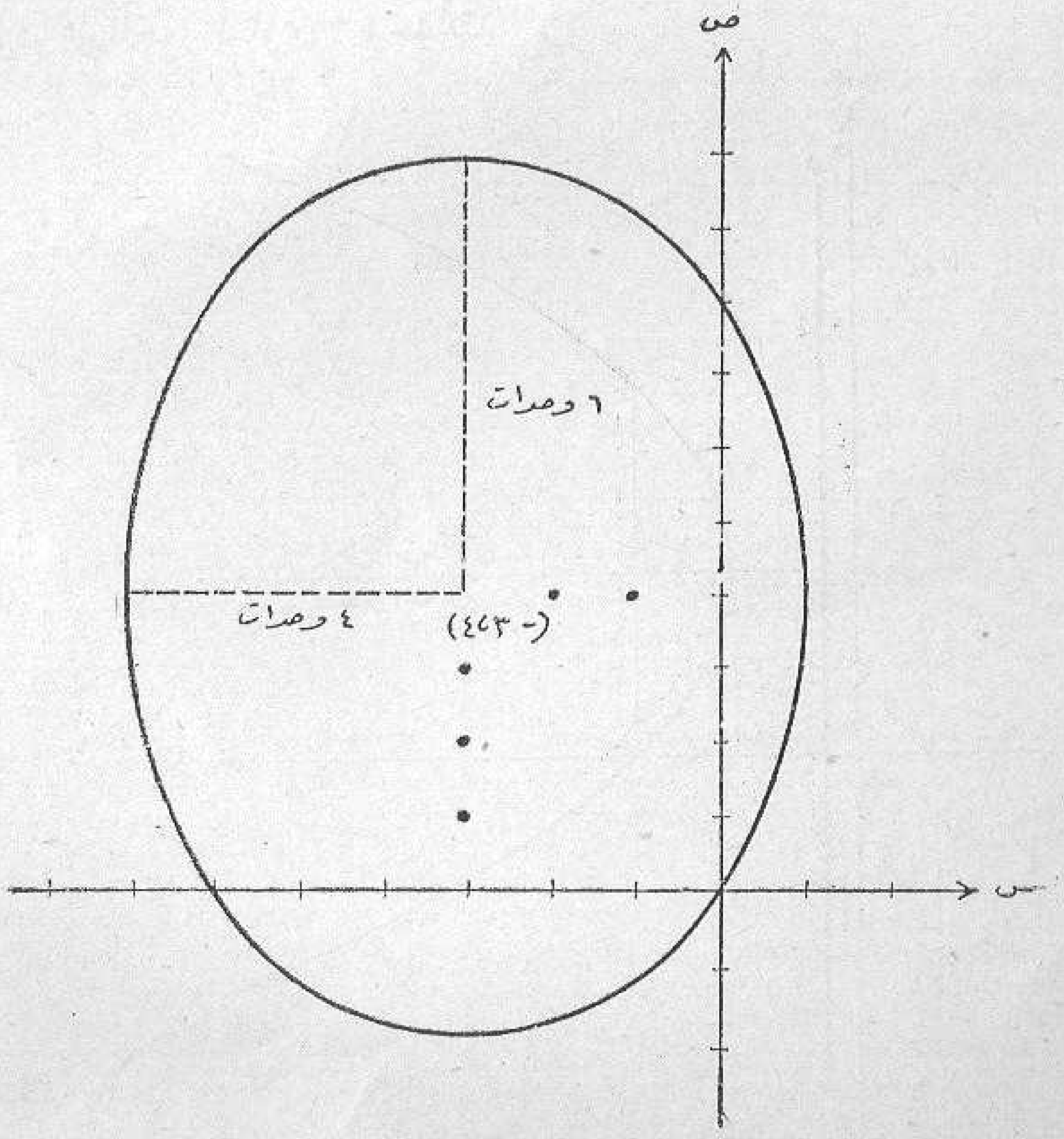
وإذا أعطينا المعادلة ٩ س^{٢} + ٤ ص^{٢} = ٣٦ فنرجعها فى ذهننا إلى الصورة $\frac{\text{س}^{٢}}{٤} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٩} = ١$ ودون رسم نعرف أنها تمثل قطعاً ناقصا مركزه نقطة الأصل ونصف محوره الأساسى الأكبر يساوى $\sqrt{٩}$ أى ٣ وحدة وهو رأسى ونصف محوره الأساسى الأصغر $\sqrt{٤}$ أى ٢ وحدة .

وإذا أعطينا المعادلة ٩ س^{٢} + ٥٤ س + ٤ ص^{٢} − ٣٢ ص + ١ = ٠

فإننا نضعها على الصورة $\frac{(\text{س} + ٣)^{٢}}{١٦} + \frac{(\text{ص} - ٤)^{٢}}{٣٦} = ١$.



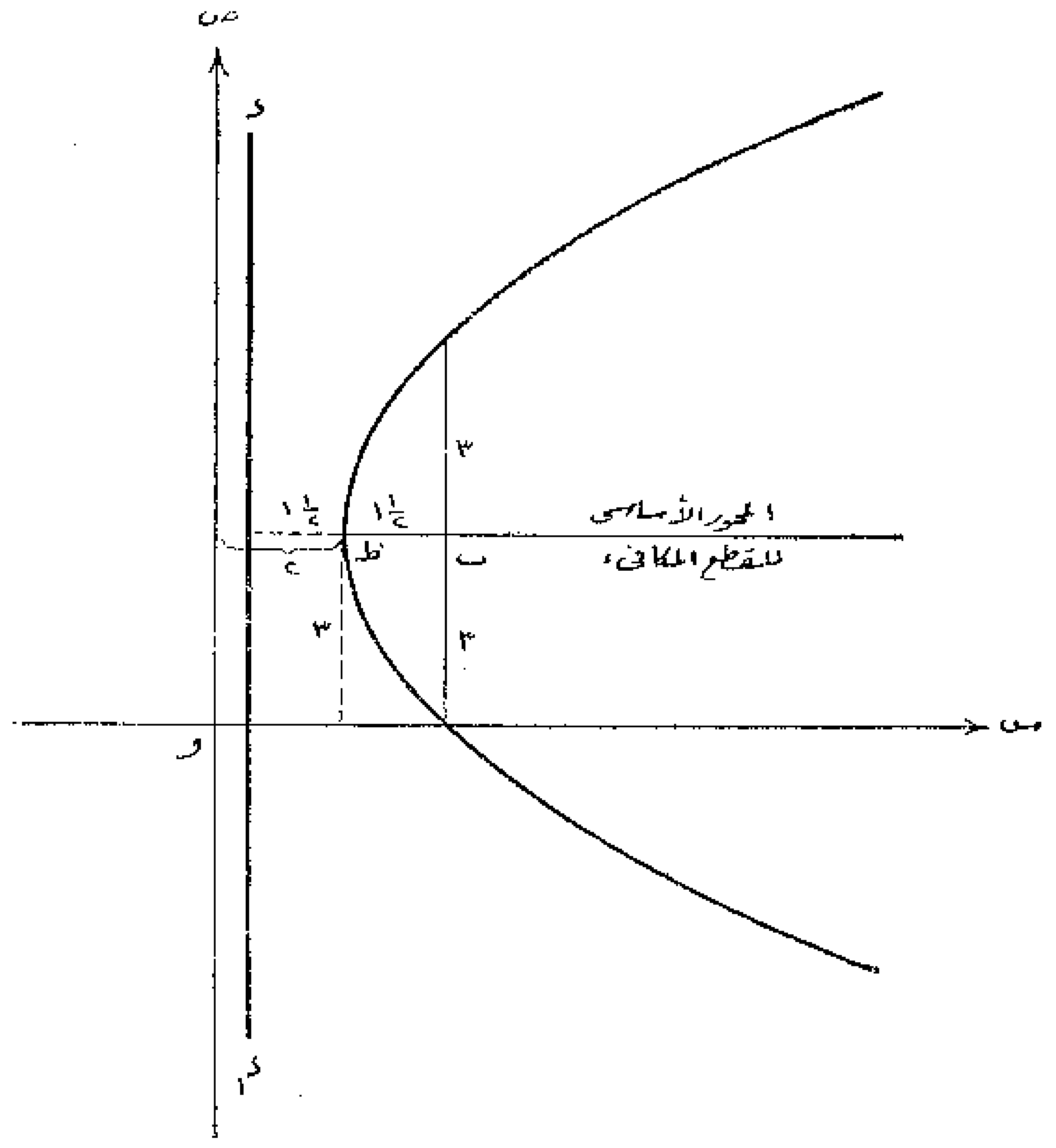
شكل (٧١)



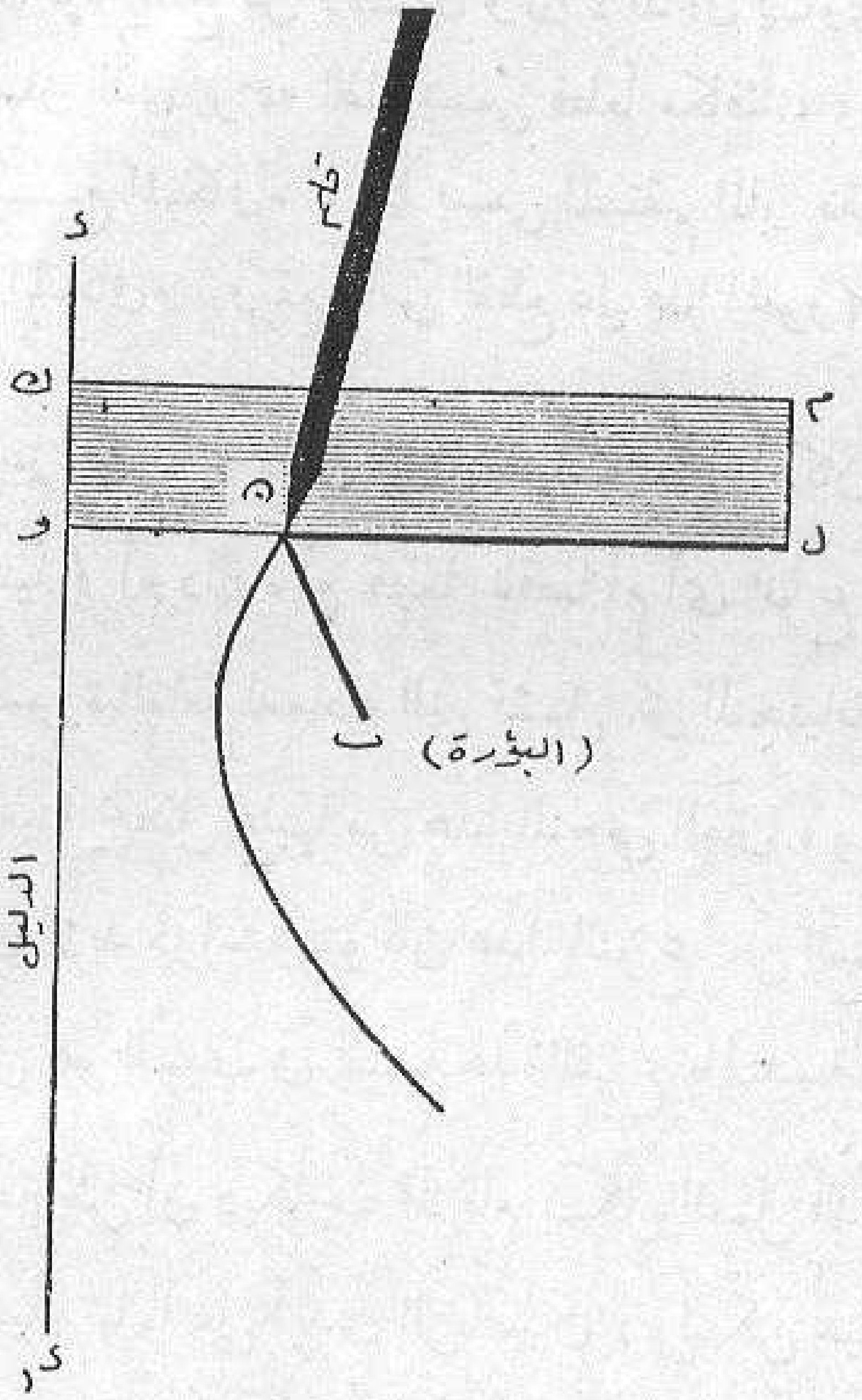
شكل (٧٢)

ونستطيع أن نقول بمجرد النظر إليها إنها تمثل قطعا ناقصا (انظر شكل ٧٢) محوره الأساسى الأكبر رأسى ومركزه عند النقطة (— ٣ ، + ٤) ومحوره الأساسى الأكبر $\sqrt{٣٦}$ أى ٦ وحدات طولية ومحوره الأساسى الأصغر هو $\sqrt{١٦}$ أى ٤ وحدات طولية .

وكذلك يمكننا تعريف المعادلة ص^٢ — ٦ ص — ٦ س + ٢١ = ٠ التى يمكن كتابتها على الصورة (ص — ٣)^٢ = ٦ (س — ٢) بأنها قطع مكافىء فتحته نحو اليمين ورأسه النقطة التى إحداثيها السينى هو + ٢ وإحداثيها الصادى + ٣ وبؤرته تبعد ٦ وحدات عن رأسه (مقيسة على المحور السينى) ، ووتره البؤرى العمودى أو المستقيم الذى يمر بالبؤرة ويكون عموديا على المحور يساوى ٦ وحدات .



شكل (٧٣)



شكل (٧٤)

(القطع المكافىء هو المسار الذى ترسمه نقطة تتحرك بحيث يكون بعدها عن مستقيم ثابت مساويا دائما لبعدها عن نقطة ثابتة ليست واقعة على المستقيم . ولكى تفهم معنى ذلك ارسم مستقيما ى ى١ . خذ نقطة ب وليكن بعدها عن المستقيم = ½ بوصة . خذ كتلة خشبية على شكل متوازى المستطيلات ك و ل م كما فى شكل ٧٤ وضع حرفها الأصغر على المستقيم ى ى١ . ثبت قطعة من الخيط أو الشريط طولها يساوى و ل من أحد طرفيها عند الركن ل ، وثبت الطرف الآخر من الخيط فى ب . حرك الكتلة الخشبية على المستقيم ى ى١ محتفظا بالخيط مشدوداً على و ل بواسطة قلم رصاص تكون سنه فوق الورقة .

وحيث إن طول الخيط يساوى و ل (و ه + ه ل) وحيث إن طول الخيط

هو ب ه + ه ل فإنه ينتج من ذلك أن و ه لابد أن يساوى ه ب أينما كانت سن القلم . هذا المسار الذى يرسمه القلم يسمى قطعاً مكافئاً ، ى ى، يسمى دليله ، نقطة ب بؤرة القطع المكافىء ، كما يسمى المستقيم المار بنقطة ب عموديا على الدليل محور القطع المكافىء ، ويقع رأس القطع على هذا المحور) .

وبالعكس إذا علم أى نوع معين من المنحنيات سواء أكان مستقيما (ويسمى فى هذه الفئة منحنياً) أم دائرة أم قطعا ناقصا أم أى نوع من المنحنى فإن الرياضى يكتب الصورة العامة المعادلة التى تشمل كل المنحنيات من هذا النوع ثم يعرض أبعاداً معينة يحصل عليها من هذا المنحنى المعين ، وبذلك يحصل على معادلة المنحنى الذى يريد دراسته . وكان هذا النوع من العمل أى الوصول من العام إلى الخاص هو السبب فى تسمية هذا الفرع بالهندسة التحليلية .

ولا ينبغى أن نفترض أن ديكارت قد قام بكل العمل الذى بحثناه ، فقد تكونت هذه الأشياء تباعا على أيدى الرياضيين ، ولكن عبقرية ديكارت هى الحجر الأساسى فى جميع التطورات التى أتت بعده ، وعوضا عن دراسة كل شكل هندسى على حدة تقوم الهندسة التحليلية بدراسة المميزات العامة المجردة لمجموعات كاملة من الأشكال الهندسية كما رأينا . إن اختراع ديكارت لم يطور معالجة القطاعات المخروطية التى رأينا عينات منها فحسب بل جعل فى الإمكان معالجة الهندسة التى وضعها الإغريق بطرق جبرية بسيطة .

والآن لاحظ فكرة « النمط » الذى بدأ يظهر فى التعبيرات الجبرية (نمط معين لمعادلة المستقيم ونمط من نوع آخر لمعادلة الدائرة وثالث للقطع الناقص وهكذا) .

هذا النمط (أو التعبير الجبرى الذى يمثله) يلعب دوراً هاماً فى الفروع

العليا من الرياضيات ، وقد أدى بالكثيرين إلى الاعتقاد بأن الرياضيات ليست من اختراع الإنسان بل إنها جزء من مكونات العالم الأزلية .

لم يطبق ديكارت طرقه على المجسمات ، بل قام بذلك آخرون مثل اويلر (١٧٠٣ — ١٧٨٣) ، وفي هذا النوع من الهندسة التحليلية تستخدم ثلاثة إحداثيات كما تستخدم معادلات السطوح ، إذ أننا نعمل في ثلاثة أبعاد .

بعد عشر سنوات من ظهور « الدراسات »(١) منح ملك فرنسا ديكارت — بإيعاز من الكردينال مازاران — معاشا سنويا تقديراً لخدماته ، ولكنه للأسف لم يستمتع به غير سنتين ، ففي عام ١٦٤٩ دعته الملكة كرستينا ملكة السويد وابنة جوستافوس أدولفوس لأن ينضم إلى رجال بلاطها ، وكانت الملكة قد أثارت حولها غمامة من عدم الرضا بخروجها على التقاليد وحتى تستعيد شيئا من احترام حاشيتها وشعبها دعت الكتاب مثل جروتيوس Grotius والفلاسفة مثل ديكارت إلى بلاطها ، كما أنها أرادت تقليد نبلاء فرنسا في الاستماع إلى مناقشات الفلاسفة .

وبعد شيء من التردد قبل ديكارت الدعوة ، فقد كان يعجب بالملوك ، وذهب إلى تلك البلاد الباردة في بارجة حربية أرسلت خصيصا لنقله إلى السويد ولم يكن يعرف ما خبأه له القدر ، فقد أمرته الملكة بتعليمها الفلسفة في الساعة الخامسة صباحا ! وكانت النتيجة أنه أصيب بالتهاب رئوى ، وتوفي بعد عشرة أيام من وصوله إلى السويد ، وبعد ستة عشر عاما من وفاته أي في عام ١٦٦٦ نقلت رفاته لتدفن في باريس .

---

(1) Discourse

أثبت ديكارت أنه فى حالة أى منحنى يمكن إثبات وجود علاقة بين إحداثيى نقطة واقعة على المنحنى ، فمثلا فى حالة منحنى معين يمكن أن يساوى الاحداثى السينى ⅓ الاحداثى الصادى ، أو كما نقول بلغتنا اليوم إذا كانت س تمثل الاحداثى الصادى فإن ص = ٣ س .

وفى حالة أخرى قد نعبر عن العلاقة هكذا : ص = ٣ س + ٢ ومعناها أنه لأى نقطة على المنحنى تكون قيمة الإحداثى الصادى أكبر من ثلاثة أمثال الاحداثى السينى عند هذه النقطة بمقدار ٢ .

وفى حالة ثالثة إذا أضيف مربع الاحداثى السينى إلى مربع الاحداثى الصادى لكان المجموع يساوى ٩ وهكذا .

كيف استطاع ديكارت التعبير عن هذه العلاقات (تذكر أننا استخدمنا فكرته فعلا فى محاولة إيضاح العبارتين الأوليين من العبارات الثلاث السابقة).

وقد قال « فكرت أنه حتى أحتفظ بها جميعا فى ذاكرتى أو حتى أضمن مجموعة كبيرة منها بعضها مع بعض على أن أعبر عنها بحروف معينة فى أقصر عبارة ». فماذا كان يعنى حين قال « حروف معينة فى أقصر عبارة »؟ . كان يرمى إلى التعبير الرمزى فى الجبر الذى كان يجرى إعداده فى تلك الأيام كما سبق أن أوضحنا فى الباب الثالث ، وبجعل س تمثل الاحداثى السينى ، ص تمثل الاحداثى الصادى أمكنه أن يعبر عن العلاقات مثل : ص = س ، ص = ٢ س ، ص = ٢ س + ٣. ويستطيع القارئ الذى نسى معلوماته فى الهندسة التحليلية أن يتذكر أن كلا من هذه المعادلات يمثل مستقيما . إذا استخدم قطعة من الورق المربعات ورسم محورين متعامدين واختار قيمتين من قيم س فى كل معادلة

وقامت مشادة بين ديكارت وفرمات ، وكانت المشادة الوحيدة التى سجلها التاريخ على هذا المحامى الدمث الخلق .

كان فرمات كغيره من هواة الرياضيات مولعا بنظرية تبدو للسطحيين عديمة النفع ، وهى نظرية الأعداد ، وكانت تعتبر موضوعاً هاما بالنسبة للاغريق القدامى . وهذه البحوث فى خصائص الأعداد تبعد كل البعد عن العقم وعدم النفع ، فقد أدت إلى تنمية كثير من الطرق الهامة فى الفروع « العملية » من الرياضيات ، وكان نوع المسألة التى تستهوى فرمات هو البحث فيما إذا كان يمكن التعبير عن العـــدد الفردى الأولى ه (العدد الفردى ه هو العدد الذى لايقبل القسمة إلا على نفسه والواحد الصحيح) كفرق بين مربعى عددين صحيحين بأكثر من طريقة واحدة . ووجد فرمات أنه لايوجد سوى طريقة واحدة لإجراء هذه العملية وهى عندما تكون قيمتا العـــــــددين هما $\frac{ه+١}{٢}$ ، $\frac{ه-١}{٢}$ (مثال ذلك هل يمكن التعبير عن العدد ١١ كفرق بين مربعين بطريقة أخرى غير $٦^٢ - ٥^٢$ ؟)

وكان ضمن المسائل التى حلها فرمات إثبات أنه إذا كانت ا ، ب ، حـ أعداداً صحيحة وكان $ا^٢ + ب^٢ = حـ^٢$ فإن ا ب لا يمكن أن تكون مربعا . ومن نظرياته أنه إذا كانت ه أى عدد ، م أى عـــدد أولى فإن ($ه^م - ه$) تقبل القسمة على م .

وقد رأينا فى حديثنا عن ديوفانتس فى الفصل الثالث أن فرمات درس كتابه « علم الأعداد » . وكان من عادة هذا المحامى الفرنسى أن يدون

مذكراته فى هامش كتبه ، ولضيق المكان كان يكتفى بوضـــع النتائج ال
وصل إليها دون كتابة الخطوات التى أدت إلى هذه النتائج . ومن المسائل ال
دونها بهذه الطريقة ولم نجد لها حلا رغم محاولات الرياضيين على مر العصور ه
المسألة الآتية : إذا كانت ن عددا يزيد على ٢ فإنه لا يمكن إيجاد أعداد صحيح
مثل ا ، ب ، حـ تربطها العلاقة $\text{ا}^{\text{ن}} + \text{ب}^{\text{ن}} = \text{ح}^{\text{ن}}$ وأضاف فرمات أ
وجد حلا بديعا لهذه المسألة ، ولكن هامش الصفحة حال دون كتابته .

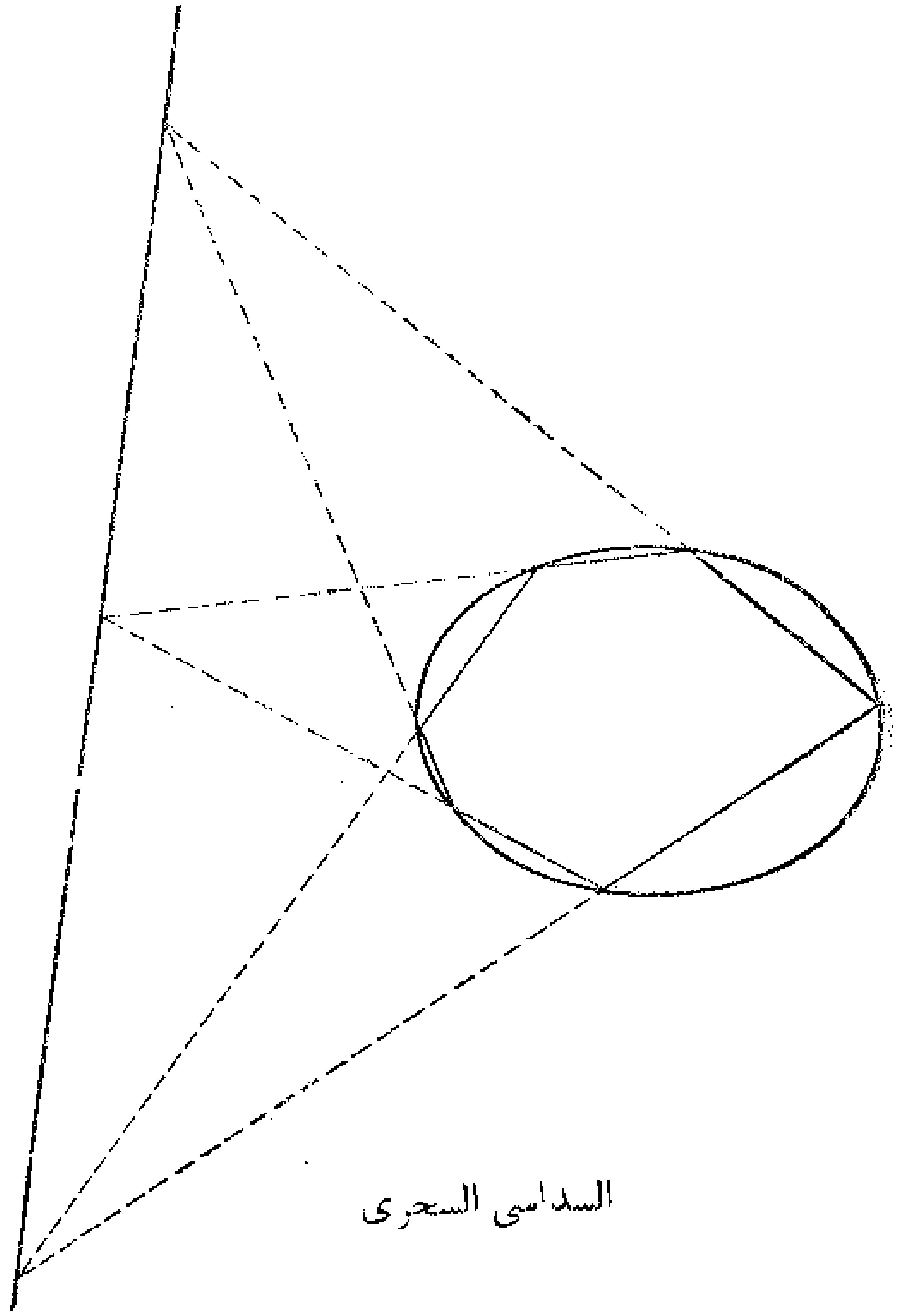
ويشترك فرمات مع بسكال — كما سنرى قريبا — فى بنـــاء أساسيا
نظرية الاحتمالات .وفى ١٦٢٣ ــ وكان ديكارت إذ ذاك فى السابعة والعشرين
ولد بليز بسكال Blaise Pascal فى كليرمونت فيراند فى فرنسا ، وكان أبو
قاضى البلدة ، ثم انتقل إلى باريس بعد ذلك بسبع سنوات وتوفيت والدته وه
فى الرابعة من عمره ، وخاف أبوه من إجهاد ابنه الوحيد فلم يرسله إلى المدرسة
بل علمـــه بالمنزل تحت إشرافه . وخوفا من الإجهاد الذهنى أمر بأن تقتص
دراسته على اللغات دون التعرض للرياضيات . وكان من البديهى أن يثير ذلك
فضول الصبى، فلما سمع وهو فى الثامنة عشرة من عمره أن الهندسة هى علم إنش
الأشكال وإيجاد النسب بين أجزائها المختلفة اكتشف لنفسه عدة حقائ
هندسية منها أن مجموع زوايا المثلث يساوى قائمتين . وقيل إنه اكتشف ه
الحقيقة بقطع مثلث وتطبيق رؤوسه بحيث تقابلت جميعها على الضلع الأكبر
ولم يكن هذا برهانا رياضياً إلا أنه يبين ذكاء متوقدا وقدرة ، ولما سمع أبو
بما حدث أعطاه نسخة من «أصول» إقليدس والتهم الصبى الكتاب واستوع
وهو فى الثانية عشرة ، وبعد ذلك بسنتين سمح له بحضور الاجتماعات الأسبوع
التى كان يعقدها البروفسور روبرفال — وهو الرجل الذى تلقى رسالة فرما

الخاصة باكتشافه الهندسة التحليلية — وتعرف بسكال بالبروفسور ميدورج الذى علم ديكارت حبه للرياضيات وغيرهما من الرياضيين المرموقين ، وتمخضت هذه الاجتماعات الأسبوعية عن الأكاديمية الفرنسية عام ١٦٦٦ التى تكونت بعد اعتماد تشارلس الثانى تكوين الجمعية الملكية بلندن بست سنوات .

ومما يثبت ألمعية بسكال أنه وهو فى السادسة عشرة من عمره ألف كتاباً عن القطاعات المخروطية ، وكان من الإبداع بحيث رفض ديكارت أن يصدق أن مؤلفه صبى فى السادسة عشرة . ولم ينشر الكتاب بل فقد ولكن ليبنتز رآه وتكلم عن محتوياته . ونشر بسكال كتابه عن القطاعات المخروطية عام ١٦٤٠ ولم يكن علاجه للموضوعات أكثر تقـــدما من علاج الإغريق فى عصر أبولونيوس . وقد قام الكتاب على أساس من « الهندسة الإسقاطية » التى أدخلها جيرار ديزارج Gérard Desargues المهندس المعمارى قبل ذلك بعدة سنوات وتأثر بها ديكارت وبسكال لدرجة كبيرة . ويستطيع القارىء العام أن يكون فكرة عن مبادىء هذا النوع من الهندسة إذا عمل لنفسه مخروطاً (تاركا فتحة صغيرة برأس المخروط) ووضع داخله أى قطاع مخروطى (مثلا قطعا ناقصا أو مكافئا من الورق) فى وضعه الطبيعى . فإذا نظر إلى القطاع من خلال الثقب الذى برأس المخروط لرأى دائرة . ومن هنا نشأة فكرة معالجة ديزارج وبسكال للقطاعات المخروطية على أنها مساقط دوائر .

ويقال إن بسكال استنتج أربعمائة نظرية عن القطاعات المخروطية — ضمنها النظريات التى اكتشفها أبولونيوس — عن طريق نظرية تعرف باسم « السداسى السحرى » .

أثبت بسكال أنه إذا رسم أى شكل سداسى داخل قطاع مخروطى فإن نقط تقاطع أزواج الأضلاع المتقابلة الثلاث تقع جميعها على مستقيم واحد .



السداسى السحرى

شكل (٧٥)

ومنذ بلغ السابعة عشر إلى حين وفاته بعد ذلك باثنتين وعشرين سنة لم يمر على بسكال يوم إلا وهو يتألم صحياً ، فقد أغدقت عليه الطبيعة آلاما جسمانية بقدر ما أغدقت عليه من ذكاء ، فكان يعانى من آلام بالأمعاء ، وأحيانا

من شلل جزئي ، وعلى الرغم من هذه المصاعب التي لازمته في حياته القصيرة (توفى وهو في التاسعة والثلاثين) فقد خلد اسمه بين الرياضيين ، كما كسب شهرة أكثر خلودا وأوسع مدى في عالم الأدب . واستحثه ديكارت مرة على السير في نهجه والبقاء في فراشه صباحا إلى ساعة متأخرة ولكن هذا الضرب من تكريم الجسد لم يرق رجلا قلقا بطبيعته مثل بسكال ، فعمل بشدة طوال مدة مرضه وبدون انقطاع وكان ضميره معذبا — في السنوات الأخيرة من حياته — بسبب ما كان يتصور من التضارب القائم بين العقل والدين .

لما كان بسكال في السابعة عشرة اضطر أبوه إلى الاختفاء لأنه كان من التهور بحيث إنه ناقش تصرفات الكردينال ريشيليو بشأن تخفيض أرباح سندات مدينة باريس التي كان بسكال الأب يمتلكها وبفضل مساعي ابنة اخي الكردينال مدام ديجويون لم يكتف الكردينال بالعفو عن والد بسكال ، بل زاد على ذلك أن قلده منصباً مرموقاً في روان ، وهكذا رحلت أسرة بسكال المكونة من الأب وابنتيه جاكلين وجلبرت وأبنه الوحيد بسكال الأصغر إلى روان ، وهنا أخذ بسكال يسلي نفسه بعمل أول آلة حاسبة ، ثم وقع حادث كان له أثره في حياة بليز بسكال وشقيقته جاكلين على الأقل ، فقد وقعت أسرة بسكال تحت تأثير الجانسيين أي أتباع جانسين أسقف أيبر السابق ببلجيكا .

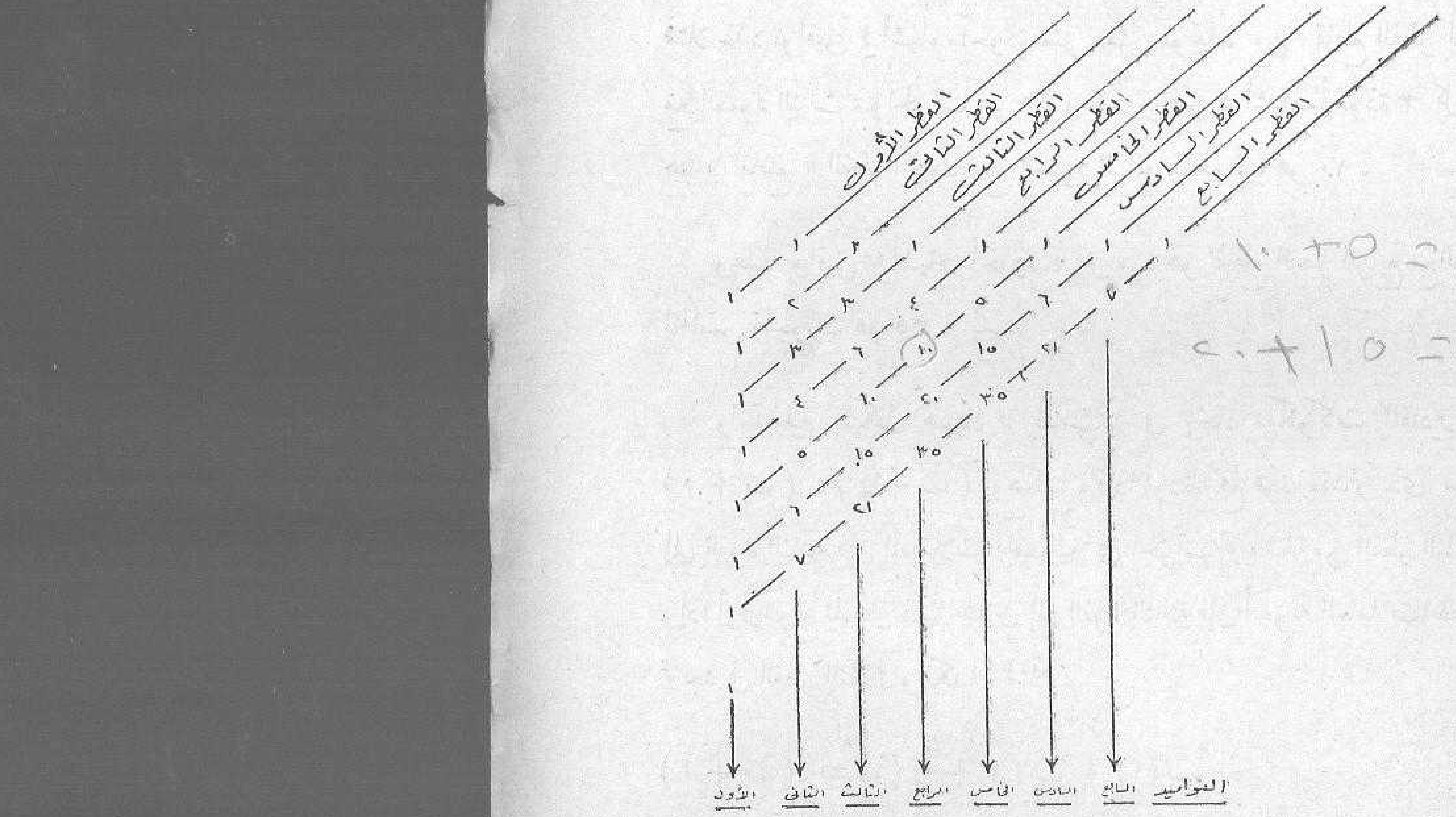
وفي عام ١٦٤٠ بعد وفاة الأسقف بسنتين نشر كتابه العظيم عن القديس أوغسطين ، وكان الكتاب قد استغرق في كتابته عشرين عاماً ، وفيه هاجم الأسقف اليسوعيين الذين ردوا هجومه باضطهاد أتباعه الذين ظلوا تحت لواء روما غير أنهم أنكروا بعد ذلك قدسية البابا ، وظل شعور بسكال نحو المسائل الدينية كما كان يفسرها أتباع جانسين فترا ، فقد أخذ اهتمامه بالتجارب العلمية

يأخذ طابعاً علمياً عميقاً لاسيا فيما يختص بالبارومتر ، وبدأ يهتم بالاحتمالات الرياضية وهى فرع الرياضيات الذى نال أكبر قسط من جهوده .

وعادت أسرة بسكال إلى باريس عام ١٦٤٧ لتتركها مرة أخرى فى السنة التالية إلى كليرمونت ، وفى السنتين اللتين أمضاها فى كليرمونت شاع أنه وقع فى حبائل « متعاملة حسناء » كان يرى كثيراً فى صحبتها ولكن أخبارها انقطعت بعد عام ١٦٥٠ حين عادت الأسرة إلى باريس مرة أخرى ، وفى السنة التالية توفى أتيين بسكال أى الوالد ، ودخلت جاكلين دير بورت رويال ، وهو دير للراهبات فى باريس وله صلة بسميه الشهير الذى يقع على بعد ثمانية أميال خارج فرساى .

وفى ذلك الحين وضع بسكال وفرمات أسس فرع جديد من الرياضيات ، وقد نشأ هذا الفرع من مشكل فى الميسر أرسله المقامر المعروف الشڤالييه دى ميريه إلى بسكال ، وحل بسكال المسألة ثم طلب من فرمات أن يحلها هو أيضاً . واتفق الجوابان ، إلا أن البرهان اختلف . وكانت نتيجة المناقشة التى دارت بين بسكال وفرمات فى الموضوع ظهور فكرة الاحتمالات الرياضية . واليوم قد نما هذا الوليد الذى ولد على مائدة الميسر وأصبح عضواً هاماً وقوراً فى أسرة الرياضيات ، وهو أساسى فى عمليات العوائد والتأمين وفى جميع الإحصائيات الرياضية وبعض الفروع الطبية الحديثـــــة ، وفى مسائل الاحتمالات استخدم بسكال الترتيبات أو التوافيق . وتوفيقه مجموعة من الأشياء فى الرياضيات هى مجموعة لكل أو بعض هذه الأشياء دون اعتبار النظام الذى ترتب به الأشياء داخل المجموعة . واليوم عندنا قانون بسيط يمكننا من إيجاد عدد التوافيق لعشرة أشياء مثلا مأخوذة أربعة أربعة ، ولكن بسكال لم تكن عنده هذه

الإمكانيت ، بل إنه قد اكتشف بطريقة شيطانية أنه لو استخدم « نموذج » الأعداد المعروف باسم « مثلث الأعداد » لاستطاع بمجرد النظر إليه إيجاد عدد التوافيق المطلوبة ، ويعرف هذا المثلث فى يومنا هذا « بمثلث بسكال » ولو لم يكن بسكال مخترعه . تكتب بعض الأعداد كما هو واضح فى شكل ٧٦ .



شكل (٧٦)

وطريقة استخدام مثلث بسكال كما يلى :

متى وضعنا الأعداد ١ فى الصف الأول وفى العمود الأول نملأ أى مكان خال بعدد نحصل عليه من إيجاد مجموع العدد الذى يقع فوق هذا المكان

الخالى والواقع عن يساره . وعليه فالعدد الذى يملأ المكان الخالى عن يمين ٧ فى الصف التالى هو ٨ ، والعدد الذى يقع تحت ٧ هو ٢٨ .

والعمل الجليل الذى قام به بسكال هو أنه اكتشف أنه باستخدام الأقطار والأعمدة يمكن إيجاد أجوبة المسائل التى تتعلق بهذه المجموعات أو التوافيق ، فمثلا عدد توافيق ٤ أشياء مأخوذة مثنى مثنى نوجده من قاطع القطر الرابع مع العمود الثالث ، والجواب هو ٦ . وعدد توافيق ٥ أشياء مأخوذة ٣ كل مرة هو « تقاطع » القطر الخامس مع العمود الرابع والجواب هو ١٠ .

وعدد توافيق ٧ أشياء مأخوذة ٤ كل مرة هو تقاطع القطر الرابع مع العمود الخامس والجواب هو ٣٥ .

واستخدم بسكال هذا « المثلث » فى إيجاد مفكوكات المقادير مثل $(\text{ا} + \text{ب})^{٢}$ ، $(\text{ا} + \text{ب})^{٣}$ وهكذا ، فإذا أردنا رفع قوة مقدار ذى حدين إلى القوة الثانية فإن المعاملات الحسابية فى الجواب نوجدها من القطر الثانى ، وإذا أردنا رفع المقدار ذى الحدين إلى القوة الثالثة فإن أجوبة المعاملات الحسابية توجد فى القطر الثالث وهكذا ، فمثلا :

$$(\text{ا} + \text{ب})^{٢} = (١)\text{ا}^{٢} + ٢\,\text{ا}\,\text{ب} + (١)\text{ب}^{٢}$$

$$(\text{ا} + \text{ب})^{٣} = (١)\text{ا}^{٣} + ٣\,\text{ا}^{٢}\text{ب} + ٣\,\text{ا}\,\text{ب}^{٢} + (١)\text{ب}^{٣}$$

$$(\text{ا} + \text{ب})^{٤} = (١)\text{ا}^{٤} + ٤\,\text{ا}^{٣}\text{ب} + ٦\,\text{ا}^{٢}\text{ب}^{٢} + ٤\,\text{ا}\,\text{ب}^{٣} + (١)\text{ب}^{٤}$$

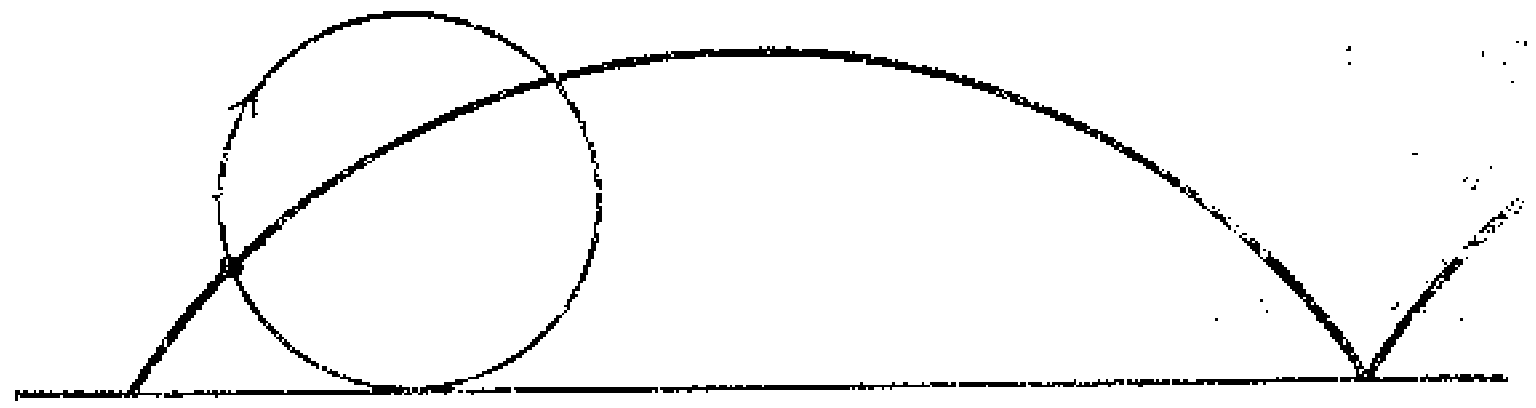
$$(\text{ا} + \text{ب})^{٥} = (١)\text{ا}^{٥} + ٥\,\text{ا}^{٤}\text{ب} + ١٠\,\text{ا}^{٣}\text{ب}^{٢} + ١٠\,\text{ا}^{٢}\text{ب}^{٣} + ٥\,\text{ا}\,\text{ب}^{٤} + (١)\text{ب}^{٥}$$

وبمجرد أن انتهى بسكال من وضع أسس نظرية الاحتمالات طرأ على حياته تغيير كبير ، وباستثناء فترة قصيرة رياضية اتجهت عبقريته اتجاهات جديدة . وفى ٢٣ من نوفمبر عام ١٦٥٤ بينما هو فى عربته فى طريقه إلى نيوللى إذ أجفلت به الخيل ولو لم تنقطع السيور لانقذف فى النهر عندما اندفعت الخيل من فوق الجسر ، واعتقد بسكال أن نجاته من الموت كانت إنذاراً من السماء ، ومنذ تلك اللحظة وهب حياته للدين . ويقال إنه كان يحمل باستمرار ورقة عليها بعض الآيات السماوية وعرفت هذه الورقة « بحجاب بسكال » . ومنذ ذلك العهد كان يتردد على بورت رويال خارج باريس وكان بها دير قديم يرجع عهده إلى عام ١٢٠٤ وكان من أغراضه إيجاد منعزل للعلمانيين الذين يرغبون فى اعتزال العالم إلى حين دون أن يتقيدوا بعهود رهبانية دائمة . كان بسكال فى ذلك الوقت قد بلغ الواحدة والثلاثين وفى بورت رويال تقابل مع أحد أتباع جانسين واسمه أنطوان أرنولد ، وكان هذا عالماً فى الدين وعضواً فى السوربون (كان اسم السوربون يطلق وقتئذ على كلية الدين فى جامعة باريس) وكان أرنولد مكروهاً من الجيزويت لمشايعته لجانسين وقد أقنع الجيزويت السوربون بطرده وحرمانه من درجته فى الدكتوراه . ولما سمع بسكال بقصته ألف الرسائل الثمانى عشرة الأولى من « رسائل مكتوبة إلى ريفى » التى جمعت مع عمل آخر من مؤلفاته ونشرت بعد وفاته تحت اسم « الأفكار[1] » وتعتبر اليوم من أروع القطع فى أدب اللغة الفرنسية ، وتتناول هذه « الأفكار » دفاعاً مجرداً عن أرنولد ، وهجوماً مراً عنيفاً على الجيزويت ، وتتألف « الأفكار » من مذكرات كان قد كتبها وهو يعد مؤلفاً كان يدافع فيه عن المسيحية ،

(1) Pensées.

ولكن صحة بسكال انهارت فى ١٦٥٨ ، وبعد أن قاسى آلاماً مبرحة لبضع سنوات توفى عام ١٦٦٢ عن تسعة وثلاثين عاماً قبل أن يكمل كتابه .

وكان العمل الوحيد الذى قام به بالنسبة للرياضيات بعد « إيمانه » فى نويللى هو ما يتعلق بالدويرى . إذا تدحرجت دائرة على خط مستقيم فإن أى نقطة على هذه الدائرة ترسم منحنى يتكون من سلسلة من الأقواس التى تظهر فى شكل ٧٧ . مثل هذه السلسلة من الأقواس تسمى بالدويرى .



شكل (٧٧)

كان بسكال يئن فى فراشه وقد هجره النوم وعذبه ألم فى ضرسه ، واتجه عقله الذى ركزه طويلا على المسائل الدينية نحو الرياضيات وبدأ يفكر فى هذا المنحنى البديع .

وبعد فترة تنبه إلى أن ألم ضرسه قد زال ، واعتبر أن هذه علامة أتته من السماء تنبئه بأنه لم يرتكب جرماً بالتفكير فى الرياضيات .

فعاد إلى حبه الأول لها لمدة ثمانية أيام حل فيها كثيراً من المسائل المتعلقة بهذا المنحنى وبسطح وجسم المجسم الذى يتولد إذا دار حول محوره أو حول قاعدته أو حول مماس عند رأسه . وفى ذلك استخدم « اللامنقسمات » التى فكر فيها كافاليرى والتى سندرسها فيما بعد . من غرائب الحقائق عن الدويرى أن

المساحة المحصورة تحت أى « قوس » تساوى تمـــاماً ثلاثة أمثال مساحة الدائرة ، وأن طول المنحنى فى كل « قوس » يساوى تماماً أربعة أمثال قطر الدائرة . وإذا قلبت « قوس » الدويرى (مثل السلطانية) فإن الزمن اللازم للجسم لأن ينزلق إلى أسفل نقطة على المنحنى يكون ثابتاً . ولذا فإن الدويرى يعرف « بخط الزمن الثابت » . لم تكتشف هذه الحقيقة حتى عام ١٦٧٣ حين بين العالم الهولندى هويجنز كيف يمكن تطبيق هذه الخاصية للدويرى على الساعة « البندولية » التى اخترعها هو .

من العبث أن نتكهن بما كان يحتمل أن تنتجه عبقرية بسكال لو أنه تمتع بصحة طيبة ووهب حياته للرياضيات والعلوم . يكفى أن نقول إنه فى أثنـــاء السنوات التى قدمها للرياضيات أسهم بسخاء فى تقدم المادة حتى كسب لنفسه اسماً لا يمحى ضمن رياضيي القرن السابع عشر . ولم يقتصر عمله على وضع أسس نظرية الاحتمالات بل باكتشافه « النموذج » الموجود فى مجموعات معينة من الأعداد ، وفى بعض التعبيرات الرياضية مهد الطريق لتنمية قدر كبير من الدراسات العليا فى الجبر ، وفوق ذلك فإنه فى أثناء الأيام الثمانية الأخيرة التى أمضاها فى حل المسائل المتعلقة بالدويرى ترك التأملات الفلسفية فى ما لا نهاية المجردة ، واتجه بذهنه إلى ما لا نهاية الرياضيات والاستمرار « والنهايات » التى هى أساس التحليل الرياضى .

منذ عهد فيثاغورس إلى القرن السابع عشر كان الرياضيون يعملون قصارى الجهد ليتفادوا استخدام فكرة ما لا نهاية . واقتصرت جهود الإغريق القدامى على بحث الخصائص المحدودة للأشكال الهندسية . أما أرشميدس

وكل عدد فى العمود الأيمن يساوى مجموع مناظره فى عمود اليسار وآخر عدد أضيف فى عمود اليسار هكذا ...

١	١
٣	٢
٧	٥
١٧	١٢
٤١	٢٩
٩٩	٧٠
وهكذا	وهكذا

فإذا قسمنا على التوالى كل عدد من أعداد العمود الأيمن على نظيره فى العمود الأيسر ووضعنا كل زوج من هذه الأعداد المتتالية فى مجموعة مستقلة لرأينا أن الجواب الأول من كل زوج يقل عن أى جواب يليه ، كما أن الجواب الثانى من كل زوج يكون أكبر من أى جواب فى المجموعات التى تلى مجموعته . الجذر التربيعى للعدد ٢ يقع بين كل زوج من الأجوبة ، وكلما نزلنا فى القائمة لاحظنا تقارب الجوابين فى كل زوج من قيمة $\sqrt{٢}$ غير أنه مهما طالت العملية فإن جوابى كل زوج من الأعداد لا يتقاربان بدرجة أنهما ينطبقان . ومهما طالت العملية فكل ما نستطيع قوله هو أن $\sqrt{٢}$ يزيد قليلا عن هذا ويقل قليلا عن ذلك . وباستخدام لغتنا الرياضية نرى أن الجزء العشرى لا يتكرر كما يحدث فى ½ الذى يحتل مكاناً محدداً معروفاً على السلم العددى .

وسنضع علامة ل أمام الأجوبة التى تقل عن الأجوبة التى تليها وعلامة س أمام الأجوبة التى تكبر ما يليها .

$\sqrt{2}$ يقع بين كل زوج من الأجوبة التالية :

ل	١
س	١و٥
ل	١و٤
س	١و٤١٦
ل	١و٤١٣
س	١و٤١٤٢٨

وهكذا إلى ما لا نهاية .

ورغم الذكاء والجهد اللذين استنفدتهما هذه الطريقة إلا أنها لاتفسر سر $\sqrt{2}$. وكما قال الرجل الايرلندى أن قيمتها تقع فى قاع بئر لا قرار لها .

دون شك « قيمة » $\sqrt{2}$ (إن وجدت) تقع فى نقطة ما على المسطرة بين النقطتين المحدودتين على هذا الجهاز أى بين ١و٤١٣ ، ١و٤١٤٢٨ ولو أننا نستطيع وضع عدد لانهائى من النقط أكثر تقاربا بين ١و٤١٣، $\sqrt{2}$ ، بين $\sqrt{2}$ ، ١و٤١٤٢٨ كما رأينا ، وكما وجدنا فى الباب الثالث أن استحالة التعبير بدقة عن $\sqrt{2}$ كعدد هدم وجهة نظر الفيثاغورثيين من حيث إن أى طولين لهما مقياس مشترك . إذا كان طولى المستقيم ا ب هو ٨ بوصات وطول المستقيم حـ ء هو ٢٢ بوصة ، فإنه يمكن تقسيم ا ب بدقة إلى ٤ أجزاء كل منها ٢ بوصة كما يمكن تقسيم حـ ء إلى ١١ جزءا من هذه الأجزاء . ويقال فى هذه الحالة إن ا ب ، حـ ء قياسيان ولكن مهما طالت عملية الانقسام فلا يمكن إيجاد وحدة صغيرة صغراً كافياً نقيس بها القطر م س ، الضلع م ك من مربع م ك س و . وفى هذه الحالة يسمى م س ، م ك « غير قياسيين ».

وقد اضطر الفيثاغورثيون إلى هجر رأيهم الأول فى أن المستقيم أو خط التقسيم يتكون من نقط صغيرة مثل حبات الخرز وكل من هذه الحبات لها كبر محدود وتشابه كل الحبات الأخرى .

وأدى ذلك بهم إلى التفكير فى أن المستقيم يتكون من عدد لا نهائى من النقط التى لا أبعاد لها ، وهنا أيضاً قابلتهم الصعوبات ، فقد وجدوا أنفسهم يتخبطون فى موضوع ما وراء الطبيعة لبارمنيوس — وقد سبق لنا التعرف به على صفحة ١٢٤ وهو القائل بأن المادة (المستقيم مثلا) لا يمكن أن يتجزأ أو تنقسم .

وتبدو نظرية الأعداد سهلة لأول وهلة ولكنها فى الواقع — كما سنرى — غاية فى التعقيد . إنها تندمج فى الآراء الفلسفية قبل أن نفيق لنرى أين وصلنا منها ، لاسيما فى يومنا هذا . فالموضوع الواحد يندمج أو « يذوب » فى الآخر بدرجة يصعب معها التفريق بين الواحد والآخر كما يحدث فى مضلعات أرشميدس (صفحة ٧١) التى تندمج متحولة إلى دائرة إذا زيد عدد أضلاعها إلى مالانهاية (ولكن أرشميدس كان حريصاً فلم يقل هذا) .

وظل السؤال التالى يتردد « هل يمكن اعتبار المستقيم مكوناً من عدد لا نهائى من النقط » ؟ حتى أتت الساعة الحاسمة عندما فكر زينوأف إيليا ، Zeno of Elea تلميذ بارمنيدس، فى متناقضات معينة مازالت ثمان منها موجودة فى كتابات أرسطو وسمبليسيوس Simplicius ولكن أربعاً من هذه المتناقضات كانت كافية لإخافة الرياضيين فأحجموا عن استخدام فكرة مالانهاية حتى القرن السابع عشر حين شعر الرياضيون بحاجتهم إلى تطبيق الرياضيات على

حقائق الزمن والفراغ فتجاهلوا الصعوبات المنطقية وأنشأوا وطوروا حساب التفاضل والتكامل للمقادير المتناهية فى الصغر . ولنذكر أنه حتى عصر النهضة الأوربية كان الرياضيون باستثناء أرشميدس يعتبرون مادتهم ضرباً من التدليل الذهنى البحت القائم على مبادىء لا دخل لها بالمرونة . وقد أثار أنتيفون Antiphon (صفحة ٧٠) سخطاً شديداً حين حاول تربيع الدائرة بطرق « التناقص إلى النهاية » .

وكان الاعتراض على هذه الطريقة هو أن العقل يجتاز الخطوات الأخيرة من الحل قفزاً ، وعليه فقد ادعى الفلاسفة مثل أرسطو ، الذين أتوا قبل إقليدس مباشرة أن طريقة أنتيفون خرجت على المبادىء الهندسية . أما أرسطو نفسه ، فيبدو أنه لم يعترض على فكرة تكون المستقيم من عدد لا نهائى من النقط ، فقد صرح بأن متناقضات زينو — وسندرس إحداها حالا — كانت مغالطات (ولو أنه لم يستطع فضها نهائياً) .

أما رياضيو الإغريق فقد رأوا بوضوح أن تدليل زينو ، هدام بالنسبة للمقادير المتناهية الصغر فاجتنبوها كما يجتنب المرء الطاعون . حتى أرشميدس كان حريصاً على تجنب الفكرة (إلا فى طريقته الخاصة للحصول على فكرة عامة عما يجب أن يحققه البرهان الهندسى الذى يتبع البحوث المبدئية) وفى براهينه المعروفة ، اكتفى بالقول بأنه يمكن أن نجعل الفرق بين مساحتين « صغيراً بقدر ما نشاء » .

ولنعد الآن إلى متناقضات زينو ونكتفى بواحدة منها لإيضاح غرضنا . المتناقضة هى عبارة تبدو سخيفة لأول وهلة ولكنها فى الواقع صحيحة . فلاثبات

أن المستقيم لا يمكن (فى نظره) أن يتكون من عدد لا نهائى من النقط قال إنه لو كان المستقيم كذلك لما أمكن لجسم أن يتحرك بسرعة من اللحاق بجسم آخر يتحرك ببطء . وصور سباقاً بين أشيلليس Achilles وسلحفاة . قال لنفرض أن إشيلليس يجرى بسرعة تعادل عشرة أمثال سرعة السلحفاة ولنفرض أن السلحفاة تتقدمه بألف ياردة . فعندما يقطع أشيلليس ١٠٠٠ ياردة تكون السلحفاة قد قطعت ١٠٠ ياردة ، وبعد أن يقطع أشيلليس الـ ١٠٠ ياردة هذه تكون السلحفاة قد قطعت ١٠ ياردات أى تتقدم عنه ١٠ ياردات أو عندما يقطع هو ١٠ ياردات تكون السلحفاة قد قطعت ياردة واحدة ، وعندما يقطع الرجل هذه الياردة تكون السلحفاة قد قطعت $\frac{1}{10}$ ياردة أى إنها تتقدمه بقدر $\frac{1}{10}$ ياردة .. وهكذا إلى ما لا نهاية ، وعليه فإن أشيلليس لن يلحق بالسلحفاة . إنه يقترب منها وتقل المسافة بينهما ولكنه لن يصل إليها فعلا . وهذه المتناقضة ما زالت تحير الكثيرين ومن بينهم أناس يعرفون أنه يمكن إيجاد مجموع متوالية لا نهائية لأعداد فى متوالية هندسية أساسها أقل من ١ ، وعليه فإن حدودها يقل كل عن سابقه وهكذا « تتجمع » فى قيمة « نهائية » . مجموع مثل هذه المتوالية اللانهائية اللامة هو القانون $\frac{ا}{١ - س}$ حيث ا هى الحد الأول من المتوالية ، س أساسها (الذى يقل عن ١) . وعليه فالمسافة التى يقطعها أشيلليس يمكن أن تمثل « بالمتوالية اللانهائية اللامة » ١٠٠٠ + ١٠٠ + ١٠ + ١ + ... ومجموعها يكون

$\frac{١٠٠٠}{١ - \frac{1}{10}}$ أو $\frac{١٠٠٠٠}{٩}$ أو $\frac{1}{9}$ ١١١١ ياردة ، وبالمثل المسافة التى تقطعها السلحفاه تمثلها المتوالية النهائية اللامة ١٠٠ + ١٠ + ١ + ... ويكون مجموعها بنفس القانون السابق $\frac{1}{9}$ ١١١ ياردة .

وعليه ولو أننا نتعامل مع عدد لانهائى من التقسيمات إلا أننا استطعنا الوصول إلى مجموعها . وهذه المتناقضة التى حيرت الإغريق لم تفسر على الرغم من أننا أثبتنا أننا نستطيع الوصول إلى حل يتفق وحقائق خبرتنا اليومية وهو حل نضعه تحت عنوان « التعقل » وهو غامض ومضلل .

إذا قمنا بعملية تكويم كميات من الرمل كل كمية منها أصغر من سابقتها فإننا نصل أخيراً إلى نقطة حيث تتوقف العملية بإضافة حبة واحدة من الرمل إلى الكومة . وكذلك إذا علقنا وزنا بواسطة قطعة من الخيط بحيث أمكن أن يتذبذب الوزن فإن « البندول » الحادث يتوقف عن الحركة فى لحظة ما . فى حالة الرمل انتهت عملية الإضافة عندما وصلنا إلى العدد ١ ، وفى حالة « البندول » استطعنا لحد ما أن نعبر عن الأطوال المتتالية للذبذبات باستخدام كسور وحدة الطول . مفهومنا « للأعداد » يسمح لنا بتصور إضافات لاتنتهى من كسور الوحدة . وليس كما فى حاله الحبة الأخيرة من الرمل أى الوحدة ، بل إننا نستطيع إضافة $\frac{١}{١٠}$ الوحدة ، $\frac{١}{١٠٠}$ من الوحدة ، $\frac{١}{١٠٠٠}$ من الوحدة . . . . أو أى سلسلة من كسور الوحدة التى تتناقص كل عن سابقتها . فهل يرجع ذلك إلى أن نظامنا العددى غير كاف لترجمة الحقائق التى تقع فى الزمن والفراغ . أم هو راجع كما يقول أفلاطون إلى أن ما نعتبره نحن حقيقة هو فى الواقع ظل للحقيقة ؟ هل الرياضيات مجرد اختراع مشوه من صنع الإنسان صنعه ليفسر ما يعتبره معظمنا « الحقيقة » . أم هل يجدر بنا أن نضع الرياضيات فى فئة الظواهر الطبيعية كالجاذبية والضوء الكائنة قبل ظهور الإنسان على وجه الأرض ؟ بعبارة أخرى هل اكتشف الإنسان الرياضيات أم ابتدعها ؟

لقد صرح برتراند رسل Bertrand Russell أكبر رياضي وفلاسفة العصر الحاضر وأكثرهم تعمقاً بأن مناقشات زينو « المتعمقة البالغة اللولبية » مازالت تحير أفكار الشخص العادى . وحتى التدليل المعقد الذى تقدم به ديديكند Dedekind (١٨٣١ — ١٩١٦) وكانتور Cantor (١٨٤٥ — ١٩١٨) ورسل (١٨٧٢ —) فى جهودهم العظيمة نحو التغلب على مشكلات التناقض المتعلقة باللانهاية التى أوقعنا فيها مفهومنا للأعداد خالق متناقضات جديدة . هذه المناقشات عميقة ومعقدة وبعيدة عن مستوى هذا الكتاب والقارئ الذى لا يعرفها ويرغب فى المزيد منها أن يبدأ بقراءة كتاب ج . و . أ . يونج J. W. A. Young « أساسيات الجبر والهندسة »(1) ثم يتابع قراءاته بمؤلف ديديكند « مقالات فى نظرية الأعداد » وربما استطاع بعد ذلك تتبع كانتور وأخيراً رسل وهوايتهيد Whitehead فى Principia Mathematica .

ولحسن حظ العلم الحديث والفلك ، أن رياضيى القرن السابع عشر لم يهتموا كثيراً بمتناقضات زينو ، فبتجاهلهم النقص المنطقى فى استخدامهم للكميات المتناهية الصغر أوجدوا طرقا استخدموها فى حالة تغير قيمة كمية تبعاً لقانون مستمر (كما هو الشأن فى تغير معظم الأشياء فى الطبيعة) فاستطاعوا قياس معدل هذه الزيادة أو هذا النقص عند حدوث هذا التغير . وحدث بعد ذلك — كما سنرى — عندما أمكن اجتناب هذه الشوائب فى المنطق أن من الله على الرياضيين والعلماء والمهندسين وفئات أخرى بسلاح رياضى فعال هو حساب تفاضل وتكامل الكميات المتناهية الصغر الذى مكنهم من تفهم أسرار الطبيعة التى ظلت كتابا مغلقا بالنسبة لمن سبقوهم . وكانت هذه

(1) Fundamental Concepts of Algebra and Geometry

المشاكل تتعلق أساساً بالنمو المطرد أو الحركة المستمرة وعليه تضمنت حقولا شاسعة من العلوم والفلك . وكذلك بطريقة عكسية أمكن إيجاد الكمية الأصلية التي تتغير متى علم معدل زيادتها أو نقصها . وفوق ذلك أصبحوا يطبقون قانونا واحدا حل محل الحسابات المطولة الفردية في إيجاد طول المنحنى مثلا أو المساحة المحدودة بالمنحنى وسطح الجسم الصاب وحجمه وما شاكل ذلك من مسائل .

ويتضمن حساب التفاضل والتكامل للكميات المتناهية في الصغر ، التفاضل (كما كان أولا) طريقة حساب الفرق المتناهي في الصغر بين قيم متتالية للكميات الدائمة التغير ، وكذا التكامل الذي نستطيع بواسطته إيجاد كمية متغيرة متى علم معدل تغيرها .

نعود الآن إلى أرشميدس بغية تتبع الجذور التي نبت منها حساب التكامل ، وسنرى كيف قام حساب التفاضل ، وأخيراً كيف ثبت أن التكامل هو عملية عكسية للتفاضل .

كان أول الرياضيين في القرن السابع عشر — الذين اكتسحوا الطريق الذي خشي أرشميدس أن يتحسسه — يسمى بونافنتورا كافاليري Bonaventura Cavalieri وكما كان المنتظر وضعه معاصروه في مصاف الخوارج على الطرق السليمة البعيدة عن المخاطر .

ولد هذا اليسوعي الفذ في ميلانو عام ١٥٩٨ بعد ميلاد ديكارت بسنتين ودرس على يد جاليليو ، وعين عند بلوغه الحادية والثلاثين أستاذاً للرياضيات

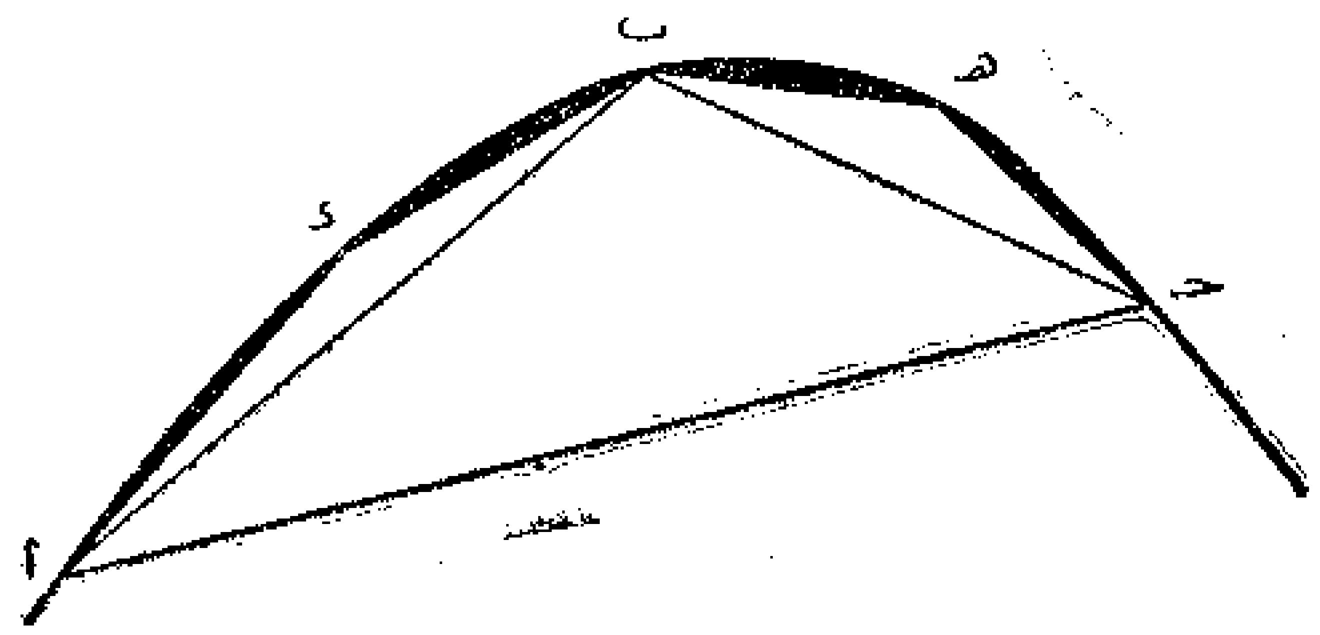
فى بولونيا حيث بقى حتى وفاته عام ١٦٤٧ . وإذا نظرنا إلى عمله لاتضح للذين تتبعوا الصعوبات التى قدمها زينو فى متناقضاته أنه تجاهل عمداً بعض التناقض فى تدليله ، وإنه ليثير الاهتمام حقا معرفة الأسباب التى أدت بهذا العبقرى إلى التعرض للهجوم . ربما كان السبب فى ذلك اقتناعه فى قراره نفسه بأن التفسير الصحيح لمعظم الظواهر الطبيعية هو تداخلها بعضها فى بعض ، ولذا استخدم تدليلا وهو يعلم حق العلم بأنه غير منطقى ، إلا أنه كان يؤدى إلى نتائج صحيحة .

كان قانون « الاستمرار الرياضى » الذى أوصى كپلر بأهميته جذرا نبتت منه أفكار كافالييرى . ويعترف هذا القانون بتداخل شىء فى آخر على الرغم من أننا لانستطيع أن نحدد تماما متى أو كيف ينتهى كيان شىء ويبدأ كيان شىء آخر . تصور مثلا قطاعا مخروطياً على شكل قطع ناقص (انظر شكل ٢٥) بدأ يتأرجح ببطء حتى ظهر على شكل دائرة (انظر شكل ٢٦) فكيف يتغير؟ هل بدفعه مفاجئة ؟ أم هل « يذوب » الخط المحدد للشكل فى خط محدد لشكل آخر دون أن نشعر؟ هل هناك تغير مستمر فى كل حركة وكل نمو ؟ أم هل تتم هذه العمليات عن طريق مجموعات من الدفعات الصغيرة ؟ لاشك فى أن كافالييرى — وهو يدرس طريقة أرشميدس فى حساب محيط الدائرة — أدرك أو شعر بالنمو المستمر فى محيط المضلع الداخلى والانكماش المستمر فى محيط المضلع الخارجى وهما يقتربان من محيط الدائرة . وعوضا عن اتباع طرق أرشميدس المعقدة الملتوية وجد أنه يستطيع الوصول إلى نتائج مشابهة عن طريق فكرة القيم المتناهية الصغر فاستخدمها .

وقد تأثر كافالييرى تأثراً جماً بحلين من حلول أرشميدس . كانا حلين

مختلفين لإيجاد « تربيع معادل » لقطعة من قطع مكافىء « وإيجاد تربيع معادل » يعنى إيجاد مساحة مربع تساوى تماماً مساحة شكل محدود بمنحنى ، وكثيراً ما تم إيجاد هذا المربع بإيجاد مثلث مساحته تساوى مساحة المربع وفى هذه الحالة تعتبر المسألة قد حلت فعلا ، إذ أنه من السهل إنشاء مربع يساوى مثلثاً فى المساحة .

وسندرس أولا الطريقة الهندسية البحتة التى استخدمها أرشميدس لإيجاد مساحة قطعة مكافئة (نسبة إلى القطع المكافىء) . رسم أرشميدس مثلثا ا ب حـ (انظر



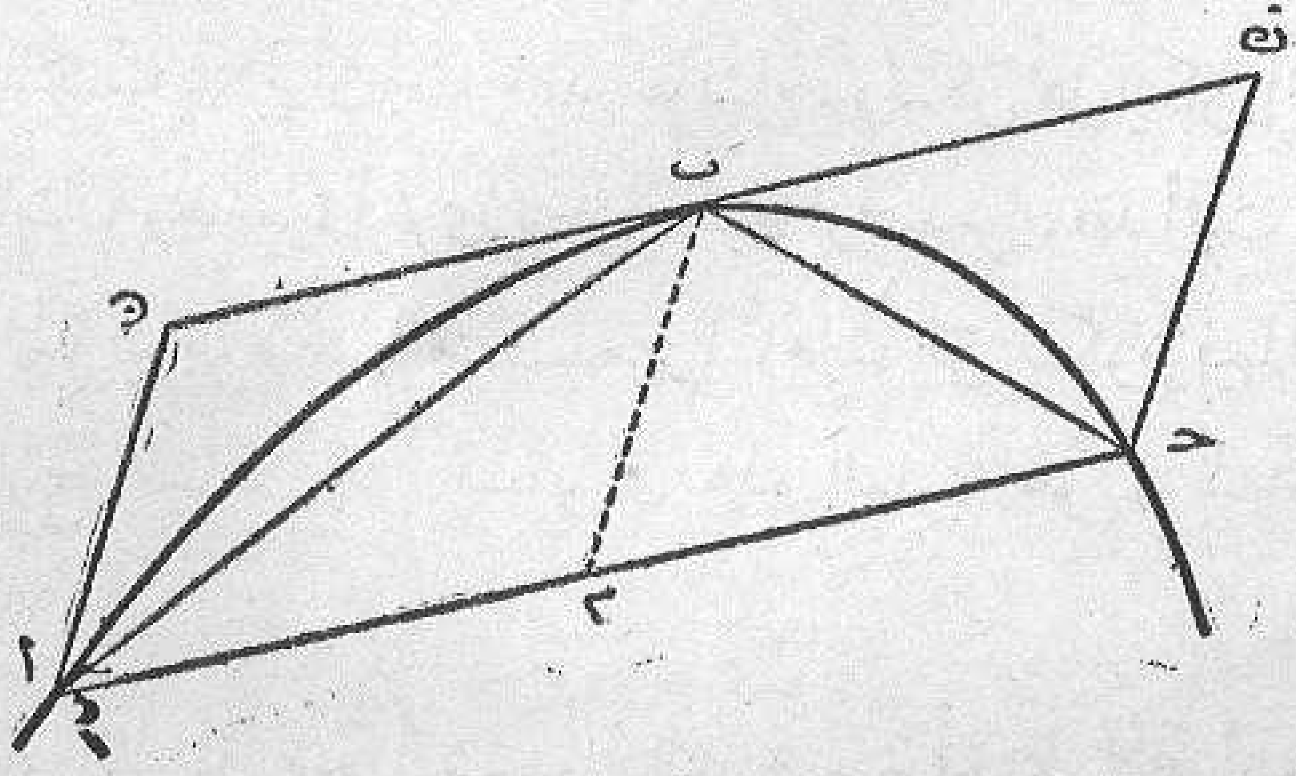
شكل (٧٨)

شكل ٧٨) على قاعدة القطعة المكافئة ا حـ ورأسه ب هى نقطة تماس المنحنى مع المماس المرسوم موازياً للقاعدة ا حـ (المماس لا يظهر فى الشكل) . ثم أثبت أن مساحة القطعة المكافئة تساوى ٤/٣ مساحة المثلث ا ب حـ . ولإثبات ذلك استخدم طريقة « الانتقاص إلى النهاية » أو طريقة « تصغير الفروق » . إلا أنه استخدم طريقة تصغير الفروق هذه فى المساحة من الداخل فقط . رسم أولا المثلثين ا د ب ، ب هـ حـ « بالطريقة المعترف بها » أى إنه وضع الرأس د

عند نقطة تلاقى القطع المكافىء بالمماس الذى يوازى ا ب والرأس هـ عند نقطة تلاقى القطع المكافىء بالمماس الذى يوازى ب حـ . وعالج كلا من هاتين القطعتين المكافئتين الصغيرتين بنفس الطريقة التى عالج بها القطعة المكافئة الأصلية . ثم أثبت أرشميدس عن طريق الهندسة الإقليدية أن :

$$\triangle \text{ ا ء ب} + \triangle \text{ ب هـ حـ} = \tfrac{1}{4} \triangle \text{ ا ب حـ}$$

ثم عاد فكرر العملية الأخيرة بعد رسم المثلثات « بالطريقة المعترف بها » فى كل من القطع المظللة كالتى تراها فى شكل ٧٨ وأثبت أن مجموع مساحاتها هو $\tfrac{1}{4}$ (△ ا ء ب + △ ب هـ حـ) أو $\tfrac{1}{16}$ (△ ا ب حـ) أو بعبارة أخرى $(\tfrac{1}{4})^2$ ا ب حـ ، وادعى أنه إذا تكررت هذه العملية إلى الأبد (تصورا) فإن القطعة المكافئة تقترب بقدر مانشاء إلى « تقليل الفروق » حيث إن فى كل خطوة تتخذ « ينتقص » أكثر من نصف القطعة (أو القطع) الباقية . خذ مثلا الخطوة الأولى التى تتعلق بالمثلث ا ب حـ شكل ٧٩ .



شكل (٧٩)

م هى منتصف ا حـ ، ا ھ ، حـ ك يوازيان م ب ويقابلان المماس عند ك في ھ ، ك .

والآن △ ا م ب = $\frac{1}{2}$ ▱ م ھ

، △ حـ م ب = $\frac{1}{2}$ ▱ م ك

∴ △ ا ب حـ = $\frac{1}{2}$ ▱ ا ك

ولكن ▱ ا ك أكبر من القطعة المكافئة (أى القطعة المحدودة بالقطع المكافىء).

∴ $\frac{1}{2}$ ▱ ا ك أكبر من نصف القطعة المكافئة .

∴ ا ب حـ أكبر من $\frac{1}{2}$ القطعة المكافئة .

ويتبع ذلك أن كل مثلث جديد « ينتقص » أكثر من نصف القطعة المرسوم فيها ، وهكذا أثبت أرشميدس أنه باستمرار عملية « الانتقاص » أو « تقايل الفروق » هذه إلى ما لا نهاية ، فإن الفرق بين مساحة القطعة المكافئة ومجموع المثلثات يمكن أن يصغر بقدر ما نشاء . ولكن هل يمكن إيجاد مجموع هذه المثلثات ؟ وهنا مرة أخرى تتجلى عبقرية أرشميدس ، فقد أثبت هندسياً أن مجموع سلسلة طويلة لا نهاية لهـا من المساحات التى تكون فيها أى مساحة مساوية لربع المساحة التى تسبقها فى هذه السلسلة هو $\frac{4}{3}$ المساحة الأولى من السلسلة .

وبهذه الطريقة صنع أرشميدس التاريخ مرة أخرى لأنه أوجد مجموع ما نسميه المتسلسلة اللانهائية اللازمة .

١ + $\frac{1}{4}$ + ($\frac{1}{4}$)^{2} + ($\frac{1}{4}$)^{3} + ... التى كما سبق ورأينا توجد من القانون $\frac{\text{ا}}{\text{ا} - \text{س}}$ حيث ا = ١ ، س = $\frac{1}{4}$.

ولذا أمكن أرشميدس أن يجد أن مجموع △ ا ب حـ ، $\frac{1}{4}$ △ ا ب حـ ، ($\frac{1}{4}$)^{2} △ ا ب حـ ، ($\frac{1}{4}$)^{3} △ ا ب حـ ..... [أو △ ا ب حـ) ١ + $\frac{1}{4}$ + ($\frac{1}{4}$)^{2} + ($\frac{1}{4}$)^{3} + ...] هو $\frac{4}{3}$ △ ا ب حـ .

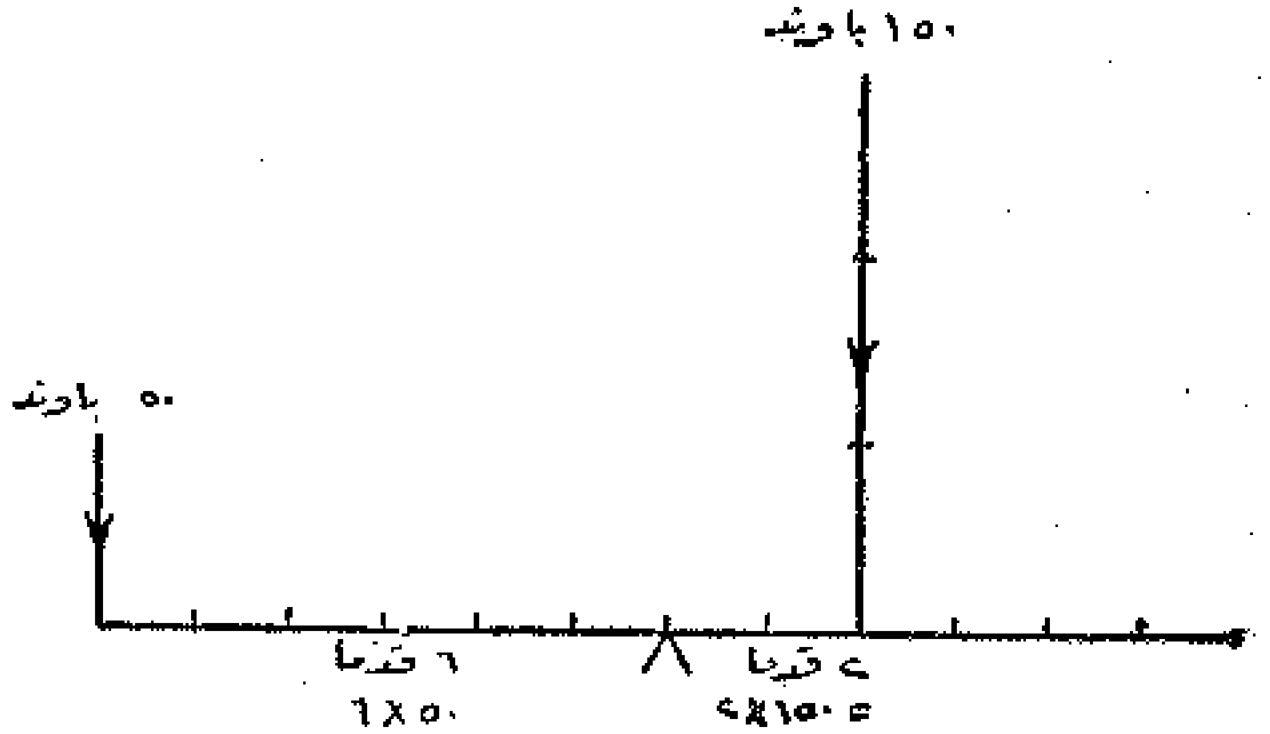
ولاجتناب استخدام فكرة وضع عدد لانهائى من المثلثات « بالطريقة المعترف بها » استخدم أرشميدس طريقة « الاختصار حتى السخف » وهى طريقة كانت شائعة بين الرياضيين الإغريق لإثبات تساوى شيئين . كانوا يقولون مثلا إنه إذا أمكن إثبات أن من السخف أن يكون ا أكبر من ب وكذلك من السخف أن يكون ا أصغر من ب فإنه يتبع ذلك أن ا لا بد أن يساوى ب .

وفى هذه الحالة أثبت أرشميدس أن مساحة القطعة لا يمكن أن تكون أكبر من $\frac{4}{3}$ مساحة المثلث ا ب حـ ، وكذلك لا يمكن أن تكون أصغر من $\frac{4}{3}$ تلك المساحة ، وعليه فمساحة القطعة المكافئة (نسبة إلى القطع المكافىء) تساوى $\frac{4}{3}$ مساحة المثلث الداخل فيها الذى يشترك معها فى القاعدة والارتفاع .

ولندرس طريقة أخرى استخدمها أرشميدس ليصل بها إلى نفس النتيجة ، إذ أنها لعبت دورها فى الإيحاء إلى كافاليرى وغيره من رياضيى القرن السابع عشر بالطرق التى اتبعوها فى تنمية الخطوات الأولى مما يعرف الآن باسم حساب التكامل .

اكتشف دكتور هيبرج Heiberg عام ١٩٠٦ فى استامبول خطاباً كتبه أرشميدس إلى صديقه أراتوثنيس وكان أميناً للمكتبة يخبره فيه عن طريقة البحث أو التحليل التى اتبعها فى حل بعض المسائل المتعلقة بالمساحة والحجم . وقد استخدم معلوماته الغزيرة فى الميكانيكا للوصول إلى فكرة الحل التى يجب أن يتبعها فى برهانه الهندسى ، ونورد هنا نفس كلماته مترجمة عن اليونانية ، « بعض الأشياء تتضح لى عن طريق الميكانيكا أولا ولو أننى مضطر إلى إثباتها هندسياً بعد ذلك ، لأن بحثها عن طريق الميكانيكا لا يعطينى إثباتاً فعلياً لصحتها، ولكن الأمر يصبح أكثر سهولة إذا نحن عرفنا عن طريق الميكانيكا بعض المعلومات عن الموضوع ونوع الأسئلة التى يجب أن نسألها قبل أن نبـــدأ فى برهاننا الهندسى » .

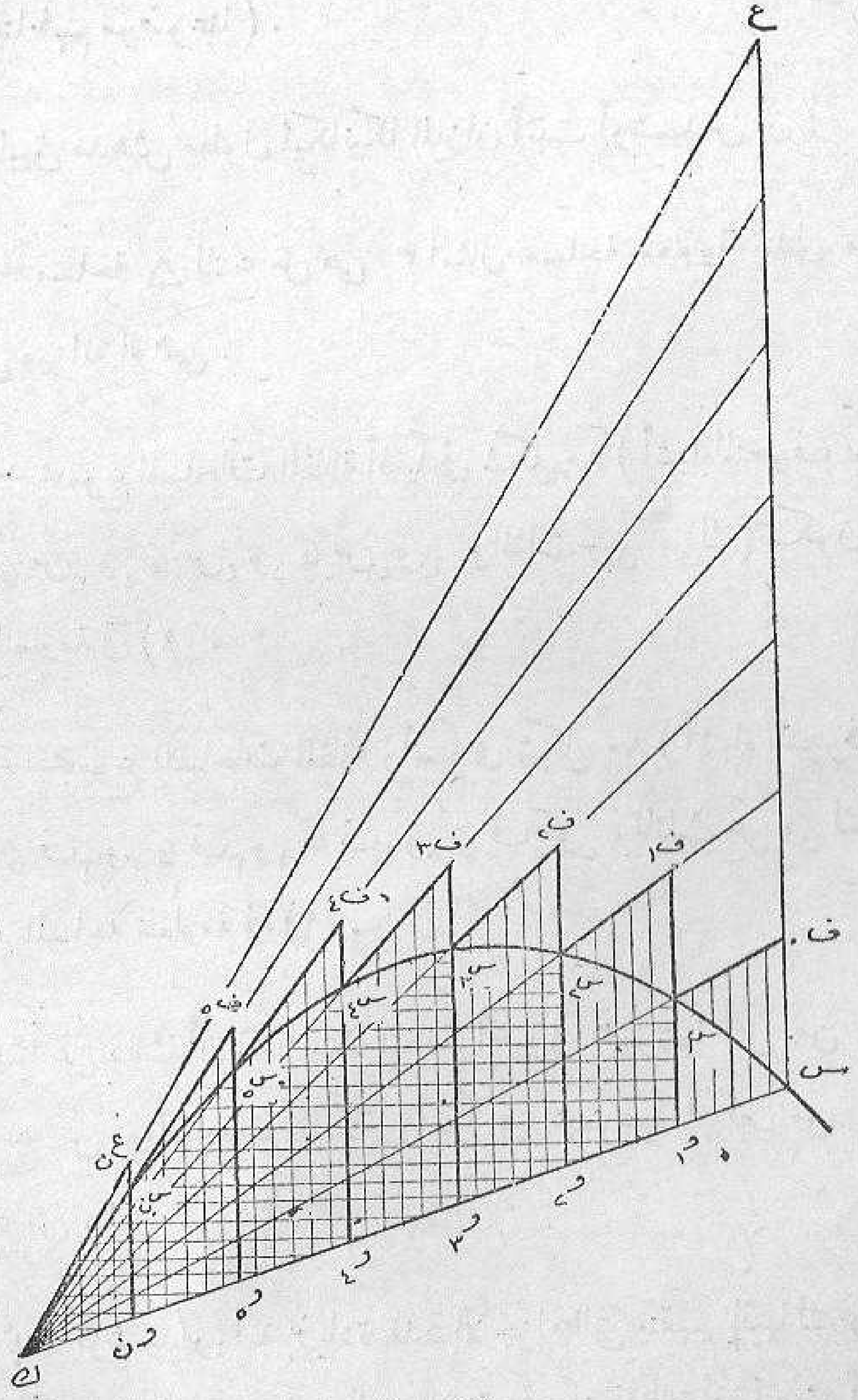
ويفهم المبدأ الذى تقوم عليه هذه الطريقة كل من « اتزن » مع شخص آخر على الأرجوحة (وهى قضيب خشبى يرتكز عند منتصفه(عادة) يجلس فى طرفيه طفلان يوازن كل منهما الآخر). إذا أراد رجل وزنه ١٥٠ باوندا أن يوازن صبياً وزنه ٥٠ باوندا ويجلس على بعد ٦ أقدام من نقطة التوازن ، فلا بد للرجل



شكل (٧٩)

أن يجلس على بعد قدمين من نقطة التوازن ، وبعبارة أخرى النسبة بين وزنى الولد والرجل (٥٠/١٥٠ أو ١/٣) لابد أن تساوى النسبة بين بعدى الرجل والولد على الترتيب ب من نقطة التوازن (٢/٦ أو ١/٣) .

استطاع أرشميدس باستخدام هذا المبدأ إثبات الحقيقة التى برهنها هندسياً



(شكل ٨٠)

بعد ذلك (كما رأينا) عن مساحة القطعة المكافئة . رسم أرشميدس أشكالا صور فيها مساحة غير معلومة لمساحة المثلث ك ع س (فى شكل ٨٠) توازن شكلا مساحته معروفة ، وكل منهما تتدلى من ميزان من نقط تقع رأسياً فوق مراكز ثقلها (رسم شكل ٨٠ مقلوباً بالنسبة لمسافة التوازن لأن هذا الوضع يسهل علينا فهم موضوعنا) .

وبتطبيق مدهش مطول لميكانيكا الميزان أثبت أرشميدس أن :

١ — مساحة △ ك ع س هى ٣ أمثال مساحة معلومة تتدلى من نقطة معينة على ميزانه الوهمى .

٢ — مجموع المساحات المظللة أفقياً فى شكل ٨٠ (أشباه المنحرف س$_{١}$ و$_{٢}$ ، س$_{٢}$ و$_{٣}$ ، س$_{٣}$ و$_{٤}$ ، س$_{٤}$ و$_{٥}$ ، س$_{٥}$ و ن والمثلث س ن و ن ك) تكون أقل من المساحة المعلومة فى (١) .

٣ — مجموع المساحات المظللة رأسياً فى شكل ٨٠ (أشباه المنحرف ف و$_{١}$ ، ف$_{١}$ و$_{٢}$ ، ف$_{٢}$ و$_{٣}$ ، ف$_{٣}$ و$_{٤}$ ، ف$_{٤}$ و$_{٥}$ ، ف$_{٥}$ و ن ، المثلث ع ن و ن ك) تكون أكبر من المساحة المعلومة فى (١) .

وينشأ عن ذلك أن المساحات المظللة أفقياً فى مجموعها أقل من $\frac{١}{٣}$ مساحة △ ك ع س والمساحات المظللة رأسياً فى مجموعها أكبر من $\frac{١}{٣}$ مساحة △ ك ع س .

وأثبت أرشميدس أنه بزيادة عدد الأجزاء التى ينقسم إليها ك س ، س ع يمكن أن نجعل الفرق بين المساحات المظللة رأسياً والمظللة أفقياً صغيراً بالقدر

الذى نريده حيث إنه يمكن إثبات أن هذا الفرق فى المساحات يساوى المثلث ف ك س الذى يتناقص ويتناقص كلما زاد عدد التقسيمات .

وبطريقة « تقليل الفروق » هذه أثبت أرشميدس أن مساحة القطعة يجب أن تساوى المساحة المعلومة فى (١) . بعبارة أخرى يوجد أرشميدس بهذه الطريقة أن مساحة القطعة المكافئة (المحصورة تحت القطع المكافىء) هى $\frac{1}{3}$ مساحة المثلث ك ع س وكما يثبت بسهولة عن طريق الهندسة أن هذا المثلث هو ٤ أمثال المثلث الذى له نفس قاعدة وارتفاع القطعة المكافئة . وعليه يتبع مرة أخرى أن مساحة القطعة المكافئة هى $\frac{4}{3}$ مساحة مثل هذا المثلث .

لم يستخدم أرشميدس طريقة « الاختصار حتى السخف » فى هذه الطريقة الميكانيكية لإيجاد نتائج سوف يثبتها هندسياً بطريقة تقليل الفروق بعد ذلك مقترنة بطريقة مضاعفة من « الاختصار حتى السخف » .

وحدث أن مرت ثمانية عشر قرناً قبل أن تنبت البذور التى زرعت ٢٥٠ عاماً قبل الميلاد ، ولحسن الحظ أنها لم تفقد أو تمت ، بل اختزنت طوال هذه القرون فى بضعة كتب ، وفى القرن الثالث الميلادى استشهد رياضيو الإسكندرية بأقوال أرشميدس ، وفى القرن التاسع جمعت كل الأعمال المعروفة وقتئذ ونسخت باليونانية لمصلحة جامعة القسطنطينية التى لم تقع — لحسن الحظ — فى قبضة المتبربرين ، ووصل هذا المخطوط إلى حوزة ملوك صقلية النورمانديين فى القرن الثانى عشر ، ثم إلى مانفريد ملك الصقليين فى القرن الثالث عشر . وساءت العلاقات بين مانفريد والبابا أوربانو الرابع الذى أقنع تشارلس أوف أنجو بمؤازرته ضد مانفريد ، وكان الأخير قد اغتصب الولايات البابوية فى توسكانيا

وهزم تشارلس الصقليين عام ١٢٦٦ فى موقعة بنيفنتو وقتل مانفريد فانتقلت بعض غنائم الحرب وضمنها هذا المخطوط النفيس إلى حيازة البـــابا ، وظل فى المكتبة البابوية إلى القرن الخامس عشر حين أخذه بعض الخاصة واختفت آثاره . ولكن الحظ خدم العلم فى هذه المرة لأن المخطوط كان قد ترجم إلى اللاتينية وهو مازال فى المكتبة البابوية (النسخة التى ترجمت عام ١٢٦٩ موجودة حالياً فى روما) وكما ترجمت منه أربع نسخ على الأقل باليونانية واتخذت هذه الترجمة اليونانية أصلا لأول طبعة نشرت من كتاب أرشميدس وكان هذا عام ١٥٤٤ ، ثم بعد ذلك بأربعة عشر عاماً نشرت الطبعة اللاتينية وليس من شك فى أنه عن طريق هذه الطبعة عرف رياضيو القرن السابع عشر عبقرية أرشميدس . واحتوت هذه الطبعة على قياس الدائرة ، والحلزونيات ، وتربيع القطع المكافىء وموضوعات عن المجسمات المخروطية والكروية وضابط الوقت الرملى (بالإضافة إلى هذه الأعمال وجدت مخطوطات أخرى تحتوى على كتبه عن الكرة والأسطوانة والاتزان المستوى والأجسام الطافية ، وكما قلنا عثر على مخطوط يونانى آخر عام ١٩٠٦ فى القسطنطينية يتضمن « الطريقة »).

وأخيراً سقطت البذور التى نمت بين طيات المخطوطات المتربة سنين طويلة على أرض خصبة ، وأينعت فى عقول كپلر وكافالييرى وبسكال وآخرين ممن جاءوا بعدهم .

رأينا أن كپلر كان مهتما بمسألة قياس محتويات زجاجـة خمر فى عام ١٦١٣. تصور كپلر أن الدائرة تتكون من عدد لانهائى من المثلثات الصغيرة التى تقع رؤوسها فى مركز الدائرة وتقع قواعدها المتناهيـة الصغر على محيـط الدائرة .

وبخطوات مماثلة من التفكير اعتبر أن المجسمات تتكون من عدد لانهائى من المخروطات المتناهيـة الصغر (أو أقراص) . وكانت طريقته فى إيجاد حجم مجسم هى تصور الشكل الذى يتولد من دوران منحن حول محور معين .

ومهدت فكرة كيلر عن الأجزاء المتناهية الصغر والتضامن مع الاستمرار الرياضى التى ذكرناها من قبل الطريق لطريقة كافالييرى عن « اللامنقسمات » وعلى الرغم من أن كافالييرى لم يفصح تماما عما كان يدور بخلده عندما استخدم هذا التعبير إلا أنه من الواضح أنه كان يستخدم رأيا بحثه أرسطو وفلاسفة العصور الوسطى مثل توماس أكويناس Thomas Aquinas ، وكان كافالييرى باعتباره يسيوعياً يعرف كل أعماله حق العلم . كانت النقطـة فى رأيهم هى « اللامنقسم » بالنسبة للمستقيم ، وكان المستقيم هو « اللامنقسم » بالنسبة إلى سطح ، والسطح هو « اللامنقسم » بالنسبة إلى المجسم .

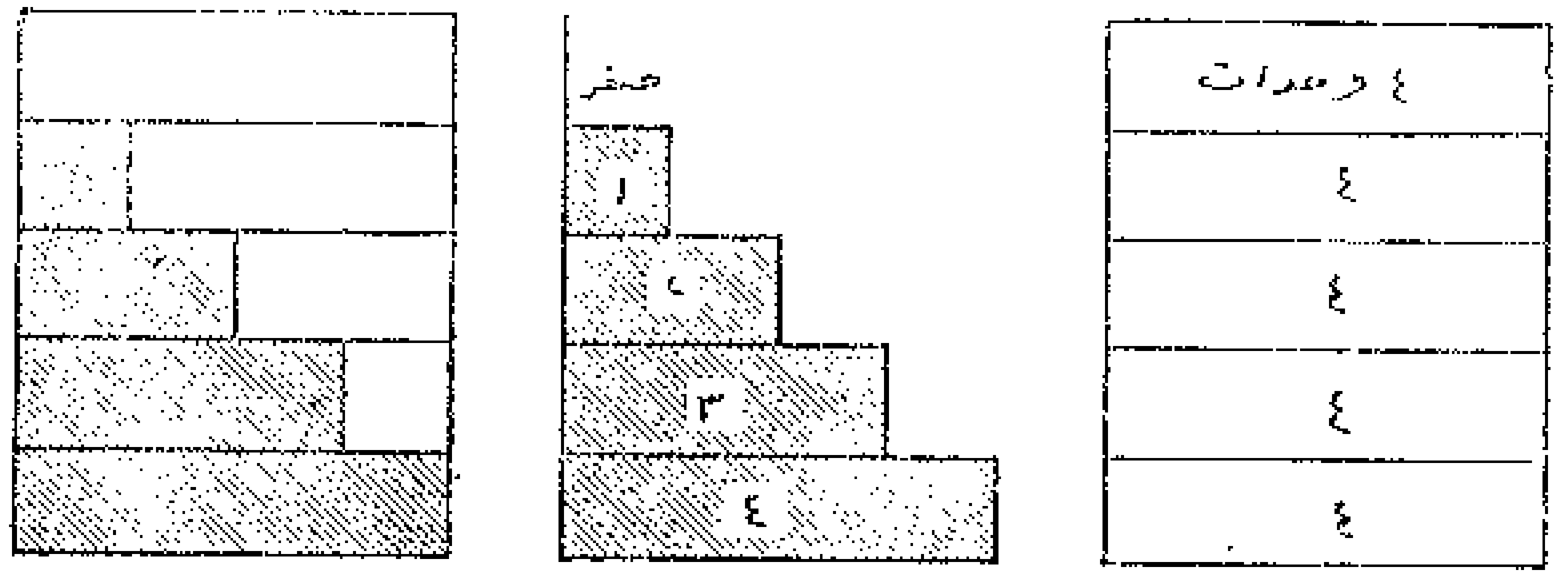
وفى معالجة كافالييرى النهائية اعتبر أن كل « لا منقسم » يمكن بالتحرك أن يولد التالى له فى المرتبة ، فمثلا النقطة المتحركة تولد مستقيما ، والمستقيم المتحرك يولد سطحاً ، والسطح المتحرك يولد مجسما .

لم يعط كافالييرى مساحة شكل « كعدد » من الوحدات المربعة ، فقد كان يقارن بين كبر شكل بكبر شكل آخر . بعبارة أخرى كان يوجد النسبة بين المساحة المطلوبة ومساحة أخرى كان يسهل حسابها ، وهذه هى نفس طريقة الإغريق القدامى .

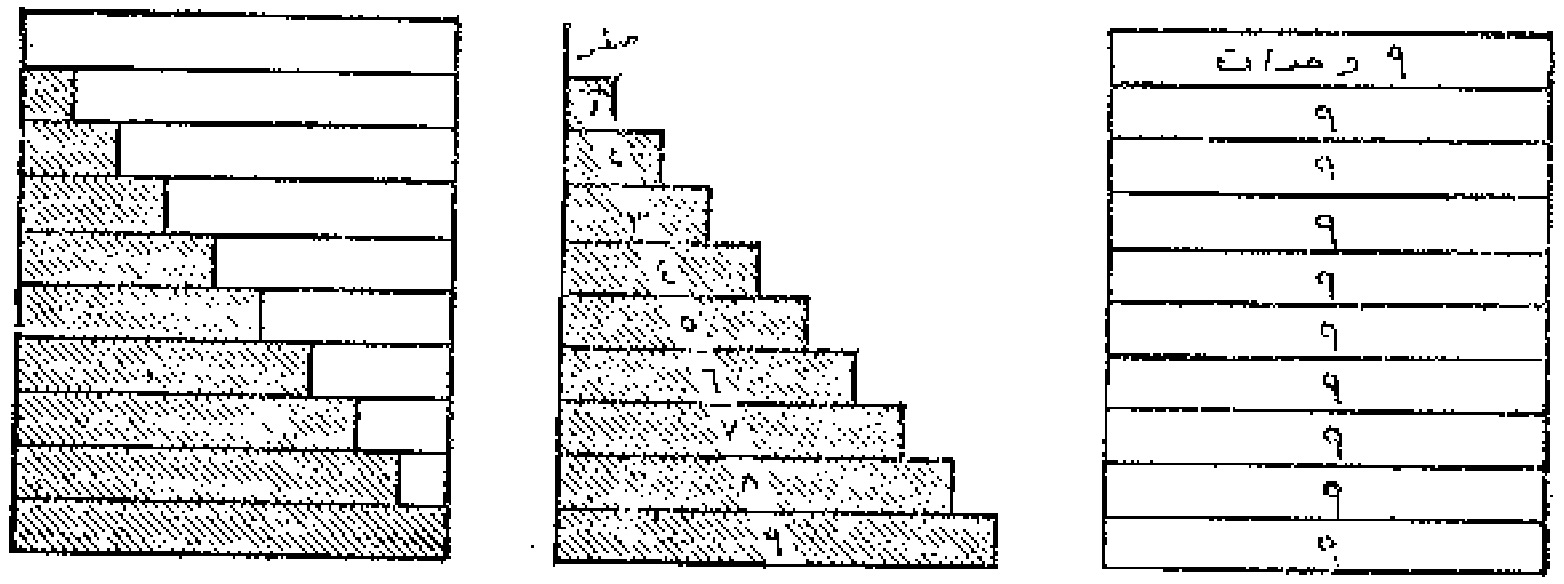
أما طريقتنا الحديثة فى التعبير عن المساحة فهى من عمل جون واليس John Wallis (١٦١٦ — ١٧٠٣) كما سنرى .

الأشكال الثلاثة الآتية توضح بطريقة مبسطة الفكرة العامة فى استخدام كافاليرى لما يسمى « اللامنقسمات » .

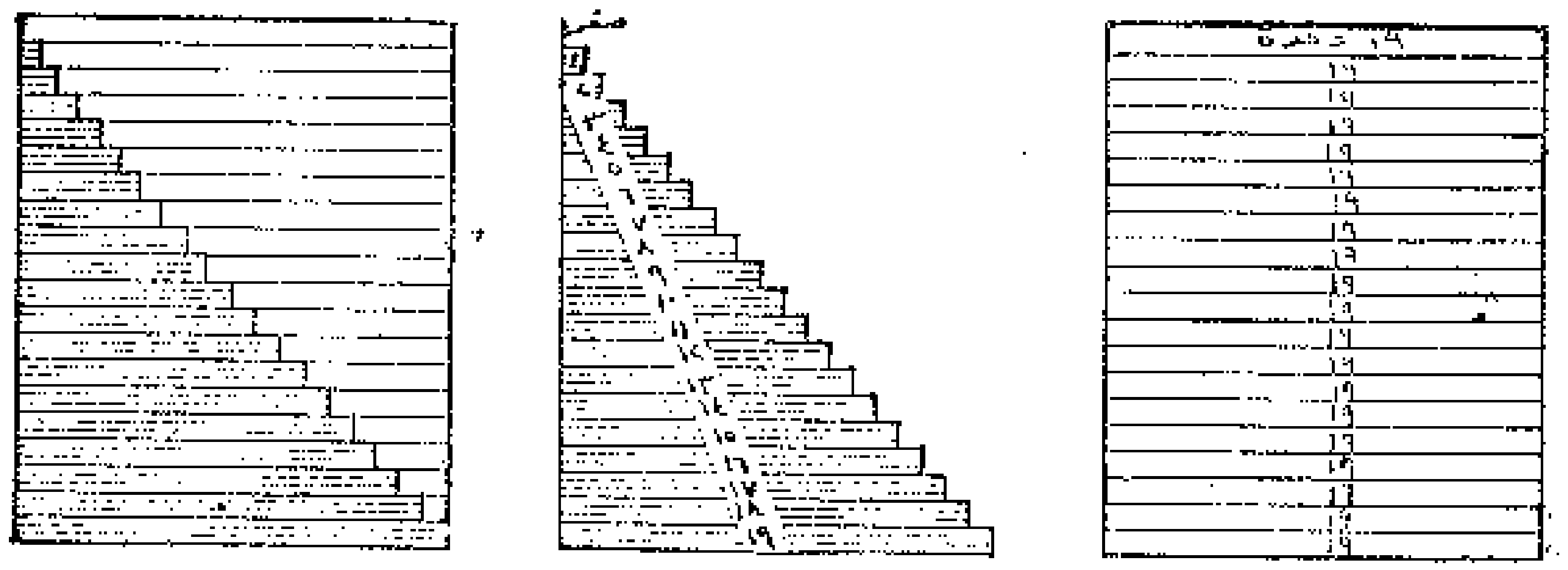
شكل ٨١ يوضح إلى اليسار مستطيلا قسم إلى خمسة مستطيلات صغيرة



شكل (٨١)



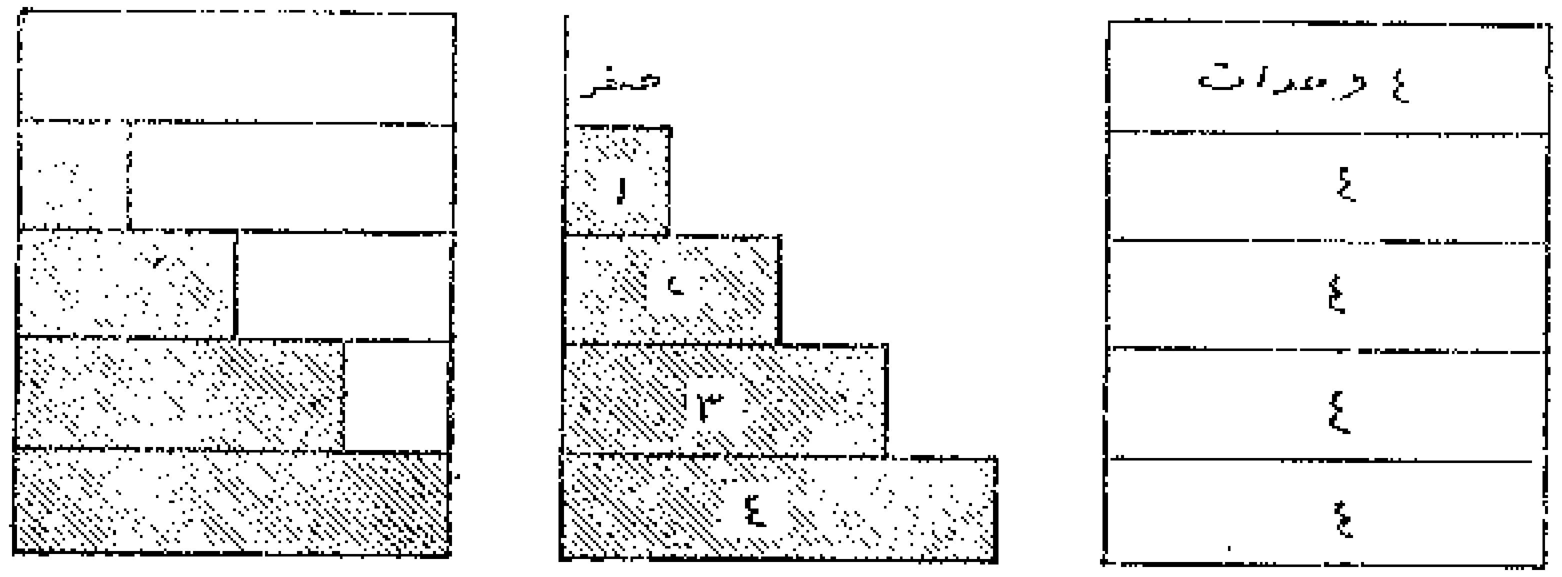
شكل (٨٢)



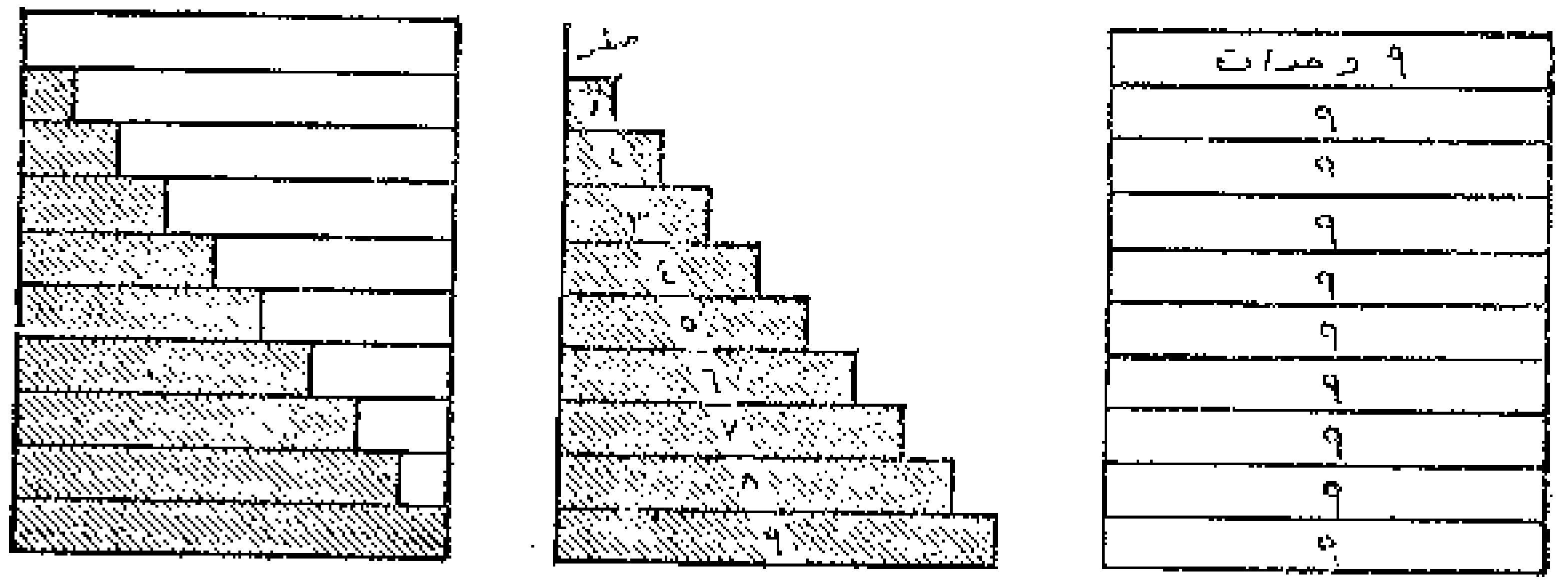
شكل (٨٣)

الأشكال الثلاثة الآتية توضح بطريقة مبسطة الفكرة العامة فى استخدام كافالييرى لما يسمى « اللامنقسمات » .

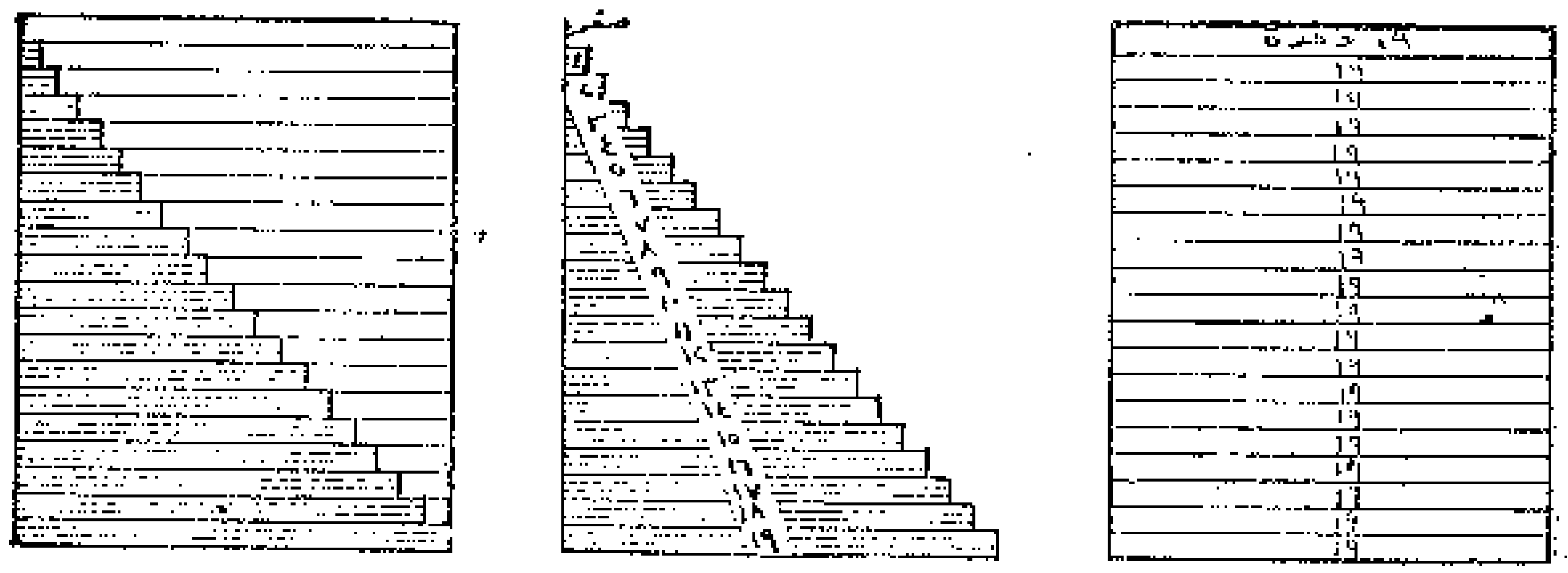
شكل ٨١ يوضح إلى اليسار مستطيلا قسم إلى خمسة مستطيلات صغيرة



شكل (٨١)



شكل (٨٢)



شكل (٨٣)

متساوية فى المساحة . ولا يهمنا كثيراً عدد وحدات المساحة ؛ إذ أننا شارعون فى إيجاد نسبته .

الشكل المظلل فى الوسط يتكون من سلسلة من مستطيلات تزداد مساحاتها بانتظام، مساحة المستطيل السفلى منها تساوى مساحة كل من المسطيلات الصغيرة فى الشكل الأيسر . (على القارىء أن يتصور مستطيلا مساحته صفر عند قمة هذه الدرجات)

الشكل الأيمن يبين الشكل الأوسط موضوعا فوق الشكل الأيسر . والآن علينا أن نقارن مساحة الجزء المظلل من هذا الشكل بالمساحة الكلية للمستطيل الكبير .

$$\frac{\text{الجزء المظلل}}{\text{المستطيل الكلى}} = \frac{\text{صفر} + ١ + ٢ + ٣ + ٤}{٤ + ٤ + ٤ + ٤ + ٤} = \frac{١٠}{٢٠} = \frac{١}{٢}$$

(إذا تذكرنا القانون $\text{ج} = \frac{\text{ن}(\text{ا} + \text{ل})}{٢}$ أمكننا أن نوجد مجموع الأعداد فى البسط بإيجاد قيمة $\frac{٥(٠ + ٤)}{٢}$ أو $\frac{٥(٤)}{٣}$ أو $\frac{٢٠}{٢}$ أو ١٠ . هذه الطريقة توفر لنا فى الوقت الحسابات المقبلة) .

والآن نكرر هذه العملية بالنسبة للأشكال المعطاة فى شكل ٨٢ .

هنا النسبة :

$$\frac{\text{الجزء المظلل}}{\text{المستطيل الكلى}} = \frac{٠ + ١ + ٢ + ٣ + \cdots ٨ + ٩}{١٠\,(٩)} = \frac{٤٥}{٩٠} = \frac{١}{٢}$$

وإذا كررنا العملية بالنسبة للأشكال المعطاة فى شكل ٨٣ لكانت النسبة:

$$\frac{\text{الجزء المظلل}}{\text{المستطيل الكلى}} = \frac{0 + 1 + 2 + \cdots + 18 + 19}{20\,(19)} = \frac{190}{380} = \frac{1}{2}$$

لاحظنا أنه فى كل من الأشكال ٨١ ، ٨٢ ، ٨٣ كان الجزء المظلل ½ المستطيل الكلى . ويمكننا أن نرى كذلك — مادمنا نحتفظ بالدرجات مساوية كل واحدة للأخرى فى أى شكل من الأشكال ، فإننا كلما زدنا عدد الدرجات صغرت كل درجة . ويمكننا أن نتصور عدداً من الدرجات كبيراً ، بدرجة أنه لايمكن التفريق بين خط تحديدها وبين المستقيم .

وفى هذه الحالة لايمكن التفرقة بين المساحة المظللة والمثلث . ومن الهندسة نعلم أن مساحة المثلث هى ½ مساحة المستطيل المشترك معه فى القاعدة والارتفاع وهذه النتيجة كما رأينا تتفق مع مساحة أى واحدة من الأجزاء المظللة فى الأشكال الواقعة إلى اليمين ، وبالطبع فى الأشكال التى تصورنا وجودها ، وتقع الصعوبة هنا فى التعبير عن هذه الفكرة بلغة المنطق .

كانت طريقة كافاليرى أكثر صعوبة وتعقيداً مما أوردنا ، كما أنها تضمنت آراء لاتتفق والمنطق . فمثلا تصور كافاليرى أن كل مستطيل صغير أمكن انضغاطه بدرجة أنه أصبح الخط « اللامنقسم » الذى ولد أصلا ذلك المستطيل الصغير .

استخدم كافاليرى هذه الطريقة لإيجاد مساحات محصورة بمنحنيات معينة وكذا لإيجاد حجوم بعض المجسمات . وأعطى عمله — على الرغم من أنه لم

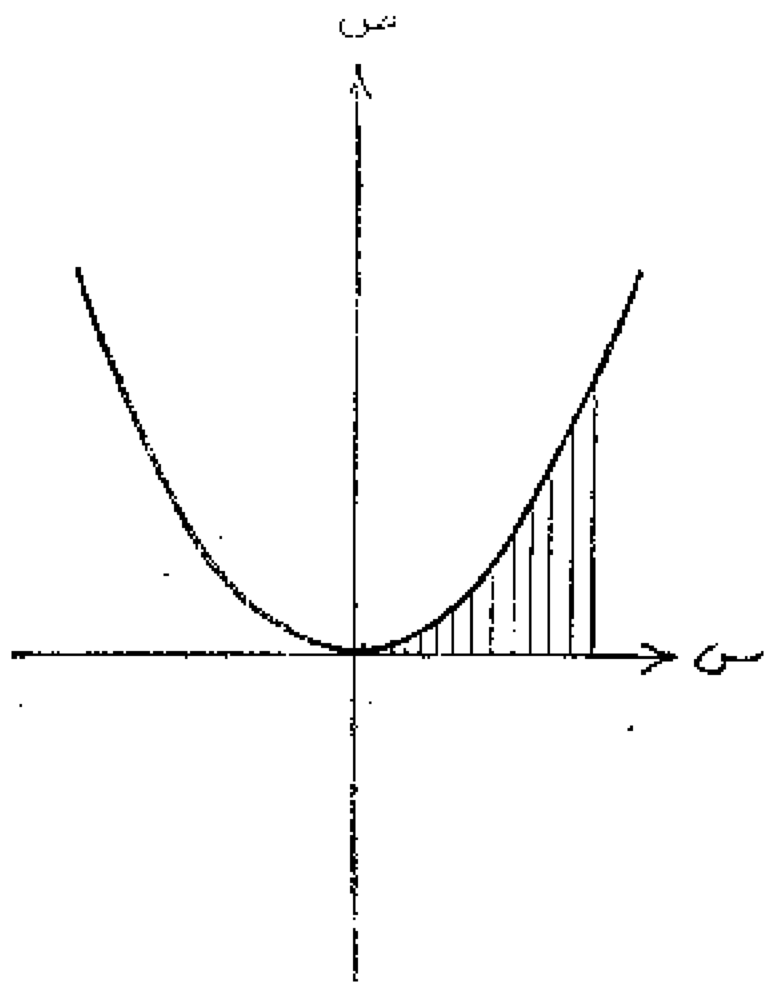
يكن – علمياً نتائج صحيحة فى كثير من المسائل الصعبة ، ثم طوّره ونماه رياضيون آخرون حتى أصبح أخيراً حساب التكامل . وكما رأينا ، استخدم بسكال طريقة « اللامنقسمات » فى حل مسائل تتعلق بالدويرى وفسر ذلك ، وقال يفسر معنى « مجموع الخطوط القائمة » أنه كان يعنى « مجموع المستطيلات المتناهية الصغر » .

وتنتقل الآن عدسة المصور إلى إنجلترا وإلى اكسفورد ، مدينة الأبراج والحدائق الهادئة وأجيال بعد أجيال من الطلبة والأساتذة يسيرون فى حدائق كلياتهم غارقين فى بحار التأملات . وتحطم هـــذا السلام المريح فى أجمل مدن إنجلترا حين اتخذها تشارلس الأول مقرا له فى أثناء الحرب الأهلية بين الملكيين والبرلمانيين ، وفى مايو من عام ١٦٤٦ هرب تشارلس من المدينة متخفيا . وفى ١٦٤٩ ، وهى السنة التى أعدم فيها الملك خارج ويت هول – عين أحد رجال الدين ، وكان شابا ، أستاذا للهندسة بجامعة اكسفورد رغم أنه احتج – كتابة – على إعدام الملك . كان هذا الشاب جون واليس الذى نال درجته العلمية فى الطب من كمبردج ثم أصبح كاهنا وشايع كرومول فى الحرب الأهلية ونجح فى ترجمة الشفرة بأوراق ضبطت مع الملكيين فعين رئيس دير فى إحدى كنائس لندن تقديراً له ، وفى لندن بدأ يهتم بالرياضيات فكان يؤم الاجتماعات العلمية التى أصبحت فيما بعد الجمعية الملكية بلندن واعترف بمقدرته العلمية فعين أستاذاً بجامعة اكسفورد وظل بها إلى حين وفاته وهو فى السابعة والثمانين . وألف واليس كتبا فى شتى الموضوعات : فى المنطق وفى الفلسفة والرياضيات ، وكان أحد كتبه عن هندسة ديكارت ، وكان أول من بسط هذه المادة ووضحها ، أما أشـــهر كتبه فكان « حساب اللانهائيات »[1] الذى نشر فى ١٦٥٦ وفيه

(1) Arithmetica Sufiniorum.

استخدم وعمم طرق ديكارت وكافالييرى ، بينما أوجد معنى للقوى الكسرية والسالبة، غير أنه لم يكتبها كما تكتب اليوم ،فقد كان نيوتن أول من استخدم طريقتنا الحديثة،وأثبت واليس أن $ا^{0}$ ، $ا^{-1}$ ، $ا^{-2}$ ، $ا^{-3}$ . . . « كما نكتبها اليوم » تمثل ١، $\frac{1}{ا}$ ، $\frac{1}{ا^{2}}$ ، $\frac{1}{ا^{3}}$ . . . . وإن $س^{\frac{1}{2}}$ تمثل الجذر التربيعى للمقدار س وإن $س^{\frac{2}{3}}$ تمثل الجذر التكعيبي للمقدار $س^{2}$ وهكذا .

واستطاع كافالييرى والرياضيون الفرنسيون إيجاد المساحة التى يحدها جزء من القطع المكافىء والمحور السينى واحداثى صادى ، كما يظهر فى شكل ٨٤، (الجزء المظلل) .



شكل (٨٤)

تصور هؤلاء الجزء المظلل مكوناً من عدد لا نهائى من الشرائط المستطيلة المتناهية الصغر والتى يكون مجموعها مساويا للمساحة المطلوبة . وسنرى قريباً كيف استخدم واليس هذه الطريقة ، وكيف أنه أحرز تقدما كبيراً بادخال مفهوم حسابى لما نسميه اليوم « بالنهاية » .

وقبل أن ندرس طريقته الخاصة سندرس كيف حسب قيمه النسبة بين مساحة الشكل المظلل ومساحة المستطيل المرسوم على نفس قاعدة الشكل

المظلل وارتفاعه هو أكبر ارتفاع فى الشكل المظلل · وكما سنرى وجد أن النسبة هى :

$$\frac{١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + ٤^٢ + \cdots\cdots + م^٢}{(م + ١) م^٢}$$

حيث م هى عدد المستطيلات التى انقسم إليها الشكل المظلل، فمثلا إذا كانت م = ١ فإن النسبة تكون $\frac{١^٢}{٢}$ أو $\frac{١}{٢}$ أو $\frac{٣}{٦}$

، إذا كانت م = ٢ فإن النسبة تكون $\frac{١ + ٤}{٣ (٤)} = \frac{٥}{١٢}$

وإذا كانت م = ٣ » » » $\frac{١ + ٤ + ٩}{٤ (٩)} = \frac{٧}{١٨}$

وإذا كانت م = ٤ » » » $\frac{١ + ٤ + ٩ + ١٦}{٥ (١٦)}$ أو $\frac{٩}{٢٤}$

وإذا استمررنا بهذه الطريقة فسنجد أن النسب عندما تكون م = ٥، ٦، ٧، ... هى $\frac{١١}{٣٠}$، $\frac{١٣}{٣٦}$، $\frac{١٥}{٤٢}$، $\frac{١٧}{٤٨}$، $\frac{١٩}{٥٤}$، $\frac{٢١}{٦٠}$، ... وهكذا.

(وسنرى أن بسوط هذه الكسور تكون متوالية حسابية أول حدودها ٣ وأساسها ٢ وأن مقاماتها تكون متوالية حسابية أخرى أول حدودها ٦ وأساسها ٦ .

والآن نعيد كتابة هذه القيم المتتالية للنسبة بين المساحتين بالطريقة التالية :

عند م = ١ النسبة = $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٣} + \frac{١}{٦}$

عند م = ٢ » = $\frac{٥}{١٢}$ = $\frac{١}{٣} + \frac{١}{١٢}$

الطريقة السليمة لضبط العقل والبحث عن الحقيقة فى العلوم » ، وكان يعمل فى هذا الكتاب دون انتظام لمدة ثمانية عشر عاما . وكان للكتاب ثلاثة ملاحق وكان ثالثهما فى الهندسة ، وهى التى خلدت اسم ديكارت وتبدأ بالمسائل التى يمكن حلها عن طريق الرسم باستخدام المسطرة والفرجار فقط ، ثم ينتقل إلى البحث فى أنواع مختلفة من المنحنيات .

والهندسة الإقليدية التى درسها ديكارت فى شبابه تتألف من عدد كبير من النظريات المنفردة تقف كل منها كما يبدو مستقلة عن الأخريات ، وأدرك ديكارت أن هناك حقائق عامة معينة تقوم عليها الأشكال الهندسية ، وفى هذا يقول : « ولكن يظهر لى أنها لم تقل لعقلى بوضوح كاف لم كانت الأشياء كما تظهر لى ، ولا بأى وسيلة تم اكتشافها » .

وظهرت عبقرية ديكارت فى طريقته التى تمكننا من تمثيل أى منحنى بواسطة علاقة يمكن إثبات وجودها بين طولى مستقيمين . وقال ديكارت : « هذه طريقة لم أجد أسهل منها أو أكثر وضوحاً بالنسبة للخيال أو المشاعر » .

وطولا هذين المستقيمين يعرفان بالإحداثيين ، ولو أن هذه التسمية ليست من وضع ديكارت ، بل من وضع ليبنتز الذى سوف نقابله قريباً فى صفحات هذا الكتاب . فى شكل ٦٥ بالإضافة إلى منحنى معلوم نرى مستقيمين يسميان بمحورى الإحداثيات مرسومين متعامدين . ومن المعتاد أن يرسم المحوران هكذا متعامدين إلا أن هذا التعامد ليس شرطاً أساسياً .

ولتفسير معنى الإحداثيات نأخذ أربع نقط ا ، ب ، حـ ، ء على المنحنى

عند م = ٣ النسبة = $\frac{٧}{١٨} = \frac{١}{٣} + \frac{١}{١٨}$

عند م = ٤ » = $\frac{٩}{٢٤} = \frac{١}{٣} + \frac{١}{٢٤}$

عند م = ٥ » = $\frac{١١}{٣٠} = \frac{١}{٣} + \frac{١}{٣٠}$

. . . .

عند م = ١٠٠ النسبة = $\frac{٢٠١}{٦٠٠} = \frac{١}{٣} + \frac{١}{٦٠٠}$

. . . .

عند م = ١٠٠٠٠ النسبة = $\frac{٢٠٠٠١}{٦٠٠٠٠} = \frac{١}{٣} + \frac{١}{٦٠٠٠٠}$

وهكذا . . .

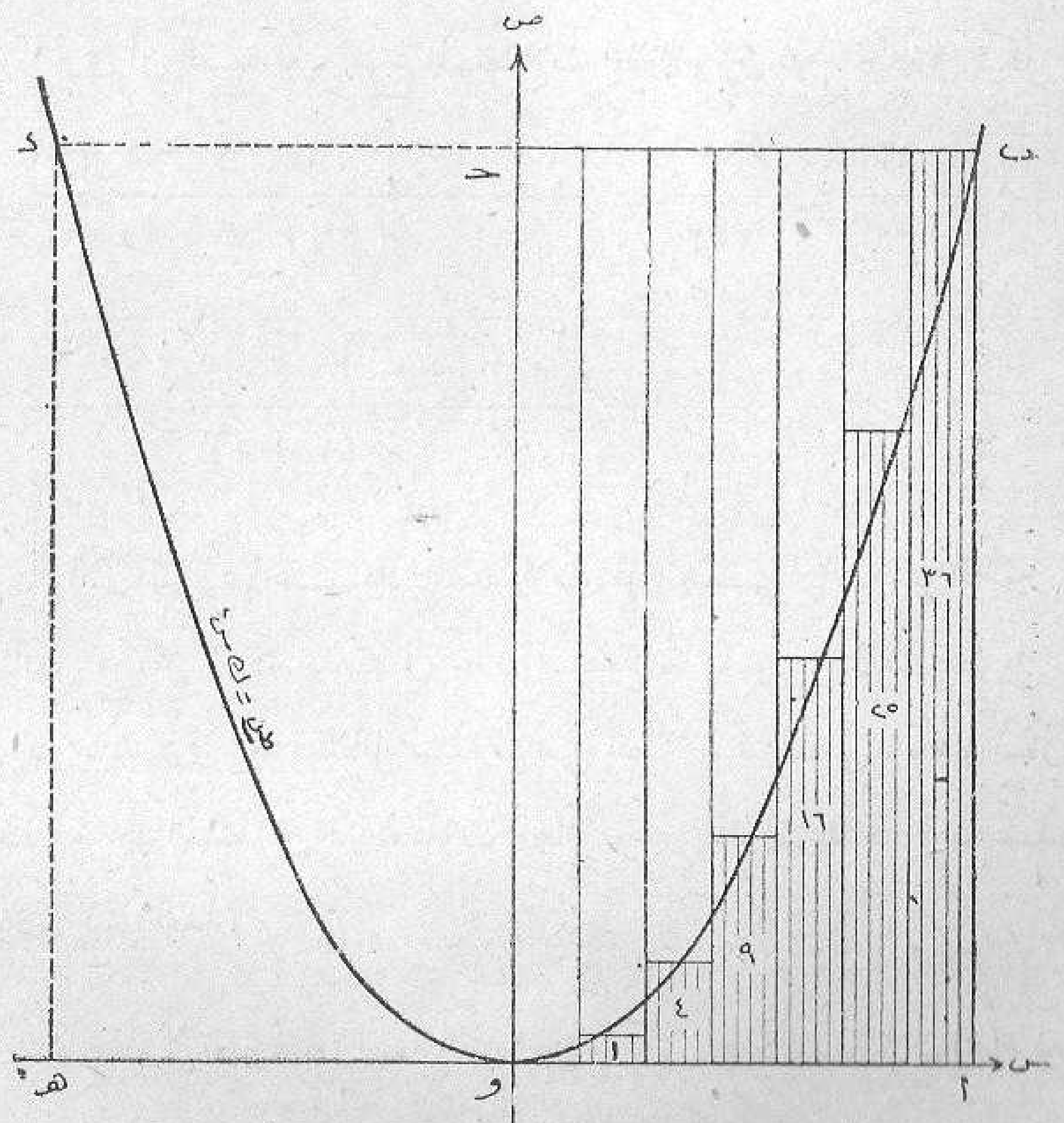
وفى كل حالة النسبة تساوى $\frac{١}{٣}$ + كسر ما . ونلاحظ أن الإضافات الكسرية المتتالية بسطها ١ ومقاماتها تكون متوالية عددية ٦ ، ١٢ ، ١٨ ، ٢٤ ، .. وعليه كلما كبرت م صغر الكسر المضاف إلى $\frac{١}{٣}$ فإذا اخترنا م كبيرة كبرا كافيا أمكننا أن نجعل الفرق بين النسبة ، $\frac{١}{٣}$ أصغر ما يمكن . ويسألنا سائل : « هل يمكن أن نجعل الفرق بين النسبة والثلث أقل من $\frac{١}{١٠٠٠٠٠٠٠}$ والجواب على ذلك : « بكل تأكيد » إذا أخذنا م = ١٦٦٦٦٦٧ » . وهل يمكن جعلها أصغر من $\frac{١}{١٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠}$ ؟ والجواب هنا « نعم إذا أخذنا م = ١٦٦٦٦٦٦٦٦٧ وهكذا .

ورأى واليس أنه بزيادة قيمة م زيادة كبيرة يستطيع أن يقول إن قيمة

$$\frac{١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + ٤^{٢} + \cdots + م^{٢}}{[م + ١] م^{٢}}$$ تقترب من $\frac{١}{٣}$ بقدر ما نشاء .

واليوم نقول بلغتنا إن $\frac{١}{٣}$ هى « النهاية » التى تقترب منها هذه النسبة عندما تقترب م من ما لا نهاية .

وإذا تذكرنا الفكرة التى تعالج بها الأشكال ٨٣ ، ٨٤ ، ٨٥ أمكننا أن نتتبع بسهولة طريقة واليس فى إيجاد المساحة المظللة فى شكل ٨٥ .



شكل (٨٥)

نتصور أن المستطيلات المظللة وضعت فوق المستطيلات غير المظللة التى يساوى كل منها أكبر المستطيلات المظللة . المستطيلات المظللة تمثل المساحات $١^٢$ ، $٢^٢$ ، $٣^٢$ ، $٤^٢$ ، $٥^٢$ ، $٦^٢$ وحدة مربعة على التوالى . ولا يهمنا نوع الوحدة المستعملة لأننا نحاول إيجاد نسبة ولكن المساحات لا بد أن تكون بالنسب المذكورة كما يجب أن تكون جميع المستطيلات متساوية العرض أى متساوية فى القيمة السينية إلى الرسم . ويكون عدد المستطيلات المظللة أقل بواحد من عدد المستطيلات غير المظللة .

نرى أن النسبة بين مجموع المستطيلات المظللة وبين غير المظللة فى شكل ٨٥

هى $\frac{١ + ٤ + ٩ + ١٦ + ٢٥ + ٣٦}{٧ \; (٣٦)} = \frac{٩١}{٢٥٢} = \frac{١٣}{٣٦}$ أو $(\frac{١}{٣} + \frac{١}{٣٦})$

أو $\frac{١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + \cdot\cdot + م^٢}{(م + ١) م^٢}$

والآن كلما زدنا عـــدد المستطيلات فإن هـــذا الكسر الصغير $\frac{١}{٣٦}$ يتناقص مع كل زيادة تحدث فى عدد المستطيلات ، وليس ذلك فقط بل إن « الدرجات » فى الجزء المظلل ستقترب من خط تحديد المنحنى ، وهنا نسأل : كيف نوجد النسبة بين المستطيلات المظللة وغير المظللة عندما يزيد عـددها زيادة كبيراً جداً ؟

نوجد أولا تعبيراً عاما لقيمة النسبة عندما يكون عدد المستطيلات (م) صغيراً .

رأينا أنه عند م = ١ كانت النسبة $\frac{٣}{٦}$ أو $\frac{٢م + ١}{٦م}$

وعند م = ٢ كانت النسبة $\frac{٥}{١٢}$ أو $\frac{٢م + ١}{٦م}$

وعند م = ٣ « « $\frac{٧}{١٨}$ أو $\frac{٢م + ١}{٦م}$

وفى الواقع مهما كانت قيمة م فإننا نحصل دائما على قيمة النسبة بالتعويض عن تلك القيمة فى م فى القانون $\frac{٢م + ١}{٦م}$

أو نكتب هذا القانون على الصورة $\frac{٢م}{٦م} + \frac{١}{٦م}$ أو $\frac{١}{٣} + \frac{١}{٦م}$

وعن ذلك ينشأ أنه إذا كانت م كبيرة جداً فإن قيمة الكسر $\frac{١}{٦م}$ تصبح صغيرة جداً، وعليه فبأخذ م كبيرة كبرا كافيا يمكن اعتبار المساحة المظللة و ا ب — وهى تقترب من شكل المساحة الواقعة تحت القطع المكافىء — مساوية لثلث المساحة و ا ب حـ ويمكن فى هذه الحالة إيجاد قيمتها بالوحدات المربعة .

لاحظ أنه يمكننا الحصول على نفس النتيجة التى وصل إليها أرشميدس لمساحة القطعة المكافئة ء و ب (شكل ٨٥) بنفس هذه النتيجة التى وصلنا إليها الآن .

مساحة و ب ا = $\frac{١}{٢}$ المستطيل و ا ب حـ .

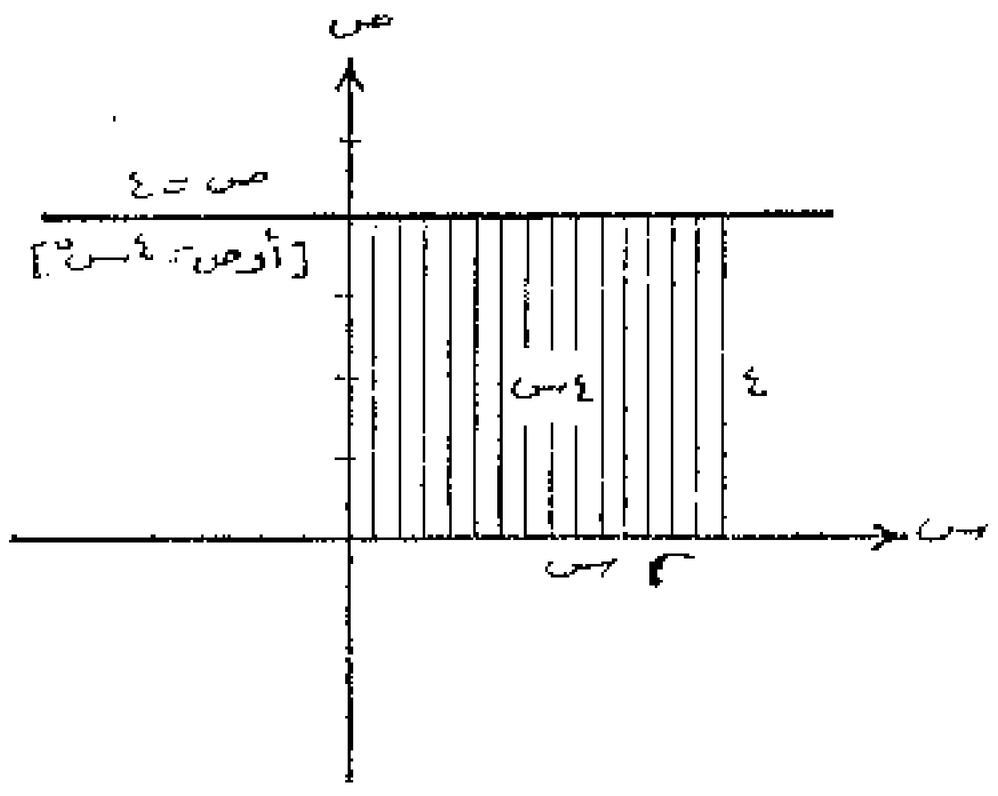
∴ مساحة حـ و ب = $\frac{1}{3}$ مساحة المستطيل و ا ب حـ ، والقطع المكافىء متماثل أو متزن بالنسبة إلى المحور و حـ .

وعليه تكون مساحة ء و حـ = مساحة حـ و ب .

∴ مساحة القطع المكافئة ء و ب هى ضعف مساحة حـ و ب أو $\frac{2}{3}$ المستطيل و ا ب حـ . فإذا رسم المثلث ء و ب فإن مساحته تساوى $\frac{1}{2}$ المستطيل هـ ا ب ء (قارن هذا بالشكل ٧٩) . بعبارة أخرى المثلث ء و ب يساوى المستطيل و ا ب حـ ، ومن ذلك ينتج أن مساحة القطعة المكافئة ء و ب = $\frac{4}{3}$ مساحة المثلث ء و ب .

للقارىء الذى احتمل بصبر حتى الآن أن يسعد فقد استطاع أن يكتشف لنفسه (بمساعدة بسيطة من أرشميدس وكبلر وكافاليرى وديكارت وواليس) خطوة أساسية فى حساب التكامل .

ويبين الجزء المظلل فى شكل ٨٦ المساحة التى يغطيها الرسم البيانى للمنحنى ص = ٤ يمكن كتابته على الصورة ص = ٤ س صفر (حيث إن س٠



شكل (٨٦)

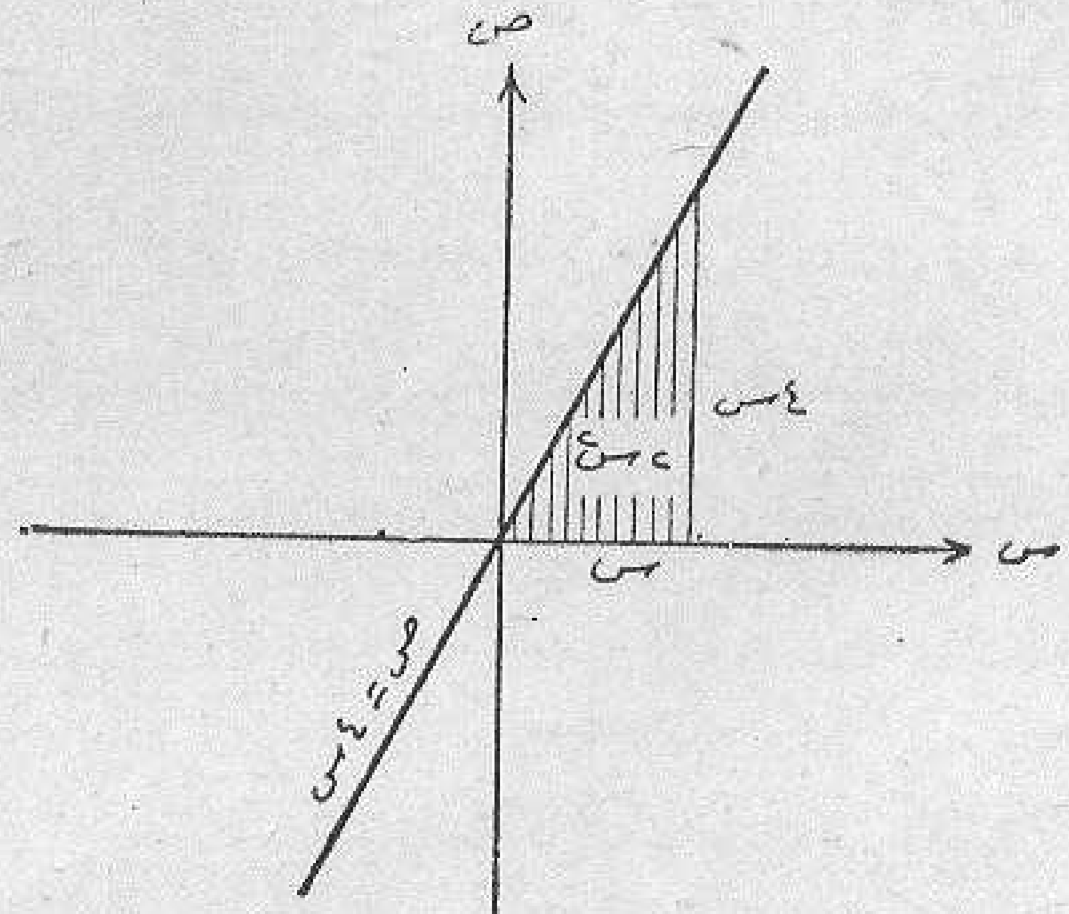
كما رأينا تساوى ١) بين نقطة الأصل وإحداثى صادى أقيم على بعد س وحدة من نقطة الأصل .

فى هذه الحالة الخاصة تكون قيمة الإحداثى الصادى ص ٤ لأى نقطة على المنحنى . والآن فى أى رسم بيانى قيمة أى إحداثى صادى معين ترتبط بقيمة النقطة التى يقطع فيها هذا الإحداثى الصادى محور السينات . ويعطى هذا الارتباط فى معادلة الرسم البيانى ، وحتى نوضح هذا الارتباط فى هذه الحالة الخاصة سنكتب ص = ٤ س٠ بدلا من ص = ٤ فمهما تكن قيمة س فإن س٠ تساوى ١ دائماً وعليه فقيمة الإحداثى الصادى فى هذه الحالة تكون دائماً ٤ × ١ أو ٤ ، وسنسمى ٤س٠ بالدالة الصادية للمتغير س . وننصح القارىء الذى لم يألف التعبير « دالة » أن يراجعها فى الصفحة (١٨٢) من هذا الكتاب .

وحيث إن الجزء المظلل مستطيل فإن مساحته هى الطول × العرض أو س × ٤ أو ٤ س وحدة مربعة، وسنكتب هذه المساحة بطريقة غير مألوفة وهى $\frac{1}{1}$ ٤ س١ لأسباب سنوضحها فيما بعد ، وسنسمى هذا التعبير بالدالة المساحية ويمكننا بواسطتها إيجاد المساحة التى يغطيها المنحنى بين نقطة الأصل وأى نقطة معطاة على المحور السينى، فمثلا إذا كان الإحداثى الصادى مقاما عند النقطة س = ٥ فإن المساحة تكون $\frac{1}{1}$ (٤) (٥) أو ٢٠ وحدة مربعة وهكذا .

الجزء المظلل من شكل ٨٧ يبين المساحة المغطاة بمنحنى ص = ٤ س (الذى يمكن كتابته على الصورة ص = ٤ س١) بين نقطة الأصل وإحداثى صادى مقام على بعد س وحدة من نقطة الأصل .

هنا الدالة الصادية هى ٤س^{1}. والمراد إيجاد الدالة المساحية. سنرى أن المساحة المظللة لم تعد مستطيلا، بل هى فى الواقع مثلث. ومساحة المثلث تساوى نصف قاعدته فى ارتفاعه، وعليه فمساحته = $\frac{1}{2}$ س × ص أو نكتبها هكذا $\frac{1}{2}$ س × ٤ س حيث إنه مهما يكن وضع الإحداثى الصادى فإن قيمة ص تكون باستمرار ٤ أمثال القيمة السينية للنقطة حيث يقطع الإحداثى الصادى المحور الأفقى. وعليه فالمساحة هى $\frac{1}{2}$ × ٤ س^{2} وتكون هذه هى الدالة المساحية

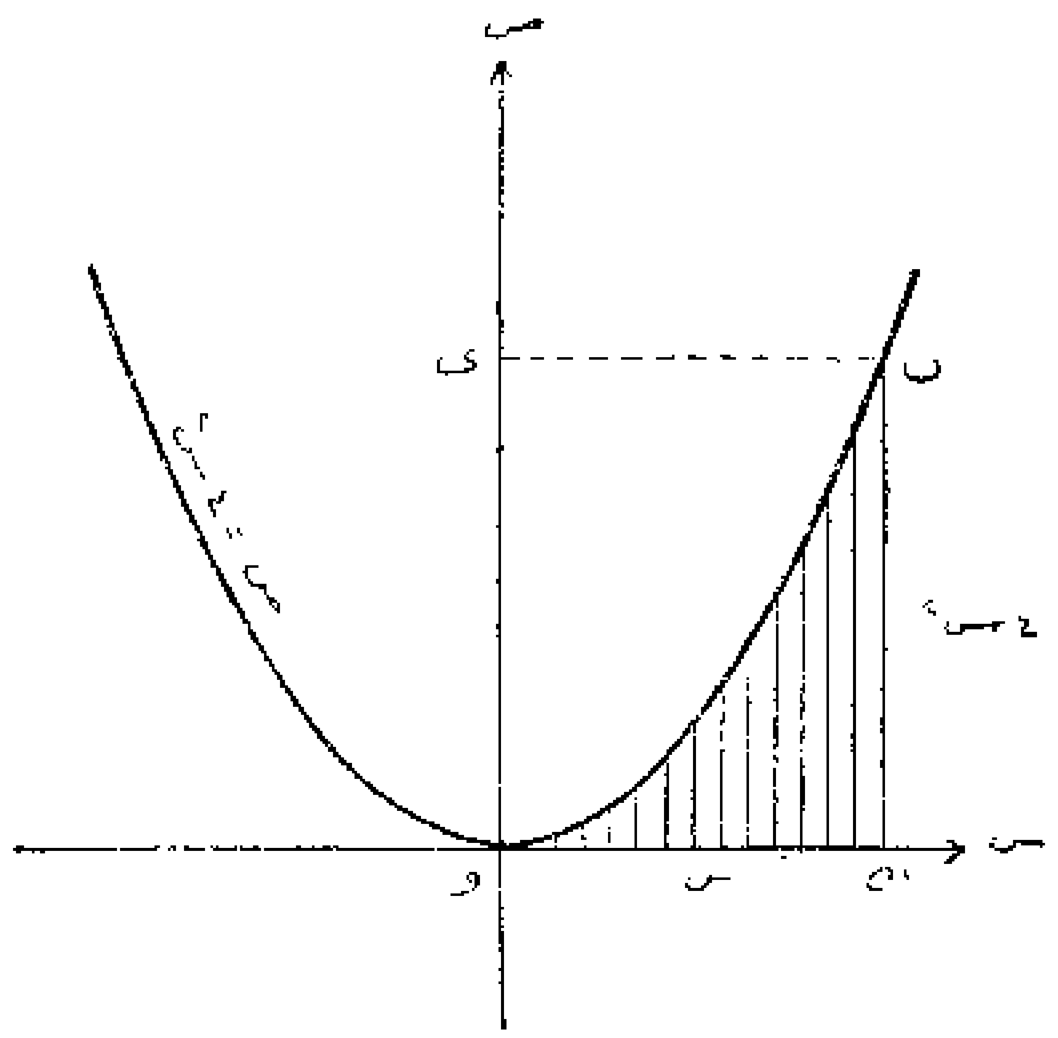


شكل (٨٧)

فى هذه الحالة . والمساحة المغطاة من س = ٠ إلى س = ٥ تكون فى هذه الحالة $\frac{1}{2}$ × ٤ × ٥ × ٥ أو ٥٠ وحدة مربعة والمساحة المغطاة بين س = ٠ س = ٩ تكون ١٦٢ وحدة مربعة وهكذا.

الجزء المظلل من شكل ٨٨ يبين المساحة المغطاة بالرسم البيانى للمعادلة ص = ٤ س^{2} من نقطة الأصل إلى الاحداثى الصادى المقام على بعد س وحدة من نقطة الأصل وهنا الدالة الصادية هى ٤ س^{2}

وقد رأينا كيف وجد واليس أنه يمكن اعتبار هذه المساحة $\frac{١}{٣}$ مساحه. مساحة المستطيل و ل ب ى ، ومساحة المستطيل هى س ص ولكننا نستطيع أن نضع ٤ س^{٢} بدلا من ص لأن أى إحداثى صادى فى هذا الشكل يساوى ٤س^{٢} وعليه فمساحة المستطيل هى ٤س^{٣} ومن ذلك ينتج أن الدالة المساحية للجزء المظلل هى $\frac{١}{٣}$ × ٤ س^{٣} وإذا أردنا إيجاد المساحة المظللة حتى النقطة س = ٥



شكل (٨٨)

فإن الدالة المساحية تكون $\frac{١}{٣}$ × ٤ × ٥ × ٥ × ٥ أو $\frac{٢}{٣}$ ١٦٦ وحدة مربعة.

والآن نجمع الحقائق التى اكتشفناها فى الجدول الآتى :

عندما كانت الدالة الصادية	كانت الدالة المساحية
٤ س^{٠}	$\frac{١}{١}$ × ٤ س^{١}
٤ س^{١}	$\frac{١}{٢}$ × ٤ س^{٢}
٤ س^{٢}	$\frac{١}{٣}$ × ٤ س^{٣}

وتوحى هذه النتائج بوجود قانون يسير بمقتضاه هذا « النمط » من الدوال المساحية . ويسمى هذا القانون أحياناً « قانون واليس » ولابد من أن القارىء قد أدرك كيف تتكون الداله المساحية من الدالة الصادية ، ويمكن الآن إيجاد الدالة المساحية لكل من الدوال الصادية للرسم البيانى ص = ٤ س^{٣} ، ص = ٤ س^{٤} وإذا تم له ذلك فقد استوعب خطوة أساسية فى حساب التكامل (نجد الأجوبة فى معرض الحديث بعد هذا) .

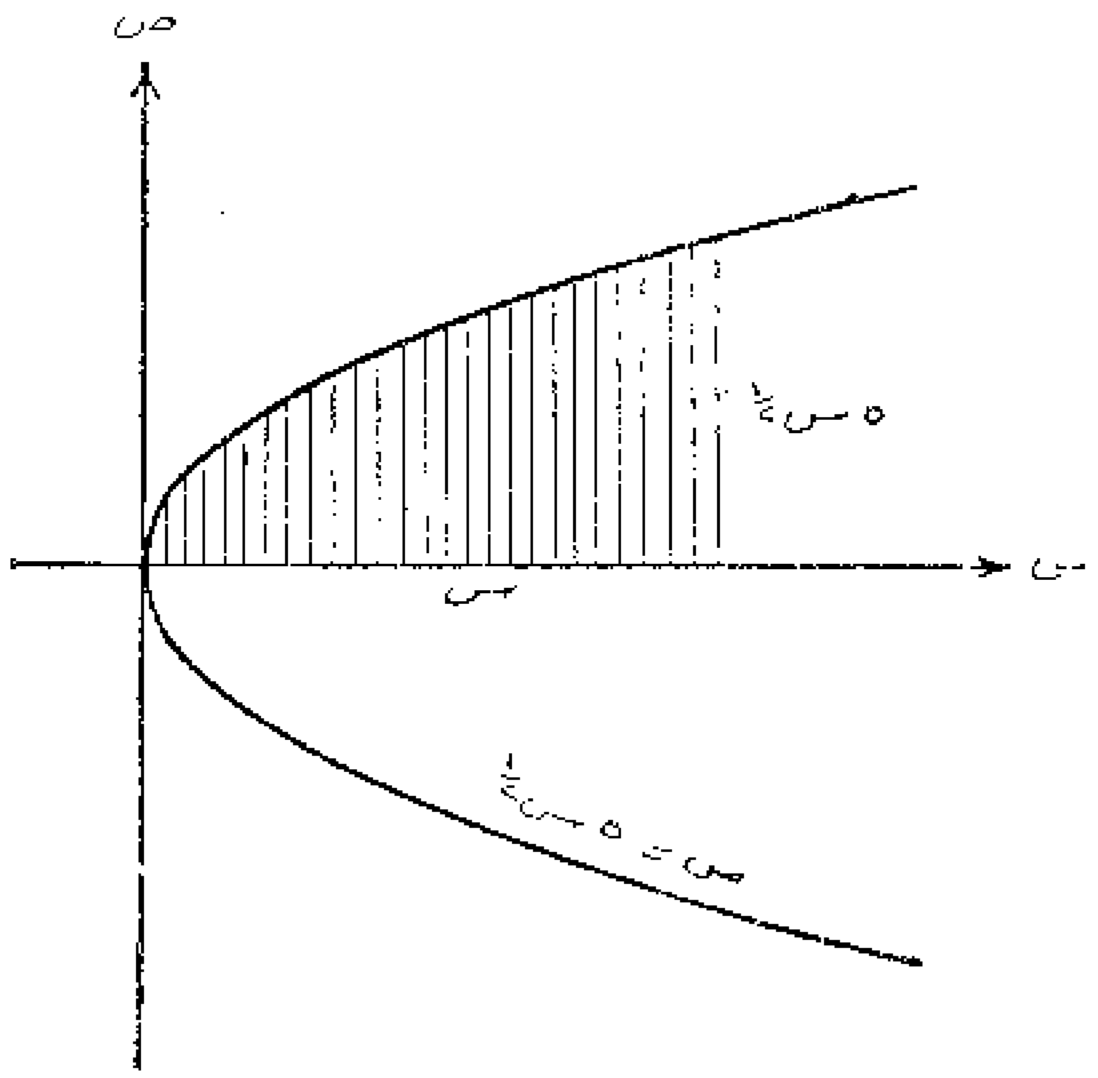
وتقدم واليس خطوة أخرى ووجد ما نسميه الدالة المساحية فى علاقتها بالدالة الصادية للرسم ص = م $\sqrt{\text{س}}$ حيث م ثابت (لم يستخدم واليس كلمة دالة،فأول من استخدمها هو ليبنتز عام ١٦٩٤ ولكنها كانت عنده ذات معنى آخر وكان جون برنولى هو الذى استعملها بمدلولها الحالى عام ١٧١٨) .

ربما أراد القارىء أن يحاول الوصول بنفسه إلى النتائج التى وصل إليها واليس فى بحثه عن المساحة الدالية المتعلقة بالدالة الصادية للمعادلة ص = ٥ س$^{\frac{1}{2}}$ التى تعادل ص = ٥ $\sqrt{\text{س}}$ (إذا كان القارىء يجهل حساب التفاضل والتكامل فأجوبة الدالتين السابقتين هما $\frac{1}{4}$ × ٤ س^{٤} ، $\frac{1}{5}$ × ٤ س^{٥}) وبعد محاولة من جانب القارىء لإيجاد الدالة المساحية للمعادلة ص = ٥ س$^{\frac{1}{2}}$ عليه أن يقارن إجابته بما يلى :

الجزء المظلل من شكل ٨٩ يبين المساحة المغطاة برسم ص= ٥ س^{٢} من نقطة الأصل إلى الاحداثى الصادى المقام على بعد س وحدة من نقطة الأصل .

بقانون واليس نجد أننا نحصل على المساحة الدالية بالطريقة التالية :

نحصل على الكسر فى الجواب بقلب الكسر غير الحقيقى الذى يكبر قوة س فى الدالة الصادية بواحد (قارن هذا بالأجوبة الثلاثة فى الجدول) .



شكل (٨٩)

قوة س الجديدة ستزيد عن قوة س فى الدالة الصادية بمقدار ١ وعليه تكون الدالة المساحية $\frac{٢}{٣} \times ٥ س^{\frac{٣}{٢}}$. وهذا معناه أنه إذا كانت محدودة من جهة اليمين بالاحداثى الصادى للنقطة س = ٤ فإن هذه المساحة تكون $\frac{٢}{٣} \times ٥ \times (٤)^{\frac{٣}{٢}} = \frac{٢}{٣} \times ٥ \times ٨$ أى إنها تساوى $٢٦\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة .

وإذا كانت س = ٩ فسنجد أن المساحة تساوى ٩٠ وحدة مربعة . (أما إذا شعر القارىء بأى شك فى الموضوع فعليه أن يدير الشكل بحيث يشبه شكل ٨٥ وبتطبيق الطريقة المستخدمة فى ذلك الشكل يجد أن المساحة المحصورة تحت الجزء الأيمن من المنحنى (فى وضعه الجديد) يساوى $\frac{١}{٣} (٥س^{\frac{١}{٢}}) \times$ س أو $\frac{١}{٣} \times ٥ \times س^{\frac{٣}{٢}}$.

وحيث إن مساحة المستطيل فى هذا الحل هى ٥ س$^{\frac{٣}{٢}}$ فمساحة نصف القطعة المكافئة (التى نبحث عنها فى شكل ٨٩) نوجدها بالطرح فنجد أنها

$\frac{٢}{٣} \times$ ٥ س$^{\frac{٣}{٢}}$.

عمم واليس هذا القانون بحيث يمكن تطبيقه فى إيجاد الدالة المساحية المتعلقة بالدالة الصادية المحتوية على أى عدد من الحدود ؛ فمثلا إذا كانت الدالة الصادية هى س^{٢} + ٣ س — ٤ فإن الدالة المساحية تكون $\frac{١}{٣}$س^{٣} + $\frac{٣}{٢}$س^{٢} — ٤س ومعنى ذلك أنه استطاع إيجاد الدالة المساحية للدوال الصادية مثل (١ — س^{٢})^{٢} أو (١ — س^{٢})^{٣} حيث إنه يعرف كيف يوجد مفكوك المقدار ذى الحدين الذى قوته العدد المكتوب خارج الأقواس عدد صحيح موجب . فمثلا :

(١ — س^{٢})^{٢} = ١ — ٢ س^{٢} + س^{٤}

، (١ — س^{٢})^{٣} = ١ — ٣س^{٢} + ٣ س^{٤} — س^{٦} وهكذا .

وبتطبيق هذا القانون استطاع بسهولة أن يوجد المساحات المحصورة بين المحور السينى والاحداثى الصادى عند النقطة س = ١ والرسم البيانى للمعادلات .

ص = (١ — س^{٢})^{٠} أى ص = ١

ص = (١ — س^{٢})^{١} أى ص = ١ — س^{٢}

ص = (١ — س^{٢})^{٢}

ص = (١ — س^{٢})^{٣}

وهكذا . . .

وقد سبق أن رأينا أن معادلة الدائرة هي $س^{٢} + ص^{٢} = ا^{٢}$ حيث ا نصف قطر الدائرة . فإذا كانت ا = ١ فإن هذه المعادلة تصبح $س^{٢} + ص^{٢} = ١$ ويمكن كتابتها على الصورة $ص^{٢} = ١ - س^{٢}$ أو $ص = (١ - س^{٢})^{\frac{١}{٢}}$.

ووجد واليس أنه إذا استطاع إيجاد العلاقة بين الدالة المساحية والدالة الصادية $(١ - س^{٢})^{\frac{١}{٢}}$ لأمكنه إيجاد مساحة الدائرة من الجواب . ولكن مساحة الدائرة هي ط $نق^{٢}$ وإذا كانت نق = ١ فإن المساحة تصبح ط في حين أن مساحة نصف الدائرة هي $\frac{ط}{٢}$.

وهنا وقع واليس في إشكال . سبق أن رأينا أنه يمكن فك المقدار ذى الحدين بأس صحيح موجب ، أما إذا كان الأس كسرياً فكيف تتم عملية الفك ؟ (هذا المشكل الذى ندرسه الآن أدى بنيوتن إلى اكتشاف طريقة فك بعض المقادير ذات الحدين بأس كسرى) وفكر واليس في أنه يستطيع الوصول إلى جوابه إذا حسب الداول المساحية لسلسلة من المنحنيات كالتي سبق أن ذكرناها. وإذا طبق القارىء قانون واليس على الدوال العادية الموجودة بالقائمة السالفة الذكر وأوجد مساحاتها المحصورة بين س = ٠ ، س = ١ لحصل على النتائج الآتية :

المعادلة	المساحة
$ص = (١ - س^{٢})^{٠}$	١
$ص = (١ - س^{٢})^{١}$	$\frac{٢}{٣}$
$ص = (١ - س^{٢})^{٢}$	$\frac{٨}{١٥}$
$ص = (١ - س^{٢})^{٣}$	$\frac{٤٨}{١٠٥}$

وقال واليس إنه حيث إن الدالة الصادية (١ — س^{٢})$^{\frac{١}{٢}}$ تقع بين الدالتين الصاديتين (١ — س^{٢})^{٠} ، (١ — س^{٢})^{١} فمن حقه إدخال قيمة لدالتها المساحيـة تقع بين ١ ، $\frac{٢}{٣}$ مستنداً في حساباته على « الدرجات » في سلسلة المساحات ١ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٨}{١٥}$ ، $\frac{١٦}{٣٥}$ أـخ . ولكنه بطبيعة الحال لم يفلح في إيجاد جواب دقيق ولكن محاولته أظهرت « نمطاً » عددياً عجيباً . وإليك هذا النمط :

$$\frac{ط}{٢} = \frac{٢ \times ٢ \times ٤ \times ٤ \times ٦ \times ٦ \times ٨ \times ٨ ....}{١ \times ٣ \times ٣ \times ٥ \times ٥ \times ٧ \times ٧ \times ٩ ....}$$

فإذا ضاعفنا الحد الأيسر لحصلنا على قيم متتالية تقترب من قيمة ط . وقيمة ط في الوضع الحالي هو ٢و٩٠٠٠٠٠ وهي صغيرة جداً . فإذا وضعنا حداً آخر في البسط (١٠) وحداً آخر في المقام (٩) لأصبحت قيمتها ٣و٣ وهذه القيمة كبيرة جداً .

نعود فنضع حداً آخر في البسط (١٠) وحداً آخر في المقام (١١) فتصبح القيمة ٣و٠٠ أي إنها ما زالت صغيرة ، إلا أنها أقرب من ٢و٩٠٠٠ أما إذا وضعنا حداً آخر في البسط والمقام لحصلنا على ٣و٢٠٠٠ وما زالت كبيرة . قارن هذا « النمط » العددي « بنمط » الإغريق . ووجد واليس طريقة جديدة في الاقتراب من قيمة ط التي تعتبر مثل $\sqrt{٢}$ في أنها « غير قياسية » ، وكان واليس قد طلب إلى صديقه لورد برونكر Lord Brouncker — الذي كان أول مدير للجمعية الملكية بلندن — حساب قيمة ط الحقيقية ، وبالطبع لم ينجح في إيجاد قيمتها الحقيقية وبعث إلى واليس بالكسر التالي :

$$ط = \cfrac{٤}{١ + \cfrac{١}{٢ + \cfrac{٩}{٢ + \cfrac{٢٥}{٢ + \cfrac{٤٩}{٢ + \cfrac{٨١}{٢ + \text{الخ}}}}}}}$$

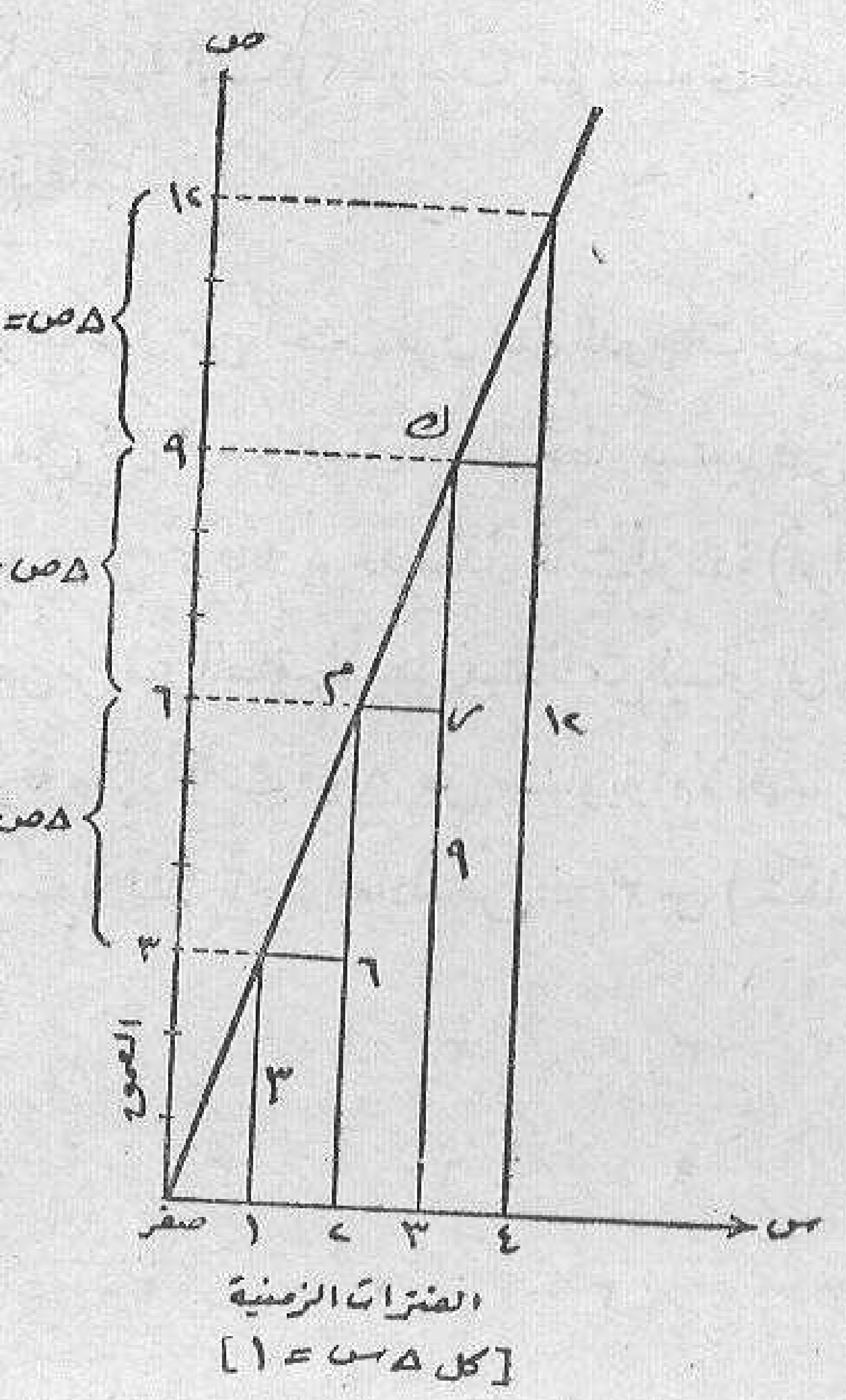
كانت ط موضع بحث الرياضيين ودراساتهم آلافا من السنين وظلوا يجاهدون منذ ٢٢٠٠ قبل المسيح إلى ١٨٨٢ ميلادية ، أى نحو ٤٠٠٠ سنة بحثاً وراء نوع العدد الذى تنتمى إليه ط . من المعروف أنها عدد غير قياسى ولكنها تختلف عن عدد مثل $\sqrt{٢}$ فى أنها لا يمكن أن تكون جـذرا لمعادلة مثل : $٧ س^{٥} - ٢ س^{٤} + ٣ س^{٢} + ٩ س + ٨ = ٠$ ولذا عرفت ط بأنها عدد لا يمكن الحصول عليه بعمليات جبرية . ومن بين الرياضيين الذين حاولوا دراسة خصائص ط كان أرشميدس وبطليموس وفيبونا كى وڤيتا وفرمات وهيوجنز (حوالى ١٦٧٠) وواليس ونيوتن وليبنتز وأسرة برونولى (حوالى ١٧٠٠) وأويلر حوالى (١٧٥٠) ولمبرت (رياضى ألمانى حوالى ١٧٥٠) ولاجرانج (حوالى ١٧٧٥) وليندمان (من جامعة ميونخ حوالى ١٨٧٥) ولم ينجح ليندمان إلا فى ١٨٨٢ فى إثبات أن ط انتقالية وعلى ذلك فإنه لا يمكن بأى حال من الأحوال إيجاد القيمة الحقيقية لمساحة الدائرة .

ولنترك مؤقتا قصة نمو حساب التكامل لنعود إليه بعد أن نرى كيف نما حساب التفاضل .

وخدمة للقارىء الذى يجهل حساب التفاضل والتكامل نخرج بعض الشىء عن الموضوع لندرس وجهة أخرى من الدالة الصادية للرسوم البيانية وهى ما زالت عالقة بالأذهان . فإذا استوعبنا التدليل البسيط الذى نقدمه فى السطور القليلة التالية نكون قد فهمنا الفكرة الأساسية التى بنى عليها كل من حسابى التفاضل والتكامل .

انفرض أن الماء ينسكب بانتظام فى خزان على شكل متوازى المستطيلات، وأننا نقيس عمق الماء فى فترات منتظمة منذ اللحظة التى بدأ الماء ينسكب فيها فى الخزان . فحيث إن هذه الفترات الزمنية متساوية يمكننا أن نمثلها بأطوال متساوية على مستقيم وسنستخدم المحور السينى لهذا الغرض. فى نهاية الفترة الزمنية الأولى (أى عند النقطة س = ١) نقيم عموداً يمثل عمق الماء عند نهاية هذه الفترة وعموداً آخر عند س = ٢ يمثل عمق المـــاء عند نهاية هذه الفترة الزمنية الثانية وهكذا . وبهذه الطريقة يمكننا رسم مستقيم يمس قمة كل من هذه الأعمدة . هذا المستقيم هو الرسم البيانى الذى يبين عمق الماء فى أى لحظة من الزمن الذى تحت دراستنا ، وتكون هـــذه الأعمدة بعض من الاحداثيات الصادية المتعددة لهذا الرسم البيانى .

ومن الواضح أنه نظراً لميل الرسم لأعلى من اليسار إلى اليمين فإن قيمة الدالة تتزايد تزايداً مطرداً .



شكل (٩٠)

ونعرف ذلك حيث إننا نضيف نفس عمق الماء فى كل فترة زمنيه فى هذه الحالة ، فإن معدل الزيادة فى العمق يظل ثابتا فى أثناء العملية . ويتضح هذا من أن الفرق بين كل احداثيين صاديين متتاليين فى الرسم (حيث البعد بين كل احداثيين صاديين متتاليين ثابت) ثابت لا يتغير . (وتوفيراً للجهد نستخدم الرمز Δ ص للدلالة على الفرق بين طولى احداثين صاديين متتاليين ، Δس للفرق بين أحداثيين سينيين متتاليين مأخوذا على المحور السينى) .

ومن شكل ٩٠ نرى أن قيمة Δ ص ثابتة وحيث إن قيمة Δ س ثابتة

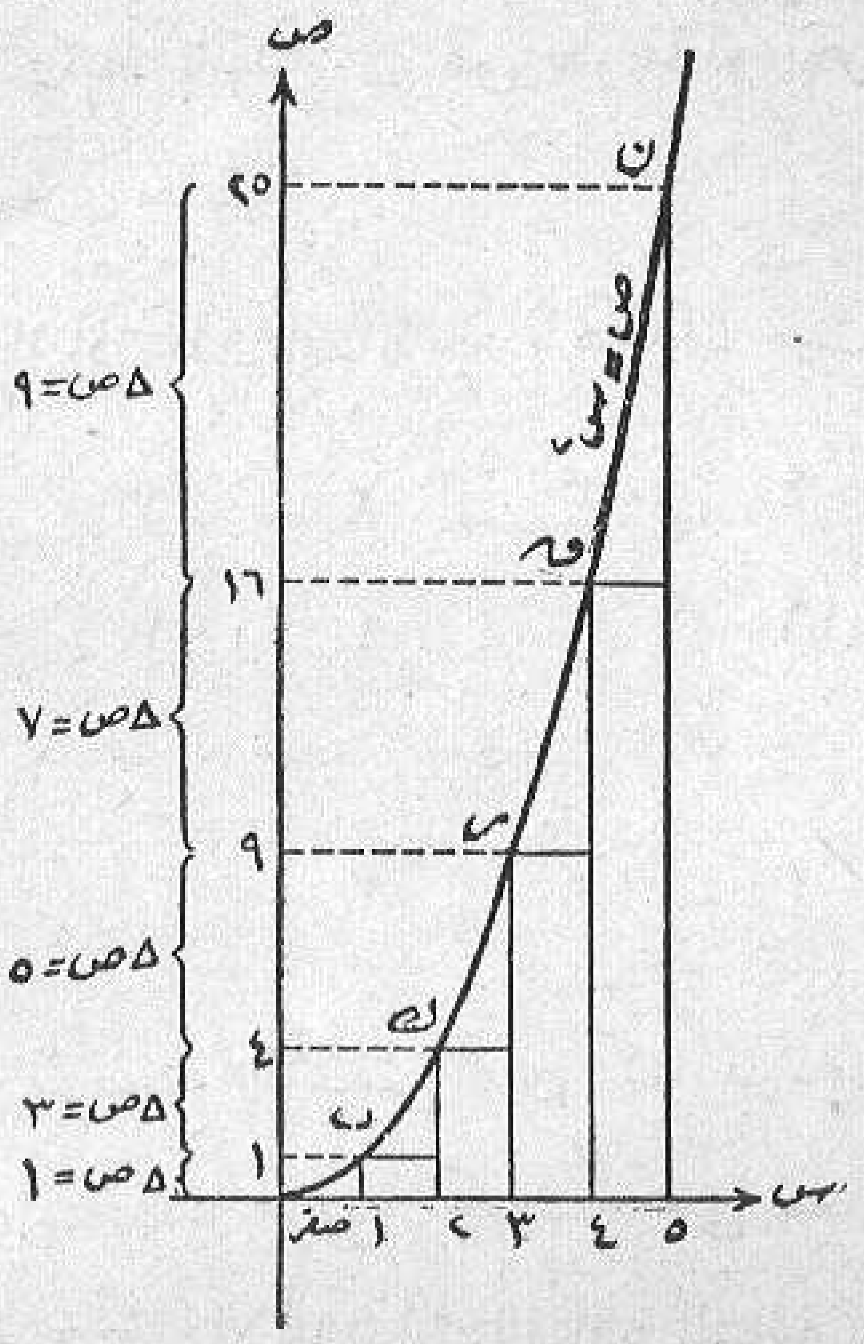
كذلك فإنه يمكن تشبيه الشكل بدرجات سلم تتساوى فيه عمق الدرجات كما تتساوى وارتفاعاتها .

وعليه يمكن وضع عرق من الخشب فوق هذه الدرجات بحيث يلامس حرف كل درجة، وعليه متى كان الرسم البيانى للدالة خطا مستقيما فهى دلالة واضحة على أن الميل لا يتغير، ومن ثم فإنه يوجد معدل ثابت للزيادة (أو النقص) فى قيمة الدالة (يتبين النقص من ميل المستقيم لأسفل مبتدئا من اليسار إلى اليمين) ولا داعى للجوء إلى الرسم لمعرفة ما إذا كانت قيم △ ص متساوية أم لا، فهذا يمكن اكتشافه عن طريق الجبر بسهولة فمثلا نأخذ المعادلة ص = ٣ س (شكل ٩٠) :

قيمة س	٠	١	٢	٣	٤
قيمة ص المناظرة	٠	٣	٦	٩	١٢
قيمة △ ص		٣	٣	٣	٣

والآن نعتبر سلما رياضياً يصعب تسلقه لأنه ، على الرغم من تساوى أعماق درجاته (△ س) إلا أن ارتفاعات هذه الدرجات (△ ص) مختلفة.

ولو أن الحل الجبرى أسهل بكثير إلا أننا سنرسم الخط البيانى للمعادلة ص = س^{2} وحتى يكون المثال عمليا نفترض أن كرة تتدحرج فوق مستوى مائل خشن من السكون وأن عدد الأقدام التى نزلتها فى س ثانية تتعين من المعادلة : ص = س^{2} . نعلم من ملاحظاتنا أنه ما دام الطريق خالياً من العقبات فإن سرعة الكرة تزيد فى أثناء تدحرجها . فمثلا فى ١ ثانية تتدحرج ١^{2} قدم ، وفى ٢ ثانيتين تتدحرج ٢^{2} أو ٤ أقدام وفى ٣ ثوان تتدحرج ٣^{2} أو ٩ أقدام وهكذا .



شكل (٩١)

ولم نعد نفكر فى عرق الخشب الذى يمكن أن يلامس أحرف درجات سلمنا الرياضى لأن الرسم البيانى جزء من قطع مكافىء . وحيث إن قيم ∆ ص ليست متساوية فإن معدل الزيادة فى ص ليس ثابتاً . أما إذا رسم رسم بيانى آخر تتساوى فيه المسافات بين الاحداثيات الصادية ويمثل قيم ص وهو ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ فإن الفروق بين طولى أى قيمتين متتاليتين من قيم ∆ ص وسنعبر عن هذا التعبير مستقبلا بالرمز ∆٢ص (أو الفرق الثانى بين القيم الاحداثيات الصادية) تكون متساوية . بعبارة أخرى هذا الرسم البيانى الأخير يظهر كأنه درجات سلم تميل لأعلى من اليسار إلى اليمين ويمكننا تصور العرق الخشبى الملامس لأحرف الدرجات . وهذا يدل على أن معدل نزول الكرة على المستوى المائل يزداد بانتظام ، أو بعبارة أخرى أنها تدحرج بعجلة

ثابتة . فالسرعة إذن ترتبط بالمقدار Δ ص بطريقة أو أخرى والعجلة ترتبط بالمقدار $\Delta_{٢}$ ص كما سنرى مستقبلا .

ويرى هذا بسهولة إذا حلت المسألة جبريا هكذا . حيث إن ص = س^{٢}

قيمة س	٠	١	٢	٣	٤	٥
قيمة ص المناظرة	٠	١	٤	٩	١٦	٢٥
قيمة Δ ص	١	٣	٥	٧	٩	
قيمة $\Delta_{٢}$ ص		٢	٢	٢	٢	

في خروجنا عن الموضوع الأساسي الذي كنا ندرسه قفزنا بالقارىء من القرن السابع عشر واستخدمنا الرموز الحديثة حتى يتعود القارىء العام التفكير في « الفروق في قيم الاحداثيات الصادية المتتالية » بالنسبة لمنحنى .

وهذا هو أساس حساب التفاضل الذي يوضح لنا الحقائق التي تتعلق بمعدل تغير قيمة كمية من الكميات . فإذا علمنا ـ أو استطعنا معرفة — المسافة التي يقطعها جسم متحرك في زمن معلوم فإننا نستطيع إيجاد متوسط معدل تغير المسافة أي سرعة الجسم لأي فترة زمنية معلومة ، وليس ذلك فقط ، فهذا أمر سهل ، بل يمكننا إيجاد سرعته في أي لحظة معلومة ، وهذا ليس بالأمر السهل .

نفكر مثلا في الكرة التي تتدحرج في مثالنا السابق . في أثناء الثانية الأولى تدحرجت الكرة ١ قدم فيكون متوسط سرعتها في أثناء هذه الفترة الزمنية هو ١ قدم / ثانية . ولكن سرعتها في بدء حركتها لم تكن قدما بل أقل من ذلك ، إذ أنها بدأت من سكون . ففي نهاية الثانية الأولى لا بد وأن سرعتها زادت على ١ قدم / ثانية وإلا لما كان متوسط سرعتها ١ قدم / ثانية .

وإذا استغرقنا ساعتين لقطع ٦٠ ميلا فى سيارة فإن متوسط سرعتنا هو خارج قسمة المسافة على الزمن اللازم لقطعها ، أى إن متوسط السرعة $= \frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن اللازم}}$ ومن الواضح أن متوسط سرعتنا هو ٣٠ ميل / ساعة .

ولا يعنى هذا أننا كنا نقطع ٣٠ ميل / ساعة منذ لحظة قيامنا إلى انتهاء الرحلة . إذا تصورنا رحلة لمسافة ٦٠ ميلا فوق طريق سهل معبد بعيداً عن إشارات المرور أو سيارات أخرى فيمكننا أن نتصور أننا نبدأ من السكون ونسير بهدوء وانتظام وبعجلة طول المسافة إلى أن نكملها فى ساعتين . من الواضح أن سرعتنا تزيد ببطء من صفر ميل / ساعة إلى ٣٠ ميل / ساعة وتصبح أكبر بكثير من ٣٠ ميل / ساعة فى نهاية الرحلة إذا كنا نريد متوسطاً قدره ٣٠ ميل / ساعة طوال المدة .

فى شكل ٩٠ متوسط معدل الزيادة فى عمق الماء بين العمقين عند النقطتين م ، ك هو $\frac{\text{الزيادة فى العمق بين م ،ك}}{\text{الزمن اللازم لهذه الزيادة}}$ ولكن الزيادة فى العمق بين م ، ك هى $\triangle$ ص والزمن اللازم لها هو $\triangle$ س أى إن متوسط معدل الزيادة فى العمق بين م ،ك هو $\frac{\triangle \text{ص}}{\triangle \text{س}}$. ومن الواضح من شكل ٩٠ أنه فى هذه الحالة المعينة $\frac{\triangle \text{ص}}{\triangle \text{س}}$ ثابت فى أثناء الثوانى الأولى والثانية والثالثة والرابعة . وعليه فمعدل الزيادة فى عمق الماء لا يعتبر فى أثناء العملية المرسومة فى هذا الرسم البيانى .

أما فى شكل ٩١ فنرى أن $\frac{\triangle \text{ص}}{\triangle \text{س}}$ يزداد فى الثوانى الأولى والثانية والثالثة

والرابعة على التوالى من سير الكرة إلى أسفل على المستوى المائل . وإن قولنا أن تقطع الكرة فى الفترات المتتالية مسافات كل منها أكبر من سابقتها هو طريقة أخرى للتعبير عن أن متوسط سرعتها فى أثناء الفترة الثالثة يزداد ؛ فمثلا بين و ، م كان متوسط سرعتها ١ قدم / ثانية ، بين م ، ك كان ٣ قدم / ثانية وبين هـ ، ر كان ٥ قدم ثانية وبين س ، ں كان ٧ قدم / ثانية وبين ? ، ت كان ٩ قدم / ثانية ولكن عند م كانت سرعتها أكبر من ١ قدم ثانية وعند ك كانت أكبر من ٣ قدم / ثانية . . وعند ت كانت أكبر من ٩ قدم / ثانية . ومشكل إيجاد السرعة عند نقطة مثل هذه يمكن حله ببساطة غريبة عن طريق حساب التفاضل . وسنرى كيف حله نيوتن كما حل مسائل عديدة أخرى عن طريق حساب التفاضل .

ولقد تجنبنا فى سرد قصتنا عن أعمال واليس الحديث ـ كما فعل هو نفسه ـ عن أى شكل « كما لو » كان مكونا « من عدد لا نهائى من المستقيمات المتوازية فى تناسب عددى» . هنا كان يسير على هدى كافالييرى . كان أهم ما قدمه واليس نحو تطور حساب التفاضل هو تطويره أو تهذيبه للفكرة الحسابية عن «النهاية» وتطبيقه التحليل الذى مكن من إيجاد الدالة المساحية من الدالة الصادية بتطبيق قانون جبرى عام .

وهكذا نبتت وترعرعت البذرة التى زرعها أرشميدس،وكان النبات الغض يبدو للبعض ساما قاتلا،ولكن بمهارة وعبقرية رجلين ومساعدة آخرين أمكن للنبات الصغير أن ينمو ويتطور إلى أغنى محصول حصده الرياضيون .

الفصل السابع

نيوتن

« لا أعرف كيف يرانى العالم ، ولكننى أرى نفسى وكأننى صبى يلعب على شاطىء البحر ويسلى نفسه بمحاولة العثور على حصاة أكثر نعومة من العادية أو صدفة أكثر جمالا ، فى حين يظل بحر الحقيقة لغزاً غامضا أمامى »

« مذكرات بروستر عن نيوتن »

فى أكتوبر من عام ١٦٦١ سافر شاب تتراوح سنه بين الثامنة عشرة والتاسعة عشرة إلى كمبردج ووجد طريقه إلى كلية ترينيتى ، وكان عميد الكلية قد قبله فى شهر يونيو من نفس السنة بكليته العظيمة التى أسسها قبل ذلك بمائة عام هنرى الثامن ملك إنجلترا . وفى الثامن من يوليو كان قد قبل طالباً بجامعة كمبردج وذهب ليحضر فصل أكتوبر الدراسى وليبدأ حياته هناك كطالب مجهول .

لم يكن يحلم وهو يجتاز بوابة كنج التى زينها تمثال الملك مؤسس الكلية بأن هناك حجرات على أحد جانبى البوابة سوف يحج الزوار إليها بعد بضعة قرون لأنه كان يقيم فيها .

ولما دخل الفناء ورأى التمثال الذى أقيم فى ذكرى توماس نفيل الذى كان

عميداً للكلية من ١٥٩٣ — ١٦١٣ ، ورأى لأول مرة كنيسة الكلية التى بنيت فى عهد الملكة مارى ، لم يخطر بباله أن تمثاله هو أيضاً سيوضع فى تلك الكنيسة وأن واحداً من أعظم الشعراء سيصف التمثال بقوله :

« شيد من المرمر لعقل دائم الأسفار فى بحار غريبة من الفكر المجرد »

ولا شك أنه كان يشعر بالغضب والخجل معا لو أنه عرف أن بوب Pope تغنى به قائلا :

قوانين الطبيعة والطبيعة نفسها   أخذت من الليل الستار

والله قال لنيوتن « كن » فكان   واختفى الليل وانبثق النهار

وحيث إنه لم يكن قد قرأ كتاباً واحداً فى الرياضيات فلم يكن يتصور أنه سيصبح أستاذ الرياضيات بكمبردج بعد ثمان سنوات من يوم دخوله هذه الجامعة، وأنه سوف يؤلف كتاباً فى العلوم والرياضيات التطبيقية يصفه لابلاس Laplace الرياضى الفرنسى بعد ظهوره بمائة عام (وكان لابلاس لا يمدح إلا بقدر) بأنه « ألمع ما أنتجت عبقرية الإنسان » .

ولو كانت له القدرة على كشف الغيب لعجب من أن رجلا عين أستاذاً للفلك فى جامعة اكسفورد فى السنة السابقة أوشك على تغيير مهنته ليصبح أشهر مهندسى إنجلترا المعماريين . ولبدا له من غير المعقول أن كريستوفررن Christopher wren وهو منهمك فى بناء كاتدرائية سانت بول الجديدة لتحل محل الكاتدرائية القديمة التى فتكت بها نار لندن الكبرى عام ١٦٦٦ سيجد من الوقت ما يمكنه من تصميم مكتبة فخمة جديدة لكلية ترينيتى ، والأدهش من ذلك أنه فى عام ١٩٤٨ كان أعز ممتلكات من كنوز تلك المكتبة هو مخطوطاته

فى الرياضيات والعلوم ، وتلك الموضوعات التى كان فى أكتوبر ١٦٦١ يجهلها كل الجهل.

ولد اسحق نيوتن Isaac Newton يوم عيد الميلاد عام ١٦٤٢ (وهى السنة التى توفى فيها جاليلو والتى قامت فيها الحرب الأهلية بين تشارلس الأول والبرلمان الانجليزى) فى قرية وولز ثورب الصغيرة فى مقاطعة لانكشير على بعد ستة أميال من مدينة جرانثام . ولم ير أباه ، فقد مات أبوه — وكان مزارعاً متواضعاً عرف بإسرافه — قبل أن يولد ابنه ، وكان الطفل ضعيف البنية حتى خيف عليه ألا يعيش . وكانت هذه أول فرصة من الفرص الكثيرة التى أتيحت له لإدهاش الآخرين ، وكما حدث فى كل هذه الفرص المتاحة استغل هذه الفرصة الأولى استغلالا طيباً فعاش إلى أن بلغ الخامسة والثمانين وظل متمتعا بقوة بصره وتاج غزير من الشعر الأبيض ، وكان شعره قد ابيض وهو فى الثلاثين من عمره .

وقد حرمه ضعف صحته وهو طفل من الاشتراك فى الألعاب الصبيانية العنيفة ، فتعلم أن يسلى نفسه بعمل اللعب الميكانيكية مثل نماذج متحركة للساقية ، ولطاحونة الهواء ، وعربة صغيرة يحركها سائق ، وطيارات دلت فى بنائها على ذكاء مخترعها وكان لهذه القدرة الميكانيكية مقترنة بحسن التصرف أثرها فى حياته فيما بعد حين كان يجرى تجاربه على العدسات وفى دراسته للضوء ، كما أن المتعة التى كان يشعر بها وهو يخلق الأشياء لم تفارقه طوال حياته .

وكل ما هنالك أنه انتقل من ابتكار الأشياء الميكانيكية إلى خلق الآراء والقوانين العامية ، وبذا استغنى بالبحث عما يسليه أو يشغله ، فقد وجد

فى الرياضيات والعلوم ، وتلك الموضوعات التى كان فى أكتوبر ١٦٦١ يجهلها كل الجهل.

ولد اسحق نيوتن Isaac Newton يوم عيد الميلاد عام ١٦٤٢ (وهى السنة التى توفى فيها جاليليو والتى قامت فيها الحرب الأهلية بين تشارلس الأول والبرلمان الانجليزى) فى قرية وولز ثورب الصغيرة فى مقاطعة لانكشير على بعد ستة أميال من مدينة جرانثام . ولم ير أباه ، فقد مات أبوه — وكان مزارعاً متواضعاً عرف بإسرافه — قبل أن يولد ابنه ، وكان الطفل ضعيف البنية حتى خيف عليه ألا يعيش . وكانت هذه أول فرصة من الفرص الكثيرة التى أتيحت له لإدهاش الآخرين ، وكما حدث فى كل هذه الفرص المتاحة استغل هذه الفرصة الأولى استغلالا طيباً فعاش إلى أن بلغ الخامسة والثمانين وظل متمتعا بقوة بصره وتاج غزير من الشعر الأبيض ، وكان شعره قد ابيض وهو فى الثلاثين من عمره .

وقد حرمه ضعف صحته وهو طفل من الاشتراك فى الألعاب الصبيانية العنيفة ، فتعلم أن يسلى نفسه بعمل اللعب الميكانيكية مثل نماذج متحركة للساقية ، ولطاحونة الهواء ، وعربة صغيرة يحركها سائق ، وطيارات دلت فى بنائها على ذكاء مخترعها وكان لهذه القدرة الميكانيكية مقترنة بحسن التصرف أثرها فى حياته فيما بعد حين كان يجرى تجاربه على العدسات وفى دراسته للضوء ، كما أن المتعة التى كان يشعر بها وهو يخلق الأشياء لم تفارقه طوال حياته .

وكل ما هنالك أنه انتقل من ابتكار الأشياء الميكانيكية إلى خلق الآراء والقوانين العلمية ، وبذا استغنى بالبحث عما يسليه أو يشغله ، فقد وجد

تسليته فى البحث فى أسرار الكون ، وكان ذلك أنسب ما يشغل بال رجل من طابعه ، وكان من أثر بحثه وراء حل للغز الكون أنه تعمق فى الفلسفة والدين بدرجة جعلته يتجه نحو الحقائق الرياضية « . . . التى صادقت النجوم وزفت إلى العقل فى أنقى رباط من العقل لا تهتز لمكان أو زمان » . ليجد فيها خلاصاً وتسلية .

كانت مشاغله كلها ذهنية ، فلم يتزوج ، ولم يهتم بمظهر أو ملبس ، وكان الأكل يجهز له فلا يمسه حين يكون ذهنه منصرفاً تماماً إلى مصارعة دقائق واحدة من مسائله .

ومن حسن الحظ أنه — على عكس بسكال — تغلب على ضعف الطفولة ، وكان قادراً ، حتى السنوات الأخيرة من حياته ، على تحمل الإجهاد الذهنى والجسمانى الشديد الذى كانت تتطلبه الكتابة فى موضوعات عميقة ساعات طويلة كانت تصل أحيانا إلى ثمان عشرة أو تسع عشرة ساعة متصلة . وكان ، مثل أرشميدس ، يقوى على تركيز فكره لدرجه كبيرة . كان عقله يطبق على مسألة كما لو كان مصيدة حديدية ، ولا يسمح لكائن أو أى شىء يثنيه عن هدفه ؛ فيتجاهل الطعام ، وينسى ارتداء ملابسه فى الصباح ، وكان يرى بعد قيامه من النوم بساعات جالساً فى حجرة نومه غافلا عن كل شىء ماعدا المسألة التى تشغل ذهنه .

وعلى الرغم من أن الطبيعة أغدقت عليه الذكاء وقوة العقل إلا أنه كان يهدم هذه القوة الجبارة بإهماله للطعام وعدم أخذ القسط الوافى من النوم ، وفى الفصل الدارسى الأول من ١٦٨٤ كان قد ألقى سلسلة من المحاضرات فى كمبردج

عن قوانين الحركة ، وفى عام ١٦٨٥ كان قد ضمن هذه المحاضرات فيما عرف بعد ذلك بالكتاب الأول من الكتب الثلاثة التى كونت أشهر وأجل أعماله Principia وقد قدم هذا الكتاب للعالم نظرية نيوتن عن الجاذبية الكونية التى امتدحها الدكتور كاچورى فى كتابه تاريخ الرياضيات بقوله « إنها تحيط اسم نيوتن بهالة من المجد الخالد » .

وأكمل نيوتن كتابه الثانى فى صيف عام ١٦٨٥ ، والثالث فى وقت وجيز (بالنسبة إلى محتوياته) لا يتجاوز تسعة شهور . وكان لهذه السنوات من التركيز الشديد والجهد المتواصل فى إخراج هذه الأعمال الضخمة أثرها السيء فى صحته أصيب بعدها بما يعرف اليوم بالانهيار العصبى . ولكنه لحسن الحظ استعاد صحته ، وفى السنة التى تلت مرضه أثبت أن قواه لم تتأثر بالمرض بحله مسألة « منحنى أسرع ميل » وكان يوهان برنولى Johann Bernoulli قد أرسلها يتحدى بها بقية الرياضيين . ووصلت المسألة إلى يد نيوتن يوم ٢٩ من يناير ١٦٩٧ فبعث بجوابه (الدويرى) فى يوم ٣٠ من يناير ١٦٩٧ .

وفى عام ١٧١٦ أرسل ليبنتز مسألة هى فى غاية التعقيد فحلها نيوتن فى خمس ساعات وكانت سنه وقتئذ أربعة وسبعين عاما . وعلى الرغم من كل هذا ، فإنه بعد أن أتم كتابه Principia الذى نال شهرة فاقت كل إنتاج العبقرية البشرية تغير نيوتن بشكل واضح ، فأصبح إنتاجه فى الموضوعات الرياضية أو العلمية الجديدة قليلا جداً ينقصه الابتكار ، كما أن طبيعة الرجل تغيرت كما سنرى فيما بعد ، فترك العلاقة الودية القائمة بينه وبين ليبنتز تضمحل وتسوء وتتحول إلى حالة مخجلة مؤلمة من العداء القائم فى الوقت الذى كان فيه رئيساً

للجمعية الملكية وكان فى استطاعته بكلمة طيبة أن ينقذ الموقف ، ولربما كان لمرضه آثار أشد عمقا مما كان يظن .

وليس من الغريب أن نسمع أنه كان أحياناً ينسى الأحداث اليومية الجارية حين كان يركز عقله فى الموضوعات الرياضية والعلمية إلى الدرجة التى عرفت عنه؛ فقد حدث مرة أن كان يقود حصانه فوق تل ثم بدأ يفكر فى مسألة ، وبعد فترة ليست بقصيرة أدهشه أن يرى فى يده لجاما بدون حصان ! وفى مناسبة أخرى — وكانت من المناسبات النادرة التى استقبل فيها بعض الضيوف — خرج نيوتن ليأتيهم ببعض الخمر ، وطالت غيبته ، ولما قتل العطش الضيوف قاموا يبحثون عن رب البيت فوجدوه منكباً على مسألة ما ! ومما لاشك فيه أن فكرة الخمر ذكرت نيوتن بعملية كبلر فى موضوع المقادير المتناهية الصغر ، ولم تذكره بالنشوة التى تقترن عادة ببنت الكرم !

وفى مستهل حياته العلمية اكتشف نيوتن أن الرياضيين والعلماء سريعو النقد والمناقشة لأى خروج عن العمليات المألوفة ، فكان يكبد نفسه عناء طائلا فى الرد على نقدهم فى أدب وصبر محاولا إيضاح ما أساءوا فهمه من عمله ، ولما استمر النقد وكثرت المناقشات أصيب بحساسية ضد النقد ، وضن بالساعات الضائعة فى نظره التى كان يشغلها فى الرد على هؤلاء النقاد ، وفى ١٨ من نوفمبر عام ١٦٧٦ كتب إلى هنرى أولدنبرج سكرتير الجمعية الملكية بشأن مجموعة جديدة من النقد كان قد أرسلها إليه مستر لوكاس أستاذ الرياضيات فى ليبج بباجيكا يقول : « وعدت أن أرسل إليك ردى على مستر لوكاس يوم الثلاثاء القادم ، ولكننى أجد أننى لن أكون قد أكملت العمل الذى شرعت فيه

بحيث يمكننى ألا أعمل صورة منه قبل هذا التاريخ ، ولذا أرجو أن يمهلنى أسبوعا آخر. لقد جعلت من نفسى عبداً للفلسفة (العلوم) ولكننى إذا انتهيت من موضوع مستر لوكاس فسوف أودع الفلسفة نهائياً فيما عدا ما يروق لى منها لمتعتى الشخصية ، أو أتركه لمن يأتون بعدى ، والأمر كما أراه هو أنه إما أن يمتنع المرء عن إخراج شئ جديد ، وإما أن يصبح عبداً للدفاع عنه » وبعد اثنى عشر عاما تذكر كراهيته للمناقشات والمشادات التى قامت بسبب اكتشافات علمية جديدة. قال نيوتن فى خطاب إلى صديقه العالم الفلكى الشهير ادموند هالى : « الفلسفة سيدة مغرمة بالاحتكام إلى القضاء ، والمشغول بها كالمشغول بالمسائل القانونية » . ويبين رد هالى المؤرخ فى التاسع والعشرين من يونيو اللباقة وسعة الصدر التى كان يعامل بها ذلك العبقرى المرهف الحس .

قال فى رده : « يؤسفنى أن تلاقى فى هذا الأمر ما يقلقك ، وكان الأجدر بالبشرية كلها أن تعترف بفضلك . وأؤكد لك أن الجمعية « الجمعية الملكية » تقدر بفخر وسرور الشرف الذى أوليتها بإهداء كتابك القيم (الكتابين الأولين من Principia) إليها . أكرر رجائى ياسيدى بألا تدع استياءك يدفعك إلى حرماننا من كتابك الثالث .

وعلى العالم أن يشكر هالى على تحمله نفقات طبع الكتاب Principia وتصحيح التجارب « البروفات » كلها ، بل كان يستحث نيوتن بلباقه ورفق على إكمال عمله العظيم .

وقد أدى تردد نيوتن فى نشر اكتشافاته إلى المشاحنات المؤسفة المرة حينما

أريد البت فى أمر مبتدع حساب التفاضل والتكامل . من الذى ابتدعه ! ليبنتز أم نيوتن ؟

وكما سنرى فى صفحات هذا الكتاب استخدم نيوتن طرقه فعلا عام ١٦٦٥ — ١٦٦٦ وفى ١٦٦٩ أرسل فكرة عامة عنها سرا إلى اسحق بارو Isaac Barrow وكان فى ذلك الحين أستاذ الرياضيات بجامعة كمبردج ، ولكنها لم تنتشر بين العلماء حتى عام ١٦٩٣ . وهكذا مضت ثلاثون سنة قبل أن يعرف العالم خارج كمبردج أعمال نيوتن فى هذا الميدان . وأدى ذلك ، كما سنرى ، إلى سوء تفاهم مر من جانب أتباع ليبنتز .

وتقع حياة نيوتن فى ثلاث مراحل واضحة التحديد : الأولى حين كان صبياً فى مقاطعة لنكولنشير ، والثانية حياته فى كمبردج من ١٦٦١ إلى ١٦٩٦ ، والثالثة عمله كموظف حكومى يتقاضى مرتبا ضخما من ١٦٩٦ إلى حين وفاته فى ١٧٢٩ .

بعد أن ذهب إلى مدرستين صغيرتين فى قريتين بالقرب من وولز ثورب أرسل وهو فى الثامنة عشرة إلى المدرسة الثانوية فى جرانثام . وقد تأسست هذه المدارس الثانوية فى انجلترا فى القرن السادس عشر لغرض نشر تعليم يقوم على دراسة اللاتينية واليونانية ، بأجر منخفض ، وكان من النادر أن تدخل الرياضيات ضمن خطة الدراسة . ولم تكن المدرسة فى جرانثام داخلية ولذا فقد عمل الترتيب اللازم لأن يسكن نيوتن الصغير عند صيدلى القرية ، وكان يدعى كلارك . وقد أقر نيوتن بعد ذلك بأنه لم يكن مجتهداً فى بدء دراسته بمدرسة جرانثام ، وكان ترتيبه متأخرا ، ودون شك كان يشعر بمركب نقص لضعف

بنيته إلى أن أتى يوم حين عيره أحد التلاميذ لدرجة اضطرته إلى مهاجمته . ويقول بروستر كاتب مذكرات نيوتن إن نيوتن تفوق على غريمه وأخذ بأذنيه وبدأ يجره على الأرض إلى أن قرع وجهه على الحائط . وقد يكون فى القصة بعض المغالاة ، ولكن مما لا شك فيه هو أن نيوتن بدأ منذ ذلك الحين يتقدم فى علومه بسرعة وثقة ، ويعزو بروستر هذا التطور المفاجىء فى قوة تركيز نيوتن إلى تصميمه على قهر ذلك الزميل المشاكس فى الحصة ، ونجح نيوتن فى ذلك بل وأصبح الطالب الأول فى مدرسته .

ولما بلغ الخامسة عشرة قررت أمه — التى تزوجت للمرة الثانية عام ١٦٤٥ وترملت للمرة الثانية عام ١٦٥٦ — إخراجه من المدرسة شاعرة بأن الوقت قد حان أن يتعلم إدارة مزرعة أبيه الصغيرة وأن يصبح مزارعا ، ولكنه لم يرحب بالفكرة ، وكان ينتحل الأعذار كلما أرسلت أمه الخادم إلى جرانثام فيرافقه ليطير إلى منزل الصيدلى ويقضى بعض السويعات الثمينة التى يختطفها من المزرعة بين كتب مستر كلارك، وكم كنا نود معرفة أسماء هذه الكتب ولكن الحظ لم يحالفنا وبقى لنا أن نتكهن بطبيعتها ، فلابد أن بعضها على الأقل كان علمياً ، وإلا لما ثار فضول الصبى وتاقت نفسه إلى العلوم التى لم تكن مدرجة فى خطة مدرسته. وبغير هذا التعليل لما استطعنا أن نتصور ما الذى حدا بنيوتن إلى دراسة الرياضيات والعلوم فى كمبردج .

ولما كان بالمزرعة كان يفضل الجلوس تحت شجرة يتصفح الكتب أو ينحت نموذجاً من النماذج بدلا من أن يقوم على حراسة الغنم والماشية، وقد صرح مرة لصديق له أنه فى الثالث من سبتمبر عام ١٦٥٨ ، وكان يوم جمعة ، هبت

عاصفة شديدة على انجلترا ساعة وفاة أوليفر كرومول، وكان هو منشغلا بمحاولة تقدير قوة العاصفة بالقفز مرة مع الريح ومرة ضدها ، وأخذ يقارن هذه المقاييس بالمسافة التى يقفزها فى يوم صحو . هذا هو نوع النشاط (بينما عقلية الفلاح تكون مشغولة بالمحافظة على الماشية وآلات الزراعة) الذى أثبت لأمه أنه لم يخلق ليكون مزارعا . ومن حسن حظ البشرية أنها فطنت إلى إعادته إلى مدرسة جرانثام حيث أخذ يستعد لدخول جامعة كمبردج بناء على نصيحة خاله القس و . ايسكو ، وكان كاهن أبروشية مجاورة . ولم يكتف الرجل بإقناع شقيقته بإرسال ابنها إلى نفس الكلية التى تعلم هو فيها ، ولكنه فوق ذلك أقرضه الكتب مثل كتاب ساندرسون فى المنطق ، وكان على الطلبة أن يدرسوه بعد دخول الجامعة . ثم حدث أن منح نيوتن ، بفضل وساطة رجل من رجال كلية ترينيتى ، مساعدة مالية من الكلية ، مما خفف العبء عن والدته .

لم يصل إلينا الكثير عن حياته وهو طالب ، وكل ما نستطيعه هو أن نستخلص شيئا عنها من مذكراته التى كتبها بعد ذلك بحين .

فى أول فصل دراسى حضره فى كمبردج — بين أكتوبر وعيد الميلاد عام ١٦٦١ — ذهب إلى قرية ستوربريدج بالقرب من كمبردج ليشهد المهرجان السنوى الذى كان يقام هناك ، وكان من أجمل المهرجانات بانجلترا ، وهناك ابتاع لنفسه كتابا عن النجوم ، ولكنه وجد أنه لم يفهم كلمة واحدة منه ، لجهله بالهندسة ، فابتاع نسخة من مبادىء إقليدس كتبت باللغة الانجليزية ، ووجد أن محتويات الكتاب « بديهية » — على حد قوله — لدرجة أنه ترك الكتاب

جانباً لتفاهته وحصل على نسخة من هندسة ديكارت . وبعد جهد شديد استوعبها ، ولسوء الحظ لم يجد من يرشده إلى كتاب واليس wallis عن هندسة ديكارت ، حيث فسر المؤلف المادة بأسلوب يفوق أسلوب ديكارت فى البساطة والوضوح .

ومع كل فقد كان كتاب ديكارت كافياً لأن تأخذ الرياضيات بمجامع قلبه ، وقد أشار نيوتن فى مذكراته إلى أنه قرأ بعض أعمال فيتا vieta وواليس (حساب الأعداد اللانهائية) وهكذا عرف المتواليات اللانهائية فى غضون السنوات ١٦٦٣، ١٦٦٤ . وفى عام ١٦٦٤ أدى امتحاناً للحصول على المجانية بالكلية (وهو امتحان مسابقة يعفى من اجتازه من مصروفات الكلية علاوة على امتيازات أخرى) وحصل على المجانية فى الثامن والعشرين من شهر إبريل رغم تنديد أحد الممتحنين - - واسمه الدكتور بارو Barrow وكان أول من عين أستاذاً للرياضيات فى الكرسى الذى وهبه لوكاس — بجهل نيوتن بهندسة إقليدس . ولم يأت هذا الحكم مفاجئاً بعد أن علمنا رأى نيوتن فى « الكتاب التافه » ! وحدا ذلك بنيوتن إلى دراسة إقليدس بعناية عرف بعـــدها أن الكتاب لم يكن تافهاً كما كان يحسب ، وقد استخدم فيما بعد هندسة إقليدس استخدام الخبير المفكر حين قدم للعالم تفسيره الرياضى للجاذبية الكونية . كان نيوتن قد وصل إلى نتائجه عن طريق الفرع الجديد الذى ابتدعه وهو حساب التفاضل والتكامل . ولعلمه بأن سائر الرياضيين ما زالوا يجهلون هذا العلم الجديد ، وأنهم ولا شك سيبدون مقاومة شديدة ضده ، وبهذا ينكرون صحة النتائج القائمة على أساسه ، أعاد كتابة تدليله فى قالب هندسى ، كما سنرى . وهكذا كان لنقد بارو للطالب الناشىء أجمل الأثر فى النهاية .

وحيث إن أسحق بارو لعب دورا هاما فى حياة نيوتن، فليسمح لنا القارىء بالتوقف لحظة فى تاريخ نيوتن وإلقاء نظرة سريعة على حياة بارو ، أول أستاذ أسند إليه كرسى الرياضيات الذى وهبه مستر لوكاس للكلية فى وصيته .

كان والد بارو تاجر أقمشة فى لندن ، وأرسل ابنه إلى مدرسة تشارترهاوس وأثبت الولد أنه مشاكس يحب الشجار ، حتى قيل إن والده كان يتمنى على الله لو اختاره إلى جواره .

ولكن الصبى — بعد أن ترك المدرسة — انهمك فى دراسة الأدب والعلوم بكلية ترينيتى لدرجة أنه أصبح مدرسا بالكلية ، وتبع ذلك بضع سنين قضاها فى السفر والمغامرة ، وبينما كان على ظهر سفينة بين إيطاليا وتركيا إذ هاجم القرصان مركبه ، وهناك وجد بارو المجال ليستعيد نشاطه الذى كان يمارسه فى مدرسة تشارترهاوس ، وخرج من المعركة ظافراً ، فقد نجح فى طرد القرصان .

ومكث بعد ذلك زمنا فى القسطنطينية ، واهتم بقراءة أعمال آباء الكنيسة الأولين ، وعقب عودته إلى إنجلترا رسم كاهنا ، وفى ١٦٦٠ عين أستاذا للغة اليونانية بجامعة كمبردج ، وبعد ذلك بسنتين اختير أستاذا للهندسة فى كلية جريشام بلندن ، وكان أول أستاذ للهندسة بها هو هنرى برجز Henry Briggs صديق نابيير ومساعده .

فى عام ١٦٦٣ ظفر بارو بشرفين عظيمين ، وهما : أنه كان أول مدرس بالجامعه يختار لعضوية الجمعية الملكية (اليوم وضع الحروف .F.R.S عقب اسم عالم من العلماء يدل على حصوله على أعظم امتياز يمنح للعلماء فى انجلترا ومعناها عضو بالجمعية الملكية) ، وأنه اختير ليكون أول أستاذ للرياضيات

بجامعة كمبردج ، فى الـكرسى الذى وهبه لوكاس كما أسلفنا ، وهذا هو السبب فى أن أحد ممتحنى نيوتن فى مسابقة الإعفاء فى عام ١٦٦٤ كان إسحق بارو الذى كسب لمحاضراته — دون أن يشعر — طالبا قدر له أن يصبح أعظم رياضى أنجبته انجلترا إن لم يكن أعظم رياضى أنجبه العالم ، وبحلول عام ١٦٦٩ أدرك بارو « عبقرية نيوتن التى لا تبارى » كما قال . ولما عزم هذا الأستاذ على أن يهب نفسه للدراسات الدينيـــــة استقال من منصبه كأستاذ للرياضيات وعمل على اختيار نيوتن خليفة له ، وفى ١٦٧٢ أصبح الدكتور بارو عميدا لـكلية ترينيتى ، وفى ١٦٧٥ عميداً للجامعة .

ونعود الآن إلى حياة نيوتن حين كان طالباً . كان المعتاد فى كمبردج فى ذلك الوقت أن يقرأ الطلبة كتاب ساندرسون فى المنطق كتدريب مبدئى للعقل وقد رأينا كيف أن خال نيوتن كان قد أقرضه هذا الـكتاب ، واستوعبه نيوتن لدرجة أن بنيامين يوللى أستاذه فى الـكلية أعفاه من حضور محاضراته فى المنطق واهتم نيوتن وهو طالب بملاحظة الأجسام السماوية ملاحظة دقيقة ، وقد قال فى كتابه عن « المرئيات » : « رأيت فى بدء عام ١٦٦٤ فى ليلة التاسع عشر من فبراير تاجين (حول القمر) » .

وفى يناير ١٦٦٥ نال درجة فى الآداب ولـكنه اضطر إلى مغادرة كمبردج فى نفس السنة حين ظهر الطاعون . وقد كتب صموئيل بيبس Samuel Pepys المؤرخ الذائع الصيت (١٦٣٣ - ١٧٠٣) الذى كان سكرتيراً للبحرية أو بعبارة أدق « كاتب أعمال البحرية » يقول إنه رأى فى السابع من يونيو عام ١٦٦٥ لأول مرة بيوتاً نقشت عليها علامة الخطر ، وهى صليب أحمر ، وتحت هذه العبارة : « اللهم ارحمنا » . وعاد فـكتب فى الرابع من سبتمبر : « بقيت

بالمدينة حتى بلغ الموتى فى أسبوع واحد ٧٤٠٠ منهم ٦٠٠٠ راحوا ضحية الطاعون ، ولم يكن يسمع ليلا أو نهاراً سوى دقات الأجراس الحزينة » ، وأغلقت كلية ترينيتى أبوابها على سبيل الاحتياط من ١٦٦٥ إلى جزء من ١٦٦٦ وكان حريق لندن قد قضى على المدينة والجراثيم .

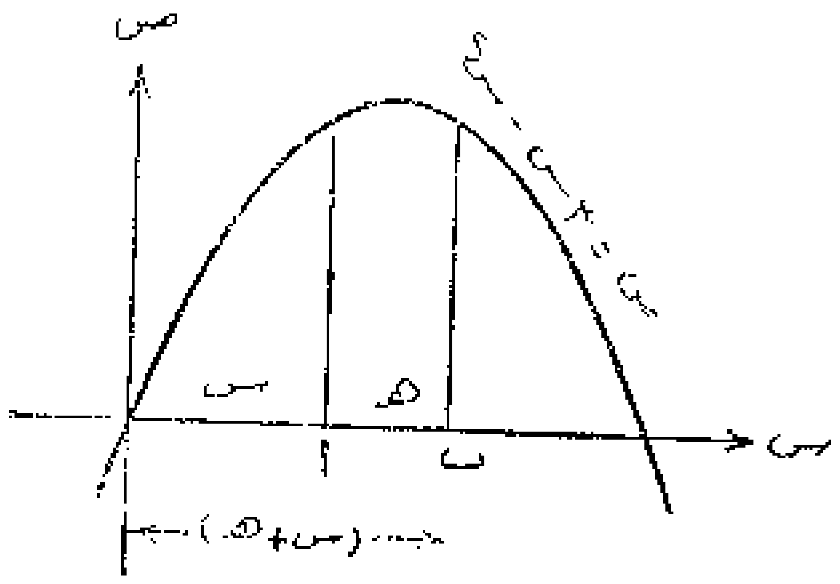
وفى تلك الفترة كان نيوتن فى بلدته وولز ثورب، وهناك بدأ يفكر فى قوانينه الأساسية لنظرية الجاذبية .

وهنا فى وولز ثورب قامت أسطورة نيوتن والتفاحة . قيل إن فكرة الجاذبية أتت نيوتن على أثر سقوط تفاحة ، وحقيقة الأمر هى أن شجرة الأسطورة — وهى شجرة تفاح فعلا — ظلت قائمة إلى أن قصفتها عاصفة عام ١٨٢٠ ، ولكن جاذبية الأرض كانت حقيقة علمية معترفا بها قبل عصر نيوتن. أما عبقرية الرجل فقد تجلت فى قانونه عن الجاذبية الأرضية ، ويعلل البروفسور برود ينسكى قيام الأسطورة فى كتابه إسحق نيوتن بما يأتى : « إن سقوط التفاحة — إذا كان سقوطها هو الذى أوحى حقيقة إلى نيوتن بسلسلة التفكير التى أدت إلى اكتشاف قانون الجاذبية — يكون قد فعل ذلك بالطريقة التالية ، إذا صح أن نضع عبقرية نيوتن فى بضع كلمات ضئيلة :

« لم تدور الكواكب حول الشمس ؟ لم لا تسير فى خط مستقيم ؟ من الواضح أن هناك قوة تجذبها بعيداً عن طريق الخط المستقيم فى كل لحظة ، ومن الواضح أيضاً أن هذه القوة راجعة إلى الشمس نفسها . والقمر يدور حول الأرض ولا يسير فى خط مستقيم ، وهذا أيضاً يرجع إلى الأرض . آه . . لقد سقطت تفاحة إلى الأرض . لقد جذبتها الأرض إليها . لأى ارتفاع يمتد نفوذ الأرض ؟ ... »

وفى الريف الجميل الهادىء الذى خشى يوماً أن يقضى فيه كل حياته ابتدع نيوتن حساب تفاضل الحركة الذى مكنه من بناء قانونه للحركة الكونية والذى أعطى للرياضيين والعلماء فيما بعد أقوى أسلحتهم . وحتى يتسنى لنا تتبع الخطوات التى أدت إلى هذا « الاختراع » الذى صنع التاريخ يحق علينا أن نعود إلى الوراء ونرافقه ذهنيا إلى حجرات محاضرات إسحق بارو . كان إسهام بارو فى تنمية حساب التفاضل هو تعميمه وتبسيطه لطريقة فرمات Fermat فى رسم مماس المنحنى. وكان فرمات قد أوضح طريقته هذه فى خطاب أرسله إلى روبرفال عام ١٦٣٩ ونشر عام ١٦٤٤ فى كتاب لأحد الرياضيين .

وحتى نفهم هذه الطريقة علينا أن نلقى نظرة على طريقة فرمات فى إيجاد المنحنى المبين فى شكل ٩٢ .



شكل (٩٢)

تتغير قيمه الدالة ٣ س — س^{٢} بتغير قيم س ولقيمة ما فى س يكون لهذه الدالة قيمة عظمى ، أو قيمة صغرى ، فكيف نوجدها ؟ وطريقة فرمات هى : لنفرض أن الاحداثى الصادى عند ا يبعد عن نقطة الأصل بمقدار س وحدة فيكون طول هذا الاحداثى بدلالة س هو ٣ س — س^{٢} .

والآن لنفرض احداثياً صاديا آخر عند ب يكون طوله مساويا للطول الاحداثى الصادى عند ا ، ولنفرض أن الاحداثى الصادى عند ب يبعد بقدر س + هـ وحدة من نقطة الأصل . بعبارة أخرى ب تبعد (س + هـ) وحدة

من نقطة الأصل . والآن معادلة المنحنى $ص = ٣ س - س^{٢}$ تدل على أن طول أى إحداثى صادى هى « ٣ أمثال قيمته السينية مطروحا منها مربع تلك القيمة السينية » . أى إن طول الاحداثى الصادى عند ب يمكن أن نحصل عليه من الدالة $٣ (س + هـ) - (س + هـ)^{٢}$ التى يمكن تبسيطها إلى $٣ س + ٣ هـ - س^{٢} - ٢ س هـ + هـ^{٢}$.

ولكننا فرضنا أن هذين الاحداثيين الصاديين متساويان وعليه يكون :

$$٣ س - س^{٢} = ٣ س + ٣ هـ - س^{٢} - ٢ س هـ - هـ^{٢} .$$

$$\therefore ٣ هـ - ٢ س هـ - هـ^{٢} = ٠$$

وبالقسمة على هـ نحصل على :

$$٣ - ٢ س - هـ = ٠$$

ولنفرض الآن أن هذين الاحداثيين الصاديين يقتربان شيئاً فشيئا حتى تقترب هـ من الصفر. قال فرمات : « نعتبر أن الكمية المضافة كأنها صفر وهذا غير معقول » .

ثم يعود فرمات فيقول إن $٣ - ٢ س = ٠$

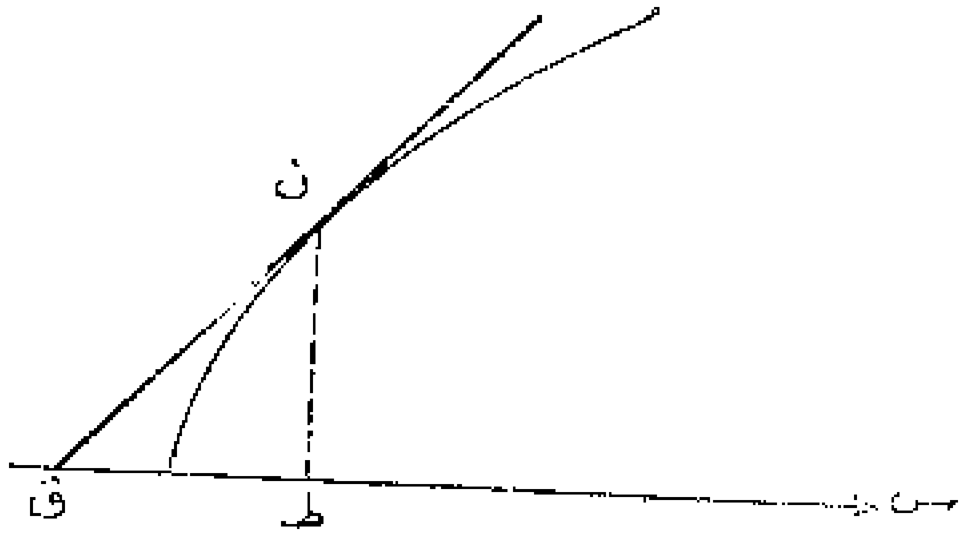
$$\therefore ٣ = ٢ س$$

$$\therefore س = ١\tfrac{١}{٢}$$

(بينما نقول نحن الآن إنه كلما اقتربت هـ من الصفر اقتربت $٣ - ٢ س$ من نهايتها وهى $١\tfrac{١}{٢}$) . وبإلقاء نظرة على شكل ٩٢ يتضح أنه كلما صغرت هـ فإن الاحداثيين الصاديين يقتربان أحدهما من الآخر . كل منهما يقترب من

نفس القيمة « النهائية » عند س = ١½ . وأيضاً يصبح كل من الاحداثيين أكبر وأكبر كلما اقترب من قيمته النهائية، وعليه فأكبر احداثى صادى فى شكل ٩٢ هو الذى يرسم عند النقطة س = ١½ ، ويمكن إيجاد طوله بوضع س = ١½ فى الدالة الصادية ٣ س — س^{٢} وبناء عليه يكون: ٣ (١½) — (١½)^{٢} أو ٤½ — ٢¼ = ٢¼ .

وعليه فالنهاية العظمى للدالة الصادية ٣ س — س^{٢} هى ٢¼ (إذا أراد القارىء أن يرسم لنفسه الدالة ص = س^{٢} — ٣ س فسيجد أن المنحنى ينفتح لأعلى بدلا من أن ينفتح لأسفل، وبدلا من أن يرتفع إلى نهاية عظمى، ثم ينزل ثانية، فإنه يهبط إلى نهاية صغرى ، ثم يرتفع مرة أخرى إلى محوز السينات . وسيجد أن النهاية الصغرى للدالة الصادية س^{٢} — ٢ س هى — ٢½ ويحدث هذا عند س = ١½).

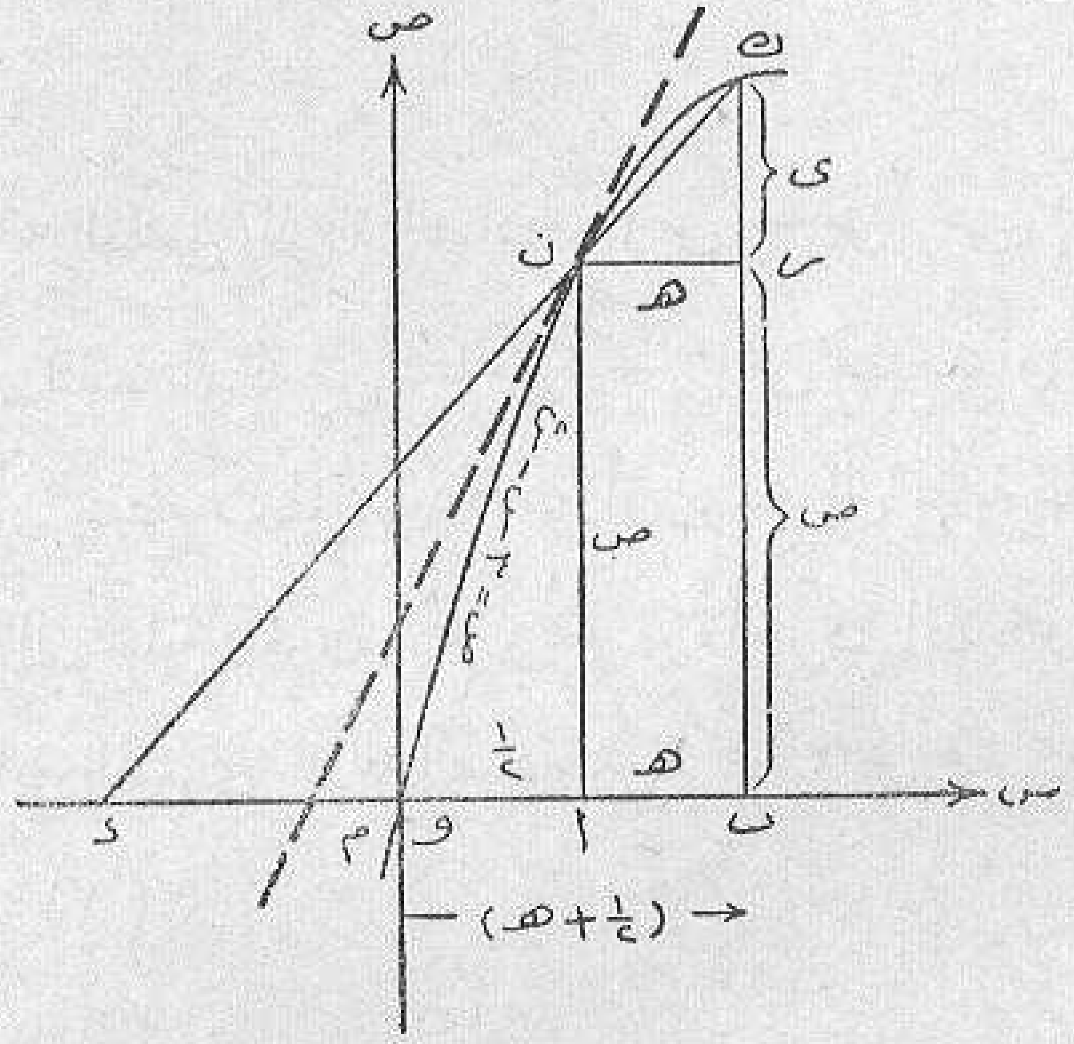


شكل ٩٣)

والآن يطبق فرمات جزءاً من طريقته لإيجـــاد القيمة « العظمى والصغرى » فى رسم مماس عند أى نقطة على المنحنى وقد فعل ذلك بحساب الطول ق ط وهو ما نسميه تحت المماس (انظر شكل ٩٣) .

ولن نطيل الحديث فى بحث طريقة فرمات، بل نتجه إلى طريقة بارو ، حيث إن الفرق الوحيد بين الطريقتين هو أن بارو لم يكتف باستخدام الزيادة فى القيمة السينية، بل استخدم الزيادة فى القيمة الصادية أيضاً .

ولنرسم الرسم البيانى للمعادلة ص = ٣ − س٢ ثم نأخذ احداثيين صاديين هما ا ن ، ب ك ، وسنفرض أن طول ب ك يزيد بمقدارى وحدة على طول ا ن ، وأن ب ك يزيد بعده عن نقطة الأصل على بعد ا ن عنها بمقدار هـ وحدة (يعرف المثلث ن ك ر بمثلث بارو التفاضلى) .



شكل (٩٤)

لنفرض أننا أردنا رسم مماس عند ن وأننا نعلم أن الاحداثى الصادى ا ن يبعد بمقدار ½ وحدة طولية عن نقطة الأصل و .

نصل ك ن ونمده ليقابل المحور السينى عند ى . ومن الواضح أن المثلث ى ن ا يشابه المثلث ن ك ر .

$$\therefore \frac{\text{ر ك}}{\text{ن ر}} = \frac{\text{ا ن}}{\text{ى ا}}$$

ويجب أن نتذكر أننا نستطيع إيجاد طول أى احداثى صادى إذا عرفنا دالته (بدلالة س حيث س تبين المسافة الأفقية مقيسة من نقطة الأصل) وعرفنا

كذلك بعده الأفقى عن نقطة الأصل . وعليه حيث إن الدالة الصادية فى هذه المسألة هى ٣ س — س^{٢} فإن طول الاحداثى الصادى ا ن (الذى قيمته السينية هى $\frac{١}{٢}$) هو :

$$\text{ا ن} = ٣\left(\tfrac{١}{٢}\right) - \left(\tfrac{١}{٢}\right)^{٢}$$

$$= ١\tfrac{١}{٢} - \tfrac{١}{٤}$$

$$= ١\tfrac{١}{٤}$$

والآن نأخذ الاحداثى الصادى الآخر ب ك الذى تزيد قيمته السينية بمقدار هـ على القيمة السينية للاحداثى الصادى ا ن أى إنه يبعد ($\frac{١}{٢}$ + هـ) عن نقطة الأصل والذى يزيد طوله بمقدار ى عن ا ن .

لقد وجدنا أن ا ن = ١$\frac{١}{٤}$ ولنوجد الآن ب ك بدلالة هـ . حيث إن القيمة السينية هنا هى ($\frac{١}{٢}$ + هـ)، فمن الدالة الصادية ٣ س — س^{٢} نجد أن :

$$\text{ب ك} = ٣\left(\tfrac{١}{٢} + \text{هـ}\right) - \left(\tfrac{١}{٢} + \text{هـ}\right)^{٢}$$

$$= ١\tfrac{١}{٢} + ٣\,\text{هـ} - \tfrac{١}{٤} - \text{هـ} - \text{هـ}^{٢}$$

$$= ١\tfrac{١}{٤} + ٢\,\text{هـ} - \text{هـ}^{٢}$$

ولكن ى = ب ك — ا ن

$$= \left(١\tfrac{١}{٤} + ٢\,\text{هـ} - \text{هـ}^{٢}\right) - ١\tfrac{١}{٤}$$

$$= ٢\,\text{هـ} - \text{هـ}^{٢}$$

$$\therefore \text{النسبة } \frac{\text{ى}}{\text{هـ}} = \frac{٢\text{هـ} - \text{هـ}^{٢}}{\text{هـ}}$$

$$= ٢ - \text{هـ}$$

(وهنا نترك لغة بارو وسائر رياضيى القرن السابع عشر تفاديا لبعض العبارات اللامنطقية التى كانوا يستخدمونها) .

نرى أنه كلما أخذت نقطة ن قريبة من ك صغرت هـ . وفوق ذلك كلما اقتربت ك من ن فإن قيمة النسبة $\frac{\text{ى}}{\text{هـ}}$ (فى هذا الشكل) تكبر وتكبر مقتربة من ٢ ولكنها لن تصل إليها . وأيضا كلما اقتربت ك من ن فإن القاطع ء ن ك يقترب ويقترب من موضع المماس عند ن ، القاطع ء ن ك لا يصبح بأى حال من الأحوال مماسا عند ن رغم أنه يقترب منه بقدر ما نريد ، وقد بينا وضع المماس عند ن بخط منقوط ، وبينما يقترب ء ن ك من المماس تقترب فى نفس الوقت النسبة $\frac{\text{ن ا}}{\text{م ا}}$ (التى سبق ووجدنا أنها تساوى $\frac{\text{ر ك}}{\text{ن ر}}$ أو $\frac{\text{ى}}{\text{هـ}}$) من النسبة $\frac{\text{ن ا}}{\text{م ن}}$. وهذا هو الايضاح الهندسى للعملية الجبرية التى يثبت لنا أن النسبة $\frac{\text{ى}}{\text{هـ}}$ تقترب ولكنها لن تصل إلى ٢ فى القيمة بينما تصغر وتصغر هـ .

قيمة النسبة $\frac{\text{ن ا}}{\text{م ا}}$ هى القيمة المضبوطة (وليست القيمة التقريبية) للنهاية التى تقترب منها النسبة $\frac{\text{ى}}{\text{هـ}}$ أى ٢ . وعليه $\frac{\text{ن ا}}{\text{م ا}} = ٢$. بعبارة أخرى م ا فى هذا المثال يساوى نصف طول الاحداثى الصادى (المعلوم) ا ن . من السهل بعد ذلك أن نوجد نقطة م وأن نرسم المماس م ن .

وتقع أهمية طريقة بارو هذه بالنسبة لعمل نيوتن لا لأنها تستخدم فى رسم المماس ولـكن لأنها الطريقة التى تستخدم (كما نقول اليوم) فى إيجاد النهاية التى تقترب منها النسبة $\frac{\text{ر ك}}{\text{ن ر}}$ أو $\frac{\text{ى}}{\text{ه}}$ بينما تقترب ن ر (أى ه) من الصفر .

وهذا هو أساس طريقة التفاضل وسنحل مسألة مشابهة مستخدمين رموزاً عامه بمعنى أنه عوضا عن أخذ بعد ا ن عن نقطة الأصل ½ وحدة سنسمى ذلك البعد (س) التى يمكن أن تأخذ أى قيمة محـدودة (هنا أيضا سوف نستخدم اللغة والآراء الحديثة ولـكن الطريقة فى أساسياتها هى التى استخدمها نيوتن فى بناء حسابه فى « تفاضل الحركة ») .

نعود فنستخدم شكل ٩٤ معتبرين و ا « س وحـدة » بدلا من ½ وحدة فنحصل من الدالة الصادية ٣ س — س^{٢} على أن :

ا ن = ٣ س — س^{٢}

ب ك = ٣ (س + ه) — (س + ه)^{٢}

= ٣س + ٣ ه — س^{٢} — ٢ س ه — ه^{٢}

∴ ى = ب ك — ا ن = ٣ ه — ٢ س ه — ه^{٢}

∴ $\frac{\text{ى}}{\text{ه}}$ = $\frac{\text{٣ ه — ٢ س ه — ه}^{٢}}{\text{ه}}$

= ٣ — ٢ س — ه

ويتبع من ذلك أنه كلما اقتربت ه من الصفر فإن النسبة $\frac{\text{ى}}{\text{ه}}$ تقترب من

٣ — ٢ س والآن « فاضلنا » الدالة ٣ س — س^{٢} وحصلنا على « دالتها المشتقة » أو مشتقتها ٣ — ٢ س ونحاول الآن إيجاد معنى لهذه « المشتقة » من الدالة الصادية ٣ س — س^{٢} .

نعود بالقارىء إلى شكل ٩٠ ، فنرى أربعة مثلثات متشابهة تماما لمثلثنا ن ك س بإعطاء ى ، هـ المعانى التى سبق واتفقنا عليها يمكننا أن نتكلم عن ن س باعتباره هـ ، س ك باعتباره ى .

شكل (٩٥)

والآن نسأل عم تدل النسبة $\frac{ى}{هـ}$ بالضبط ؟ (شكل ٩٠ أعيد رسمه فى شكل ٩٥) ى تمثل الزيادة فى عمق الماء فى الخزان فى الفترة الزمنية هـ . وكما رأينا يمكن إيجاد متوسط معدل السرعة بقسمة المسافة المقطوعة على الزمن اللازم لقطعها وعليه فإن $\frac{ى}{هـ}$ هى متوسط معدل ازدياد عمق الماء فى الفترة الزمنيه $\frac{ى}{هـ}$ ، وقد سبق أن رأينا فى صفحة ٢٩٥ من هذا الكتاب أن متوسط معدل الزيادة فى أى فترة زمنية ليس هو المعدل فى بدء أو نهاية الفترة إلا فى الحالة التى لم يطرأ فيه تغير على المعدل .

متى كان معدل النمو يزداد فإن $\frac{ى}{هـ}$ تمثل متوسط معدل النمو . وهذا لا يمكن — فى هذه الحالة — أن يساوى معدل نمو الاحداثى الصادى عند بدء

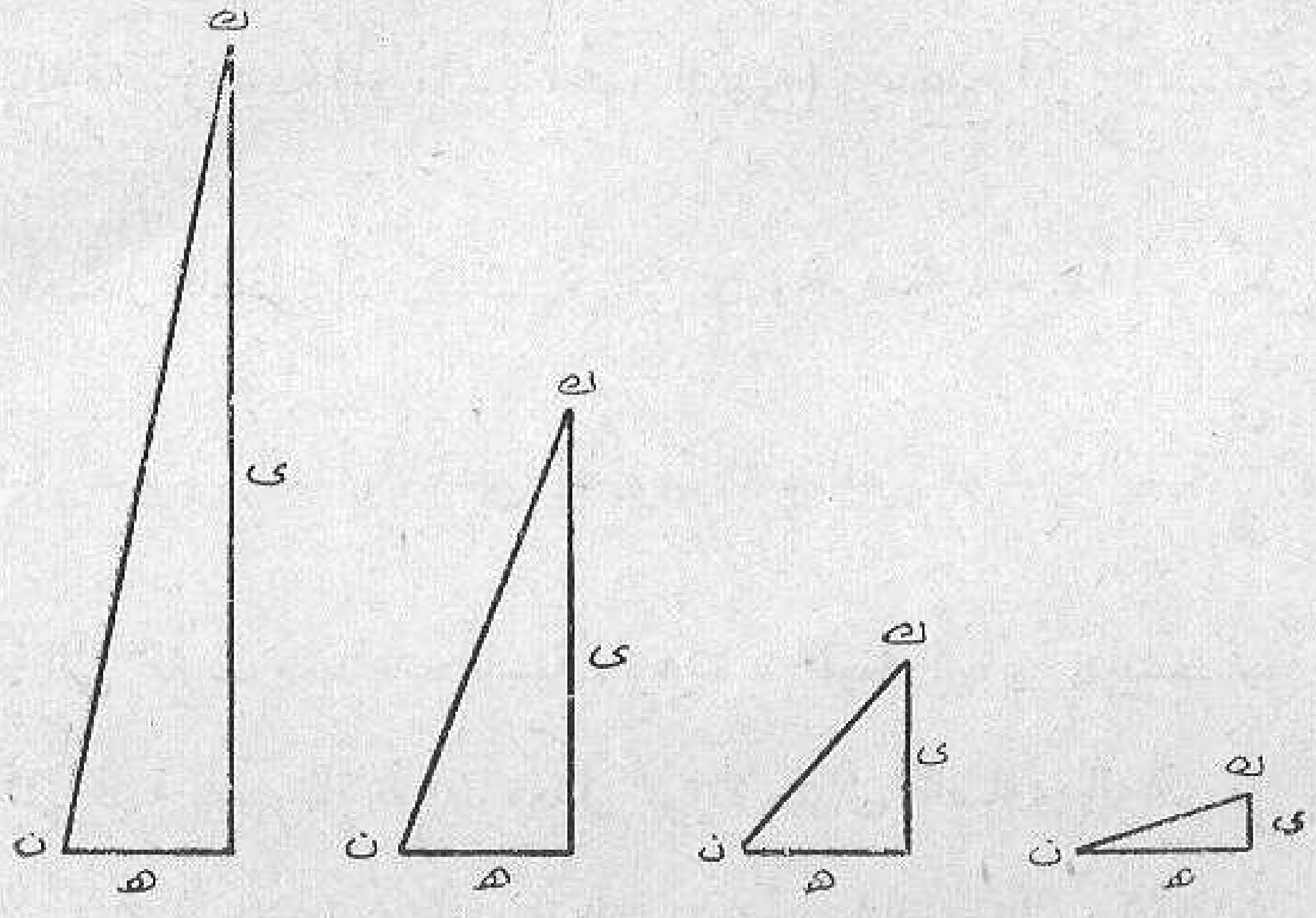
أو نهاية فترة زمنيــه (أو مايمثله المحور السينى) . صحيح أن $\frac{ى}{هـ}$ تساوى تقريبا هذا المعــدل اللحظى إذا كانت كل من ى ، هـ صغيرة جـداً (ولـكن ليست متناهية الصغر) . المعدل اللحظى المضبوط للنمو ليس هو قيمة النسبة $\frac{ى}{هـ}$ ولـكن النهاية التى تقترب منها هذه النسبة ، وهذه « القيمة النهائية » ليست قيمة تقريبية و لـكنها قيمة مضبوطة تعطينا معدل نمو الاحداثى الصادى الواقع على بعد س وحدة من نقطة الأصل فى اللحظة التى تبـدأ فيها القيمة السينية فى الازدياد إلى (س + هـ) .

وهذا « المعدل اللحظى » للزيادة فى طول احـداثى صادى يمـكن أيضا تمثيله هندسيا تمثيلا دقيقا يجعل المماس عند النقطة من المنحنى حيث يقطعه هـذا الاحداثى الصادى الذى يبعد س وحدة عن نقطة الأصل .

ولنر الآن ماذا يقصد الرياضيون بكلمة « ميل » .

ميل المستقيم يقاس فى الرياضيات بالنسبـة $\frac{\text{قيام العمود}}{\text{الطول الأفقى}}$ أو $\frac{ى}{هـ}$ فى أى واحد من المثلثات فى شكل ٩٦ .

فى حالة المستقيم لا يتغير الميل ، وعليه فليس هناك « معدل زيادة فى الميل وكلما زاد ميل المستقيم كان « قيام » المستقيم لأعلى أكبر ، وكلما قل ميل المستقيم اقترب المستقيم من الوضع الأفقى كما يرى فى شكل ٩٦ .



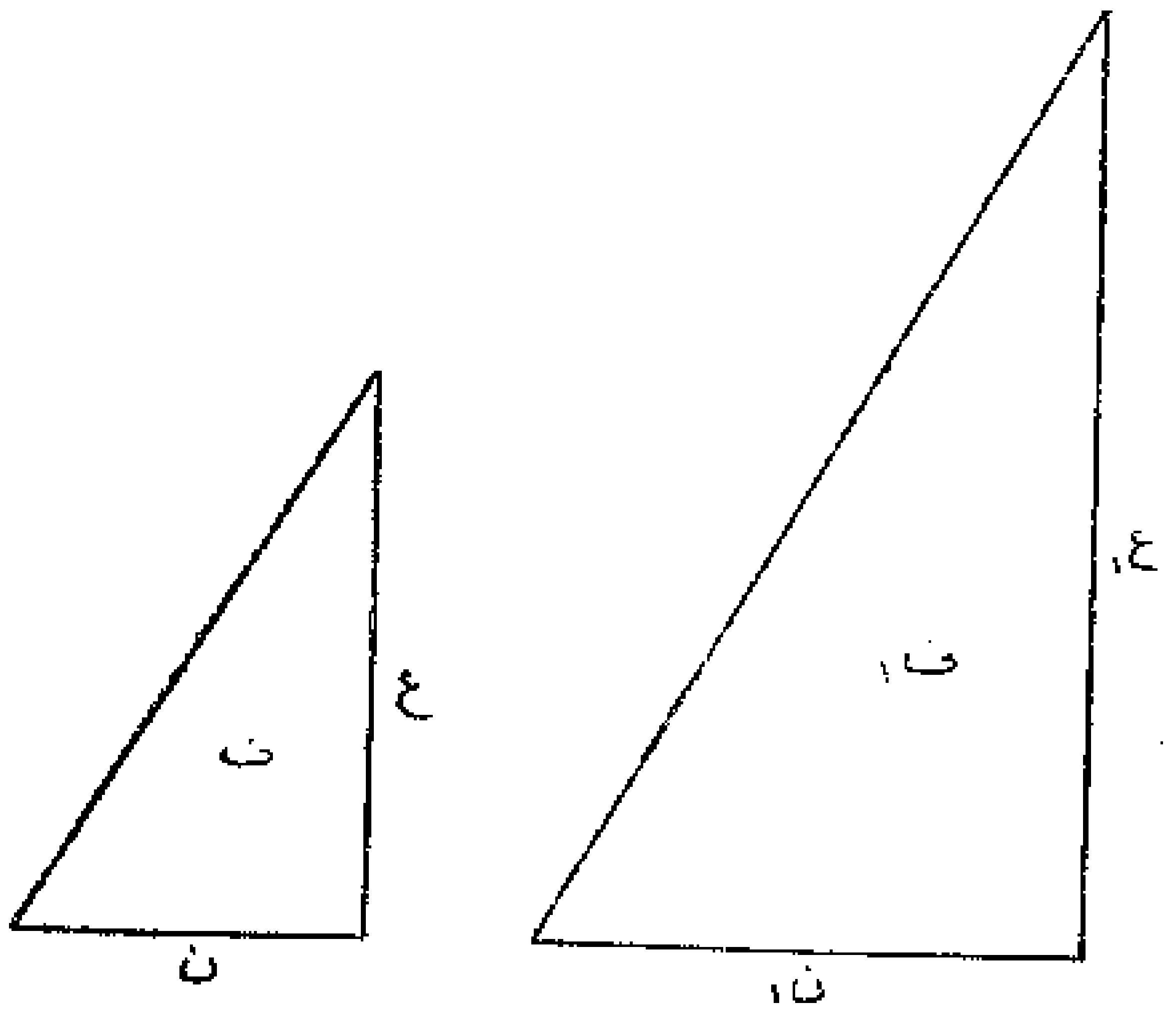
شكل (٩٦)

وكلما اقترب المستقيم من الوضع الأفقى صغرت قيمة $\frac{\text{ى}}{\text{هـ}}$ ، وعندما يصبح المستقيم أفقيا يكون ميله صفراً .

أما فى حالة المنحنى فإن الميل يتغير باستمرار . وقد رأينا أن متوسط معدل الزيادة بين ق ، ك فى شكل ٩٤ هو $\frac{\text{ى}}{\text{هـ}}$ ، وقد رأينا الآن أن $\frac{\text{ى}}{\text{هـ}}$ هى أيضاً مقياس ميل ق ك ، وكذلك رأينا أن النهاية التى يقترب منها $\frac{\text{ى}}{\text{هـ}}$ كانت بالنسبة $\frac{\text{ق١}}{\text{م١}}$ والتى نعرف الآن أنها ميل المماس عند ق .

وعليه فالمعدل اللحظى عند نقطة ق هو ميل المماس عند تلك النقطة ، ويتبع من ذلك أن ميل منحنى عند أى نقطة على ذلك المنحنى يبين بميل المماس عند

ومن هندسة إقليدس نعرف أن النسبة بين مساحتى مثلثين متشابهين ، كالنسبة بين مربعى قاعدتيهما وعليه من شكل ٦٤ : $\frac{ف}{ف_1} = \frac{ن^2}{ن_1^2}$



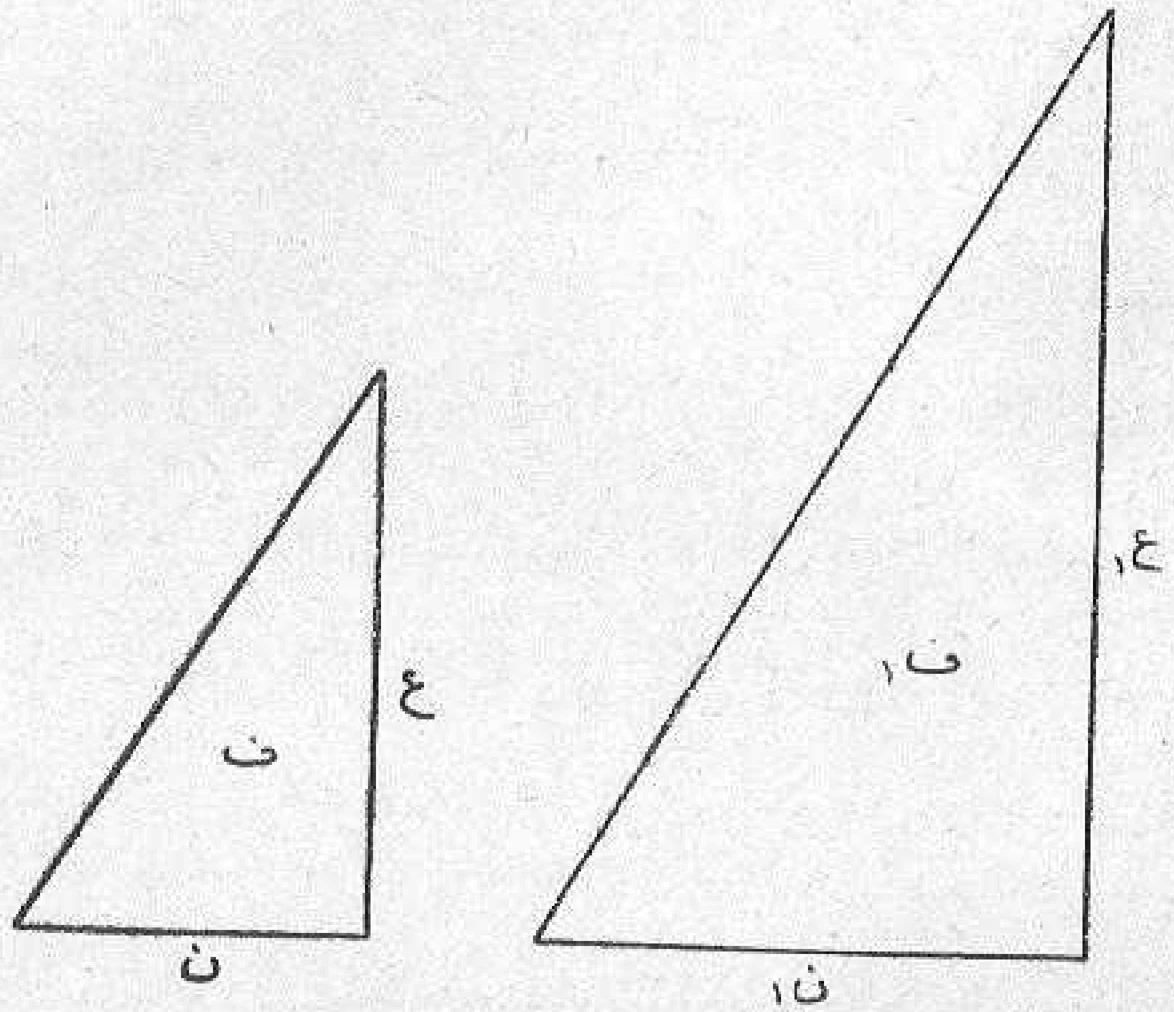
شكل (٦٤)

هذا هو البرهان الهندسى للقانون الذى اكتشفه جاليليو .

وبملاحظة أزمنة سقوط الأجسام من فوق مستوى مائل ، أثبت جاليليو صحة هذا القانون ، وكذلك أثبت قبيل وفاته أن السرعة التى يكتسبها جسم فى نزوله على مستوى مائل طويل هى نفس السرعة التى يكتسبها فى النزول على مستوى مائل قصير مساو له فى الارتفاع .

وفى عام ١٦٠٧ أو حوالى هذا التاريخ كان صبى صانع نظارات ، واسمه هانز ليبرشاى Hans Lippershay من ميدلبرج بهولندا يلعب بعدسات النظارات فى المحل فوجد أنه إذا أمسك بعدستين فى وضع معين فإن الأشياء تبدو أكبر مما

ومن هندسة إقليدس نعرف أن النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين ، كالنسبة بين مربعي قاعدتيهما وعليه من شكل ٦٤ : $\frac{ف}{ف_١} = \frac{ن^٢}{ن_١^٢}$



شكل (٦٤)

هذا هو البرهان الهندسي للقانون الذي اكتشفه جاليليو .

وبملاحظة أزمنة سقوط الأجسام من فوق مستوى مائل ، أثبت جاليليو صحة هذا القانون ، وكذلك أثبت قبيل وفاته أن السرعة التي يكتسبها جسم في نزوله على مستوى مائل طويل هي نفس السرعة التي يكتسبها في النزول على مستوى مائل قصير مساو له في الارتفاع .

وفي عام ١٦٠٧ أو حوالي هذا التاريخ كان صبي صانع نظارات ، واسمه هانز ليبرشاي Hans Lippershay من ميدلبرج بهولندا يلعب بعدسات النظارات في المحل فوجد أنه إذا أمسك بعدستين في وضع معين فإن الأشياء تبدو أكبر مما

تلك النقطة . ومتوسط الميل بين أى نقطتين على المنحنى يبين ميل المستقيم الواصل بين هاتين النقطتين ولا داعى لرسم المماس لإيجاد المعدل اللحظى أو لرسم الوتر لإيجاد متوسط المعدل، فمن السهل أن نحسب كلا منهما جبريا .

فمثلا المسألة التى يمثلها شكل ٩١ حيث ص = $س^٢$ ، وليس ثمة داع لرسم شكل لها بل يمكننا أن نفرض أن ا ى أى أحداثى صادى يبعد س وحدة عن نقطة الأصل ، وأن ب ك أحداثى صادى آخر يبعد (س + هـ) وحده عن نقطة الأصل، وأن ب ك − ا ى = ى وحدة .

$$ا ى = س^٢$$

$$ب ك = (س + هـ)^٢$$

$$= س^٢ + ٢ س هـ + هـ^٢$$

$$\therefore ى = ب ك - ا ى = ٢ س هـ + هـ^٢$$

$$\therefore \frac{ى}{هـ} = \frac{٢ س.هـ + هـ^٢}{هـ} = ٢ س + هـ$$

وكلما اقتربت هـ من الصفر اقتربت $\frac{ى}{هـ}$ من ٢ س . بعبارة أخرى رغم أن معدل تدحرج الكرة إلى أسفل المستوى المائل يتغير باستمرار إلا أنه يمكننا إيجاد هذا المعدل بالضبط عند أى لحظة ، فمثلا عند نهاية ٣ ثوان يكون المعدل

٢ (٣) أى ٦ أقدام فى الثانية ، وفى نهاية ٤ ثوان يكون المعدل ٨ قدم/ثانية وهكذا .

وقد وجدنا أن مشتقة الدالة الصادية ٣ س — س^{٢} هى ٣ — ٢ س ، وهذا يدل على أن معدل زيادة الدالة ٣ س — س^{٢} عند أى نقطة (أى إن معدل الزيادة فى طول الاحداثى الصادى الأصلى عند أى نقطة) هو المشتقة ٣—٢ س . وعليه يمكننا بواسطة هذه المشتقة أن نقول إنه بعد $\frac{١}{٤}$ ثانية كانت قيمة الدالة تنمو بمعدل ٣ — ٢ ($\frac{١}{٤}$) أو $\frac{١}{٢}$ ٢ وحدة طول فى وحدة الزمن ، وعند نهاية $\frac{١}{٢}$ ثانية كان معدل نمو الدالة هو ٣ — ٢ ($\frac{١}{٢}$) أى ٢ وحدة طول .

وحيث إن فهم حساب التفاضل يتوقف على فهم دقيق واضح لمعنى المشتقة فنأخذ مثلا آخر . لنفرض أن كرة قذفت رأسياً لأعلى فى الهواء بحيث كان ارتفاعها ص قدما عن يد القاذف يتعين من المعادلة ص = ٤٠ س — ١٦س^{٢} حيث تمثل س عدد الثوانى التى مرت منذ أن تركت الكرة يد القاذف. لنفرض أننا نريد إيجاد سرعة الكرة فى لحظة معينة أثناء سيرها صعوداً أو هبوطاً. لنفرض أن ا ب هو الاحداثى الصادى للمنحنى الذى ينتج من رسم المعادلة ص = ٤٠ س — ١٦ س^{٢} ،وليكن بعد هذا الاحداثى الصادى هو س وحدة طولية من نقطة الأصل ، وليكن ـ ك احداثيا صاديا آخر بعده (س + هـ) من نقطة الأصل . وحيث إن الدالة الصادية هى ٤٠ س — ١٦ س^{٢} فإن :

ا ص = ٤٠ س − ١٦ س^{٢} .

ب ك = ٤٠ (س + هـ) − ١٦ (س + هـ)^{٢} .

= ٤٠ س + ٤٠ هـ − ١٦ س^{٢} − ٣٢ س هـ − ١٦ هـ^{٢}

∴ ى = ب ك − ا ص = ٤٠ هـ − ٣٢ س هـ − ١٦ هـ^{٢}

∴ ى / هـ = (٤٠ هـ − ٣٢ س هـ − ١٦ هـ^{٢}) / هـ

= ٤٠ − ٣٢ س − ١٦ هـ

∴ كلما اقتربت هـ من الصفر فإن ى/هـ تقـترب من ٤٠ − ٣٢ س أى إن مشتقـة ٤٠ س − ١٦ س^{٢} هى ٤٠ − ٣٢ س (والقارىء الذى لا يعـرف حساب التفاضل يستفيد الآن من البحث عما إذا كانت هناك علاقة عكسية بين هذا وبين القانون الذى اكتشفه واليس الذى سبق لنا بحثه فى صفحات سابقة).

وستتضح لنا العلاقة بين مشتقة ودالتها الأصلية أكثر إذا عملنا جـدولا يبين قيم كل منها عند نهاية صفر ، ½ ، ⅔ ... ثانية . وإليك الجدول :

قيم س بالثانية	قيم الدالة الصادية ٤٠س — ١٦س^{٢}	قيم المشتقة ٤٠ — ٣٢ س
٠	٠	٤٠
$\frac{١}{٤}$	٩	٣٢
$\frac{١}{٢}$	١٦	٢٤
$\frac{٣}{٤}$	٢١	١٦
١	٢٤	٨
١ $\frac{١}{٤}$	٢٥	صفر
١ $\frac{١}{٢}$	٢٤	— ٨
١ $\frac{٣}{٤}$	٢١	— ١٦
٢	١٦	— ٢٤
٢ $\frac{١}{٤}$	٩	— ٣٢
٢ $\frac{١}{٢}$	٠	— ٤٠

دلالة قيم الدالة الصادية واضح ، إذ أن هذه القيم تدل على أن ارتفاع الكرة فوق يد القاذف يتزايد إلى أن يصل بعد ١$\frac{١}{٤}$ ثانية إلى أقصى ارتفاع ممكن وهو ٢٥ قدما ، ثم يبدأ ارتفاعها عن يد القاذف يتناقص حتى تعود الكرة بعدمضى ٢$\frac{١}{٢}$ ثانية من بدء القذف إلى يد القاذف، أى إلى نقطة البدء .

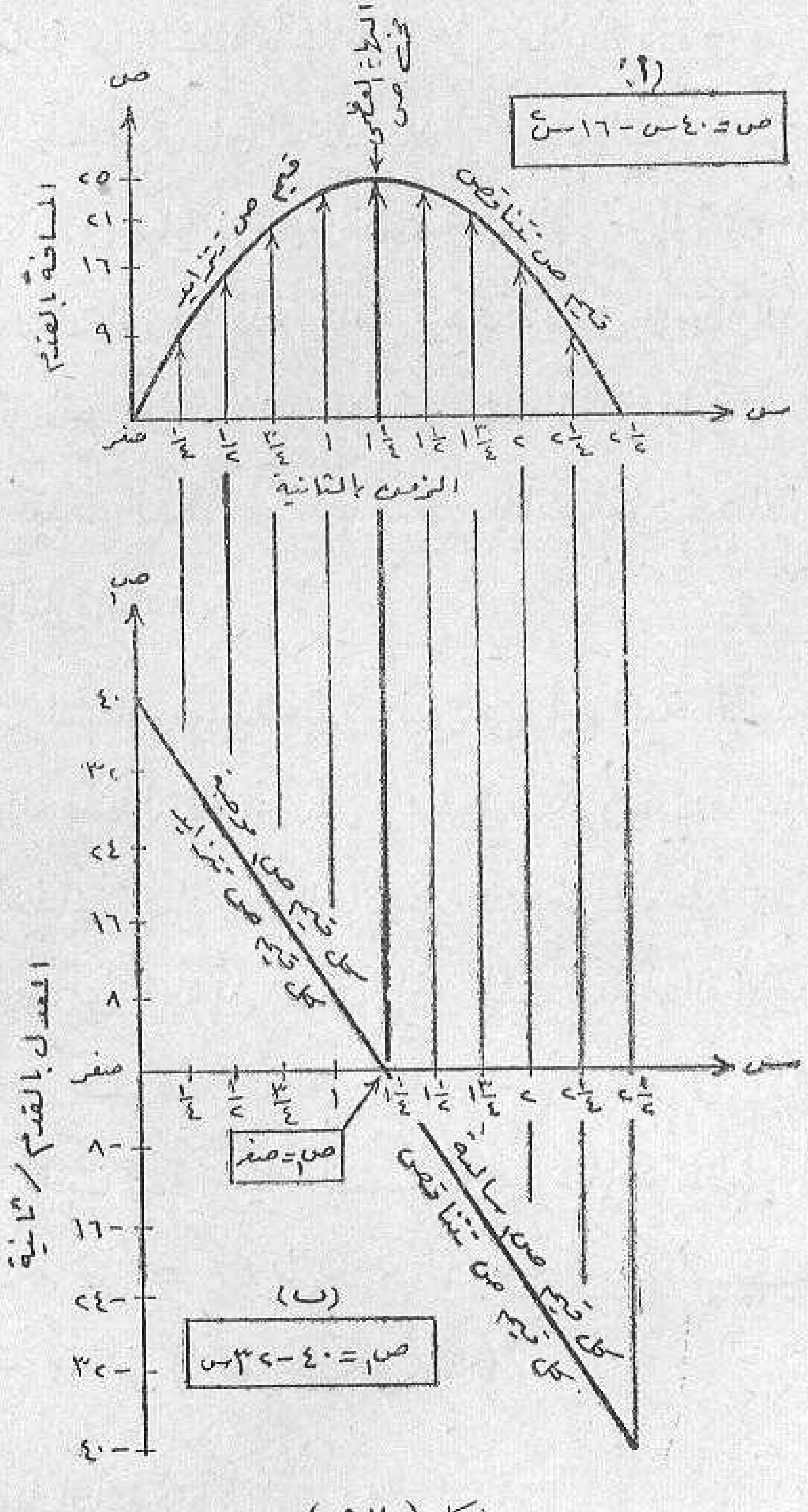
ومن معلوماتنا عن المشتقة بأنها تدل على معدل الزيادة فى قيم الاحداثيات الصادية فى أى لحظة نرى أن القاذف قد أكسب الكرة سرعة أو معدلا قدره ٤٠/قدم ثانية فى نهاية ١/٤ ثانية نقصت هذه السرعة إلى ٣٢ قدم/ثانية وفى نهاية ١/٢ ثانية نقصت إلى ٢٤ قدم/ ثانية وهكذا ، وفى اللحظة التى بلغت فيها الكرة أقصى ارتفاع أى بعد ١ ١/٤ ثانية من لحظة القذف لم يكن لها أى سرعة إطلاقا . وحالما فقدت الكرة سرعتها لأعلى بدأت تعود نحو الأرض ، وعليه فالسرعة تأخذ إشارة سالبة .

وإذا كانت المشتقة موجبة فهذا دليل على أن قيمة الاحداثى الصادى للدالة الأصلية عند هذه النقطة تتزايد ، وعندما تكون المشتقة سالبة يدل ذلك على أن قيمة الاحداثى الصادى للدالة الأصلية يتناقص ، وعليه يمكننا بملاحظة إشارة المشتقة عند أى نقطة أن نعرف إذا كانت قيمة الدالة الأصلية آخذة فى الزيادة أو النقصان عند هذه النقطة ، وهذه العملية غاية فى الأهمية ، إذ أنها تعرفنا عما إذا كانت قيمة معينة للدالة هى نهايات عظمى أو صغرى . ولنرسم الآن الدالة ص = ٤٠ س — ١٦ س^{٢} ومشتقتها التى نسميها ص$_{١}$ = ٤٠ — ٣٢ ص (انظر شكل ٩٧) .

لاحظ النقط التالية :

١ — فى الرسم البيانى (ا) تزداد قيم ص فى الفترة بين صفر ثانية ، ١ ١/٤ ثانية وتتناقص من ١ ١/٤ ثانية إلى ٢ ١/٢ ثانية .

٢ — فى الرسم البيانى (ب) قيم ص$_{١}$ موجبة (فوق المحور السينى) بين صفر ثانية ، ١ ١/٤ ثانية وسالبة (تحت المحور السينى) من ١ ١/٤ ثانيه إلى ٢ ١/٢ ثانية .



شكل (٩٧)

٣ — فى الرسم البيانى (أ) يصل الارتفاع إلى أقصاه عند س = $1\frac{1}{4}$ ثانية ، فى الرسم البيانى (ب) قيمة ص$_1$ = صفر عند س = $1\frac{1}{4}$.

٤ — إذا رسمنا المماس عند أقصى ارتفاع على الرسم البيانى (أ) فإن المماس يكون أفقيا . بعبارة أخرى عند س = $1\frac{1}{4}$ يكون الميل صفراً كما سبق

أن رأينا. لاحظ أن هذا يتفق مع الشكل فى (ب) وهو الرسم البيانى «للمعدل» (ميل المماس عند أى نقطة على الرسم البيانى ا) عند س = $١\frac{١}{٤}$ تكون $ص_١$ = ٠

نوضح ما سبق بالطريقة التالية لإيجاد النهايات العظمى والصغرى لقيم الدالة فى س: لنفرض أن الدالة هى ص = $س^٣$ — س .

١ — نوجد مشتقة $س^٣$ — س وسنجد أنها ٣ $س^٢$ — ١ ولنسمها $ص_١$، وقد رأينا أنه إذا كانت $ص_١$ = ٠ فإنه يكون للدالة الأصلية $س^٣$ — س إما نهاية عظمى وإما نهاية صغرى عند قيم س التى تحقق المعادلة ٣ $س^٢$ — ١ = ٠ . وهذه القيم هى س = ± ٠٫٥٧٧ حيث إن ٣ $س^٢$ = ١ ∴ $س^٢$ = $\frac{١}{٣}$

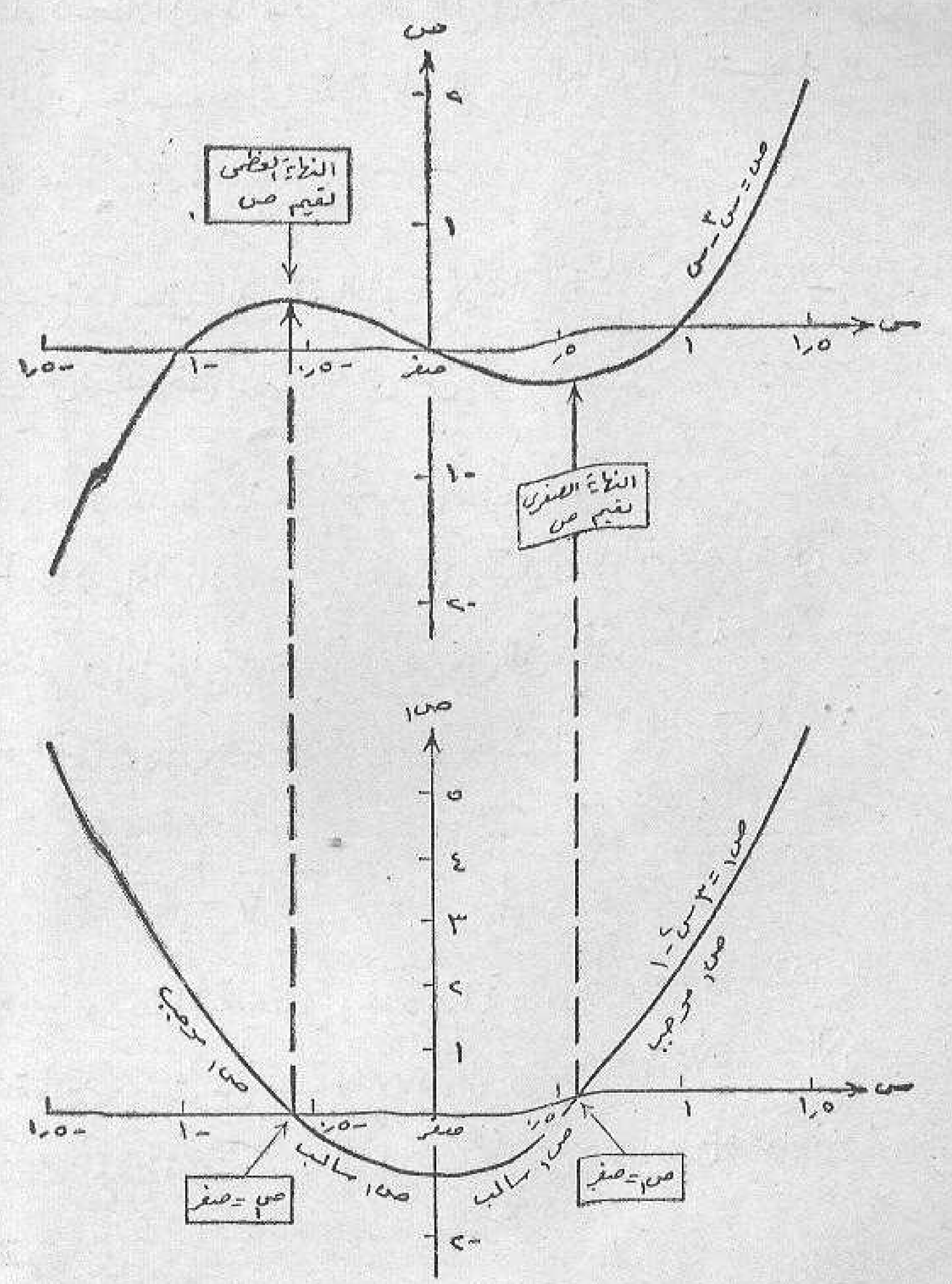
$$∴ س = ± \frac{١}{\sqrt{٣}} = ± \frac{\sqrt{٣}}{٣} = ± \frac{١٫٧٣٢}{٣} = ± ٠٫٥٧٧$$

٢ — وجدنا أنه يحتمل وجود نهاية عظمى أو صغرى للمقدار $س^٣$ — س عند النقطتين حيث س = + ٠٫٥٧٧ أو س = — ٠٫٥٧٧ والآن نبحث عما إذا كانت المشتقة تتغير من + إلى — أو من — إلى + كلما زادت س بين هذه القيم .

إذا كانت س = ٠٫٥ فإن ٣ $س^٢$ — ١ = — ٠٫٢٥

إذا كانت س = ٠٫٦ فإن ٣ $س^٢$ — ١ = + ٠٫٨

٣ $س^٢$ — ١ تتغير من — إلى + (ميل الخط البيانى للدالة الأصلية يتغير من السالب إلى الموجب)



شكل (٩٨)

إذا كانت س = — ٦و　　كانت ٣ س^{٢} — ١ = + ٨و

إذا كانت س = — ٥و　　كانت ٣ س^{٢} — ١ = — ٢٥و

٣ س^{٢} — ١ تتغير من + إلى — (ميل الخط البيانى للدالة الأصلية يتغير من موجب إلى سالب).

حيث إن الميل الموجب (لأعلى من اليسار إلى اليمين) يدل على تزايد قيم ص (هنا س^{٣} — س) والميل السالب (لأسفل من اليسار إلى اليمين) تدل على تناقص فى قيم ص نرى أن النهاية العظمى للدالة س^{٣} — س تقع عند النقطة حيث س = — ٥٧٧و والنهاية الصغرى عند س = + ٥٧٧و.

وربما سأل سائل : ما قيمة كل هـــذا ؟ والجواب الكامل على هـذا يقتضى دراسة شاملة لمسائل لا حصر لها تتعلق بالعلوم والهندسة وحياتنا اليومية. وحتى هذه المعرفة السطحية التى كوناها مع حساب التفاضل سوف تمكننا من حل مسائل كثيرة. مثال ذلك مشكل هيئة البريد وتعليماتها بالنسبة إلى حجم الطرد الذى يمكن إرساله عن طريق البريد. مثلا « ما أبعاد صندوق قاعدته مربعة وله أكبر حجم وفى الوقت نفسه يخضع لتعليمات الهيئة ؟ » والجواب هو أن الطرد لا يصح أن يزيد على ١٠٠ بوصة فى الارتفاع والمحيط معا ؟

فكيف لنا أن نوجد حجم هذا الصندوق الذى له أكبر سعة وفى نفس الوقت يقبله مكتب البريد ؟ لذلك نفرض أن طول ضلع المربع هو س بوصة.

∴ ارتفاع الصندوق = ١٠٠ — ٤ س

∴ حجم الصندوق = س^{٢} (١٠٠ — ٤ س)

= ١٠٠ س^{٢} — ٤ س^{٣}

وسنجد أن مشتقة هذه الدالة هى ٢٠٠ س — ١٢ س^{٢}.

وإذا كانت ٢٠٠ س — ١٢ س^{٢} = .

فإن س = ١٦ $\frac{٢}{٣}$.

س = ١٦ ⅔ تعطينا نهاية عظمى أو صغرى . فإذا وضعنا س = ١٦ فى المشتقة لوجدنا أن قيمة ٢٠٠ س — ١٢ س^{٢} موجبة وإذا وضعنا س = ١٧ فى المشتقة لحصلنا على قيمة سالبة . وعليه س = ١٦ ⅔ تعطينا نهاية عظمى للدالة ١٠٠ س^{٢} — ٤ س^{٣} أو الدالة التى تمثل الحجم . فإذا أردنا إرسال طرد عن طريق البريد له أكبر سعة، فلابد أن تكون أبعاده ١٦ ⅔ بوصة ، ١٦ ⅔ بوصة ، ٣٣ ⅓ بوصة وحجم مثل هذا الطرد يزيد قليلا على ٩٢٥٩ بوصة مكعبة أو ٣و٥ أقدام مكعبة تقريباً .

وحيث إننا اقتنعنا — على ما أعتقد — بفائدة حساب التفاضل ، وقد عرضنا القليل منه فى هذا الباب ، فسنحاول الآن اكتشاف قانون آلى غاية فى السهولة يوفر علينا العمليات الجبرية التى كنا نستخدمها حتى الآن، ويمكننا من كتابة الجواب بمجرد النظر .

وإذا لم يكن القارىء قد اكتشف لنفسه هذا القانون ، فعليه أن يفاضل الدوال الآتية، ثم يقارن كل مشتقة بدالتها الأصلية .

	الدالة الأصلية (ص = ٠٠٠)	المشتقة (ص$_{١}$ = ٠٠٠)
(١)	س^{٢}	؟
(٢)	س^{٣}	؟
(٣)	٣ س^{٢}	؟
(٤)	٥ س^{٢}	؟
(٥)	٧ س^{٣}	؟
(٦)	٣ س^{٢} — س^{٣}	؟
(٧)	٥ س	؟
(٨)	س^{٤} + ٣ س^{٢} + ٥س	؟
(٩)	٣ س^{٢} + ٩	(قارن هذا الجواب بجواب نمرة ٣)
(١٠)	٥ س^{٢} + ٢٧	(» » » » ٤)
(١١)	س^{٣} + ٦٤	(» » » » ٢)
(١٢)	٣ س^{٢} — س^{٣} + ١٩	(» » » » ٦)

الأجوبة :

(١) ٢ س　　(٢) ٣ س^{٢}　　(٣) ٦ س

(٤) ١٠ س　　(٥) ٢١ س^{٢}　　(٦) ٦س — ٣س^{٢}

(٧) ٥ (= ٥س^{٠})　　(٨) ٤س^{٣} + ٦س + ٥　　(٩) كما فى (٣)

(١٠) كما فى (٤)　　(١١) كما فى (٢)　　(١٢) كما فى (٦)

فإذا لم تكن قد نجحت فى اكتشاف القانون الآلى فإليك الطريقة :

اضرب كل متغير فى الدالة الأصلية فى قوة ذلك المتغير (فإن المتغير فى جميع الحالات السابقة هو س) ثم أنقص قوة المتغير بواحد .

أو بطريقة عامة إذا كان ص = سن فإن مشتقة هذه الدالة فى س تكون ن سن-١ بعبارة أخرى (إذا رسم الرسم البيانى للدالة ص = سن الذى يربط بين قيم س ، ص فإن ميل المنحنى عند أى نقطة يتعين من القانون ن سن-١ حيث س هى الاحدائى السينى لهذه النقطة) .

أو بعبارة أخرى : إذا كان ص = سن قانون يعطى قيمة الاحدائى الصادى لمنحنى ما فإن المعدل الذى تزداد به قيمة الاحدائى الصادى الواقع على بعد س من نقطة الأصل تعطى من القانون : ن سن-١ .

وسوف نرى أنه إذا بدأنا بالمشتقات التى أوجدناها فى الأمثلة الثمانية السابقة وطبقنا قانون واليس فإننا نحصل على الدوال الأصلية . بعبارة أخرى فى كل من هذه الحالات الثمان تكون الدالة الأصلية قانونا لإيجاد المساحة المحصورة تحت منحنى الدالة المشتقة، ومحدودة بذلك المنحنى والمحور السينى واحدائى صادى يقع على بعد س وحدات من نقطة الأصل ، فإذا رسم الرسم البيانى للدالة ٣ س٢ مثلا فإن القانون لإيجاد المساحة تحت المنحنى بين نقطة الأصل والاحدائى الصادى على بعد س من نقطة الأصل يكون ⅓ × ٣ س٣ ، أى إن الدالة الأصلية هى س٣ ، وهى التى حصلنا منها على المشتقة ٣س٢ . (وسنرى فيما بعد الارتباط بين قيمة الاحدائى الصادى والمساحة الواقعة تحت المنحنى . وهى واحدة من الحقائق الهامة المدهشة التى تكشفت عن طريق حساب التفاضل والتكامل) .

قد يفكر القارىء فى سبب مطابقة المشتقات الأربعة الأخيرة من الأمثلة

السابقة وهى ٩ — ١٢ المشتقات التى حصلنا عليها فى الأمثلة المتقدمة (٣ ،(٤)، (٢) ، (٦) إلا أن التفسير سهل : المشتقة تدل على ميل المنحنى الذى يمثل الدالة التى أخذت منها هذه المشتقة،ولكنها لاتدل على موقع ذلك المنحنى بالنسبة إلى المحورين . خذ المثل البسيط لثلاثة منحنيات (هى هنا مستقيمات) كالتى ترى فى شكل ٦٧ . من الواضح أن ميلها واحد لأنها متوازية ، رغم أن كلا منها يمثل دالة مختلفة ، وهذه الدوال هى ٢ س + ٣ ، ٢ س ، ٢ س — ٣ . وحيث إن مشتقة كل من هذه الدوال تدلنا على ميل المنحنى الممثل لتلك الدالة (بعبارة أخرى معدل ازدياد قيمة الدالة عند أى نقطة) فإن هذه المشتقات واحدة أى ٢ (أو ٢ س) ولذا فالخط البيانى لكل زوج من الدوال فى ٩) ، (٣) ، فى (١٠) ، (٤) ، فى (١١) ، (٢) ، فى (١٢) ، (٦) يكون له نفس قانون الميل ولكنه يختلف فى الوضع بالنسبة للمحورين . ويمكننا — باستخدام قانون واليس — أن نحصل على الدالة الأصلية من دالتها المشتقة حتى فى الحالات من ٩ إلى ١٢ (مادمنا ندخل فى حسابنا احتمال وجود حد إضافى فى الدالة التى نحصل عليها) ويتم ذلك بإضافة ثابت (حـ) ليقوم مقام أى عدد موجب أو سالب أو صفر هكذا :

الدالة المشتقة	الدالة الأصلية
٦ س — ٣ س^{٢}	٣ س^{٢} — س^{٣} + حـ

صحيح أن مشتقة ٣ س^{٢} — س^{٣} هى ٦ س — ٣ س^{٢} ولكن هذا المقدار يصح أن يكون مشتقة لعدد لا حصر له من الدوال الأخرى مثال ذلك ٣ س^{٢} — س^{٣} + ٤ أو ٣ س^{٢} — س^{٣} — ٧ وهكذا إلى ما لا نهاية . وأثر هذا

الثابت هو مجرد رفع أو خفض الخط البيانى للمقدار ٣ س٢ — س٣ بالنسبة إلى المحور السينى . ويرى هذا بوضوح فى شكل ٦٧ ، فالرسم البيانى للدالة ٢س + ٣ يعلو الرسم البيانى للدالة ٢ س بثلاث وحدات على المحور الصادى ، كما أن رسم الدالة ٢ س — ٣ يقطع المحور الصادى على بعد — ٣ وحدات من نقطة الأصل . لقد اكتشف القارئ الآن كيف « يكامل » أو العملية العكسية « للتفاضل » . وسنعود إلى هذا الموضوع بعد أن نتحدث قليلا عن ليبنتز . ولكن هذا كله بل وأكثر منه كان قد عمله اسحق نيوتن فى ظرف أربع أو خمس سنوات من قراءته لأول كتاب فى الرياضيات ، وعلى الرغم من أننا لم نلق سوى نظرة سطحية على مادة التفاضل والتكامل فإن القارئ يستطيع أن يحكم بنفسه أن نيوتن قد أوجد أداة يهاجم بها التعقيد والصعوبات فى رياضيات المنحنيات التى ترسمها الأجسام السموية فى حركتها ، وكذا فى المساحات المرتبطة بهذه المنحنيات ،وهكذا .ومنذ بدء عام ١٦٦٤ أو منذ التاسع عشر من فبراير من تلك السنة على وجه التحديد ونيوتن يراقب السموات ، ووجد أنه بحاجة إلى جهاز رياضى قوى تحت إمرته إذا أراد إيجاد تفسير لقوانين كبلر . فابتدع وطور حساب التفاضل والتكامل الذى فعل برياضيات الحركة والنمو ما فعلته هندسة ديكارت بهندسة الإغريق . ومثل ديكارت ، بنى نيوتن على أساس وضعه آخرون وأنتج فرعا عاماً بعيد المدى من الرياضيات فاقت نتائجه كل تصور وحسبان ، ونظرا لأن فرمات كان أول من استخدم هذه الطريقة كان يسمى أحياناً بمبتدع حساب التفاضل والتكامل،وهذا كان رأى لابلاس ، وقد رأينا رأيه فى كتاب نيوتن Principia ولكن العلماء أكدوا لنا أن فرمات لم يستخدم طرقه إلا فى حالات قليلة معينة ، أما نيوتن

فقد ابتدع مجموعة من القوانين يمكن تطبيقها على أى نوع من الدوال ، ولما قال نيوتن : « إنه وقف على أكتاف المردة » لاشك فى أنه كان يقصد بالمردة ديكارت وفرمات وواليس وبارو فيما يتعلق بحساب التفاضل والتكامل وأنه كان يشير إلى العلماء مثل جاليليو وكبلر فيما يختص بعمله فى الجاذبية .

لم يعلن نيوتن «طريقته عن الحركة» للشعب حتى عام ١٧٣٦ حين ظهرت ترجمة لها قام بعملها ج كولوسون ، وفى الكتاب نرى أن نيوتن كان يفكر فى المستقيم كأنه يتولد من حركة نقطة،أى إنه فكر فى المستقيم ككمية منسابة وسماه « المنساب أو المتحرك » والسرعة التى ينساب بها المستقيم هى حركته أو انسيابه (وقد قام خلاف كبير فى القرن الذى تلا وفاة نيوتن بشأن تفسير آخر لكلمة انسياب أو حركة) وقد سمى نيوتن الطول الصغير جداً الذى يزيده « متحرك » فى وقت صغير جداً « بعزم » المتحرك ، وقد رمز لحركة س بالرمز سَ وعندما تكون حركة س صغيرة جداً كان يمثل عزم المتحرك بالرمز سَ م فإذا كان لديه متحركان س ، ص يرتبطان بالمعادلة ص = ٣ س — س^٢ فقد كان يعوض عن س بالتعبير س + سَ م ، وعوضا عن ص كان يكتب ص + صَ م فى المعادلة ٣ س — س^٢ — ص = ٠ .

(قارن هذا بطريقتنا الحالية : إننا لا نتحدث عن المقادير المتناهية الصغر ولا نتكلم عن فكرة « نهاية » إلا فى المرحلة الأخيرة من العمل) .

وهذا يعطيه ٣ س + ٣ سَ م — س^٢ — ٢ س (سَ م) — (سَ م)^٢ — ص — صَ م = صفر وبإهمال (سَ م)^٢ وبطرح المعادلة الأصلية ٣س — س^٢ —ص = ٠ نجد أن ٣ سَ م — ٢ س (سَ م) — صَ م = ٠ .

وعليه $\frac{\text{ص ن م}}{\text{س ن م}} = ٣ - ٢ \text{س}$

وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها بطريقتنا الحديثة ، والمهم فى الأمر هو أن نيوتن استخدم فى هذه المرحلة الأولى من تطور حساب التفاضل الخطوة الأساسية فى طريقة فرمات ، وكان قد أخذها عن بارو ، أى إنه إذا زاد طول الاحداثى الصادى بمقدار ى وحدة فإن متوسط معدل الزيادة فى طوله حينما يمر من نقطة بعدها س عن نقطة الأصل إلى نقطة بعدها (س + هـ) عن نقطة الأصل فإن :

$$\frac{\text{ى}}{\text{هـ}} = \frac{\text{الفرق بين طولى الأحدائيين الصاديين (بدلالة س)}}{\text{هـ}}$$

وما زالت هذه الخطوة هى الخطوة الأساسية لكل من يرغب فى تعلم حساب التفاضل بالطريقة الصحيحة (وليس مجرد تعليمه بتطبيق بضعة قوانين آلية دون فهم لمعنى المشتقة) . ولسوء الحظ تتجه معظم الكتب الدراسية إلى تعقيد الأفكار البسيطة باستخدام رموز مختزلة قبل أن يتمكن الطالب من الفهم الصحيح للموضوع . ولا ننكر أن هذه الرموز ضرورية فى تطبيق حساب التفاضل و تعميمه فهى تخفف العمل على من استوعب المادة فعلا و تبسطه إذ أنها توحى إليه بأفكار وعمليات فى قالب دقيق مركز ، أما بالنسبة للمبتدئين فقد ثبت أن هذه الرموز تكون بمثابة حجر عثرة لهم . وقد قال بروفسور نان (Prof T. P. Nunn) أحد المعلمين الممتازين فى إنجلترا وأستاذ الرياضيات بجامعة لندن فى هذا الصدد « إن الرموز المستخدمة فى حساب التفاضل تعرف بين الطلبة بالأعلام المعادية التى ترفرف فوق قلاع منيعة » .

لابد وأن يدرك المبتدىء أن التعبير الرمزى ليس مخيفا كما يظهر لأول وهلة. ولنلق نظرة على هذه المعادلة البشعة :

$$\lim_{\text{△س} \to 0} \frac{\text{△ص}}{\text{△س}} = \lim_{\text{△س} \to 0} \frac{\text{د}(\text{ح} + \text{△س}) - \text{د}(\text{ح})}{\text{△س}}$$

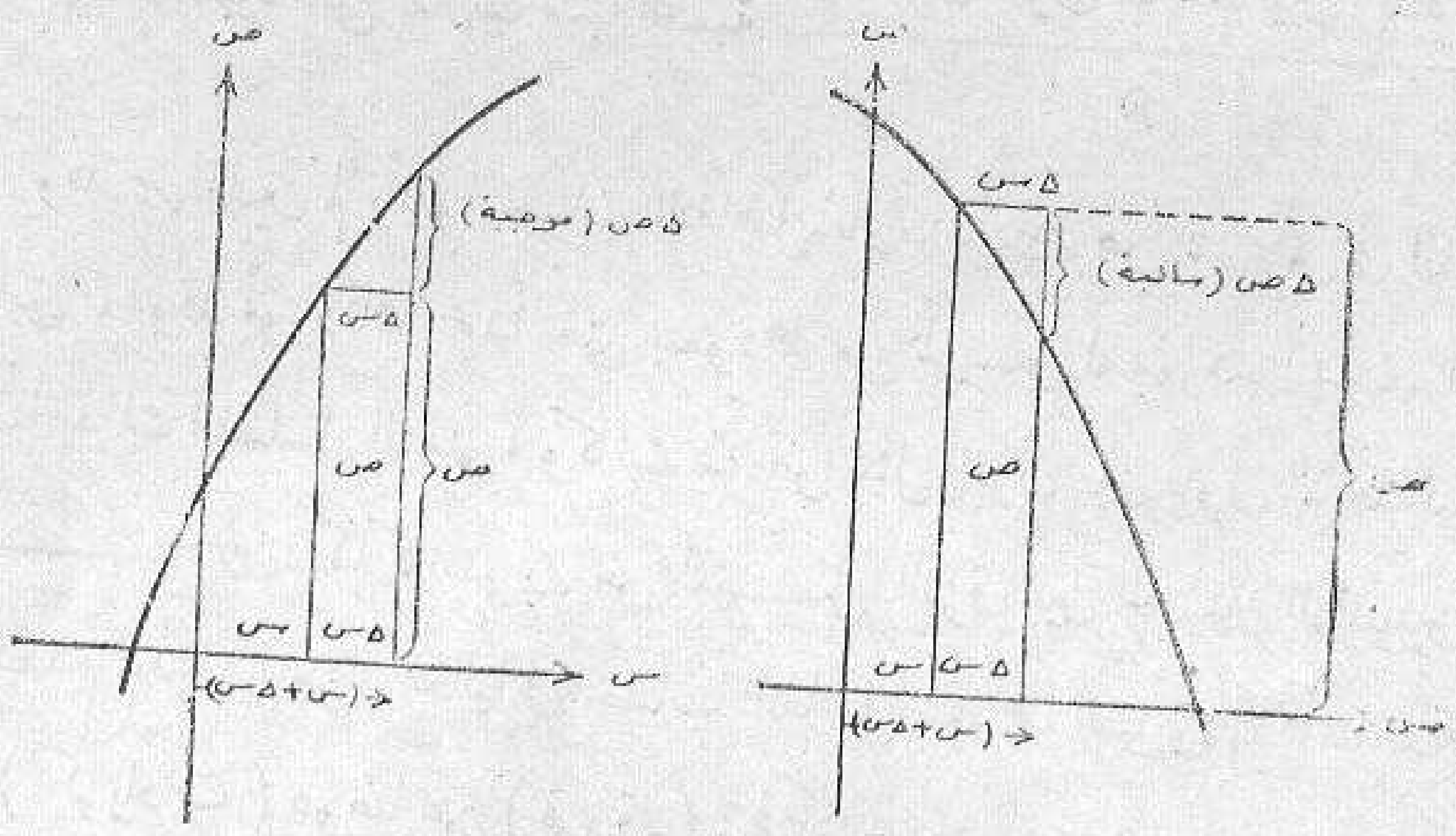
ما معناها ؟ كل ما تعنيه هو أنه يمكن إيجاد النهاية التى تقترب منها النسبة $\frac{\text{ى}}{\text{هـ}}$ بإيجاد النهاية التى تقترب منها النسبة $\frac{\text{الفرق بين طولى الاحداثيين بدلالة س}}{\text{هـ}}$

وقد مر الذين لم يألفوا حساب التفاضل بالرمزين △ ص ، △س فى الباب السابق ، وقد أوردناهما عمداً حتى يتعودها من لم يسبق له معرفتهما ، رغم أننا خالفنا بذلك التسلسل الزمنى، وكانت △ ص تمثل الفرق بين طولى الاحداثيين الصاديين كما كانت △ س تمثل الفرق بين القيمتين السينيتين . ويستخدم هذان الرمزان حاليا فى حساب التفاضل بمعناهما السابق إلا أننا نفكر فيهما (كزيادات) عوضا عن (فروق) . فمثلا △ ص هى رمز للزيادة — مهما كانت — فى الاحداثى الصادى الحادثة من زيادة قدرها △ س فى القيمة السينية لهذا الاحداثى . ولنا أن نفكر فى △ س كأنها أى خطوة أفقية نحو يمين نقطة على المنحنى ، △ ص كالخطوة الضرورية تبعاً لذلك الوصول إلى المنحنى . وإذا كانت الخطوة △ ص لأعلى كانت موجبة وإذا كانت الخطوة △ ص لأسفل فهى سالبة .

واضح فى شكل ٩٩ أنه عندما تكون △ ص سالبة يكون الميل سالباً ، وهذه دلالة على أن قيمة الدالة (أو طول الاحداثى الصادى) تتناقص . والاحتمالان

المبينان فى شكل ٩٩ يدخلان فى نفس الحل الجبرى مادمنا نتذكر أن الاحداثى الصادى الأيسر يطرح دائماً من الاحداثى الصادى الأيمن (كلاهما يعبر عنه بدلالة س) .

معنى الرمز $\underset{\Delta س \to ٠}{نهـا}$ هى النهاية التى يقترب منها المقدار المعطى عندما تقترب Δ س من الصفر .



شكل (٩٩)

والآن نعتبر الكسر أو النسبة التى تكون الطرف الأيسر من المعادلة السالفة وهو :

$$\frac{د(ح + \Delta س) - د(ح)}{\Delta س}$$

هنا نجد التعبير الرمزى للدالة . مثلا ٣ س — $س^٢$ وهى دالة فى س يمكن أن تكتب باختصار : د (س) ، ويفهم من هذا أن (د) اختصار لكلمة

دالة كما أن △ رمز مختصر (للزيادة) وفوق ذلك فإن قيمة دالة س عندما س = ٢ مثلا يمكن أن نرمز إليها بالرمز د (٢) فإذا كانت الدالة هى ٣ س — س^{٢}

كان د (٢) = ٣ (٢) — (٢)^{٢} = ٦ — ٤ أو ٢ ،

د (٣) = ٣ (٣) — (٣)^{٢} أى صفر ،

د (ح) = ٣ (ح) — (ح)^{٢} .

د (ح + △ س) معناها ٣ (ح + △ س) — (ح + △ س)^{٢}.

فالطرف الأيسر من المعادلة معناه نسبة = $\frac{\text{الفرق بين طولى الاحداثيين الصاديين}}{\text{الزيادة المناظرة فى س}}$

وعليه فإن المعادلة $\text{نهـا}_{\text{△ س} \to ٠} \frac{\text{△ ص}}{\text{△ س}} = \text{نهـا}_{\text{△ س} \to ٠} \frac{\text{د (ح + △ س) — د (ح)}}{\text{△ س}}$

هى فى الواقع حمل فى ثياب ذئب ! ومعناها أنه يمكن إيجاد النهاية التى تقترب منها النسبة بين الزيادة الصادية والزيادة السينية المناظرة ، بأخذ النهاية التى تقترب منها النسبة بين الزيادة الصادية (بدلالة س) والزيادة السينية .

حينما كان نيوتن يستمع إلى محاضرات بارو عام ١٦٦٤ تعلم طريقة استخدام « مثلث بارو التفاضلى » واستخدمه كنقطة بدء فى تنمية حسابه لتفاضل الحركة حين كان فى وولز ثورب فى أثناء انتشار الطاعون ، ثم طبق هـــذه الطريقة الجديدة أى طريقة « رياضيات الحركة والنمو » — كما كانوا يسمونها — فى إيجاد تفسير القوانين الخاصة بتحركات الأجسام السموية التى كان قد اكتشفها كپلر والتى حار العلماء فى تفسيرها سنين طويلة . وهناك احتمال فى أن يكون نيوتن فى هذه الفترة (١٦٦٥ — ١٦٦٦) قد بدأ فعلا فى هذا البحث إلا أن

معظم وقته كان مشغولا بدراسة تكوين الضوء وبتجاربه العملية على العدسات والمنشورات ، ولكنه لم يكتف بكل هذا بل بدأ يدرس الكيمياء ، وهى مادة أولع بها واحتفظ بحبه لها طول حياته وثبت أنها كانت ذات فائدة عملية كبرى بالنسبة له حين عين فى أواخر القرن وكيلا ثم رئيسا لمصلحة صك النقود وكان عليه مباشرة إصدار نوع جديد من العملة .

وفى أوائل أكتوبر عام ١٦٦٧ انتخب عضواً بكلية ترينيتى ، وفى السنة التالية نال درجة M.A. .

وفى صيف ١٦٦٩ تقدم إلى بارو بمقالة تناولت بعض التفسير لنظريته عن الحركة وكان تقدير الرجل عظيما بدرجة دفعته لأن يصف نيوتن لجون كولينز بأنه « عبقرى منقطع النظير » ونصحه بارو بنشر المقالة ولكن نواضع نيوتن أبى عليه نشرها ولو فعل لدرء الخصومة المرة والمشاحنات الطويلة المخجلة التى قامت بين أتباعه وأتباع ليبنتز .

وبعد أن برهن نيوتن على ذكائه الرياضى الخارق بزمن قصير استقال بارو من منصبه — وكان يرغب فى الاتجاه نحو العلوم الدينية — وبفضل تزكيته القديمة لنيوتن عين الأخير خلفا له وكانت سنه وقتئذ سبعة وعشرين عاماً .

وكان على أستاذ الكرسى اللوكاسى للرياضيات فى ذلك الحين أن يحاضر مرة واحدة من كل أسبوع فى أثناء الفصل الدراسى ، فى موضوع رياضى ، أو فى الفلك ، أو الجغرافيا ، أو علم المرئيات (قوانين الضوء) أو الاستاتيكا ، وأن يقضى ساعتين أسبوعيا فى البحث مع طلبته . اختار نيوتن علم المرئيات مادة لمحاضراته الأولى وكان قد قام ببحوث كثيرة واكتشافات فى هذا الموضوع

ولكن نتائج هذه البحوث ظلت حبيسة بين جدران الجامعة فترة طويلة ، ولكنه ما إن انتخب لعضوية الجمعية الملكية حتى أرسل إلى هذه الهيئة بمقال قام على محاضراته ، وبذا انتشرت أبحاثه فى تكوين الضوء بين علماء أوروبا ، ولكنه ما لبث أن وجد نفسه وسط عاصفة شديدة من المشاحنات والاعتراضات التى سبق أن أشرنا إليها ، وكان من أشد خصومه زميل من الجمعية الملكية اسمه روبرت هوك وكان قديراً فى علمه إلا أنه كان سليط اللسان جاف الأسلوب لدرجة آلمت نيوتن وأحزنته ، وكان ضمن المعارضين لبعض نظرياته فى الضوء لوكاس أستاذ الرياضيات فى لييج وكان نقده سبباً فى شكوى نيوتن لسكرتير الجمعية الملكية التى سبق أن تحدثنا عنها فى هذا الباب .

وعلى الرغم من عبارته إلى سكرتير الجمعية الملكية بأن « حال انتهائه من مسألة لوكاس سوف ينقطع نهائياً عن النشر إلا فيما يحقق رغباته الشخصية أو رغبة من يأتون بعده » فقد استمر فى نشر مقالات عدة فى مادة الضوء فى « المبادلات الفلسفية »(١) وكانت الصحيفة الرسمية للجمعية الملكية ، وتقدم نيوتن فى هذه المقالات بنظرية تقول إن الضوء يتكون من جزئيات صغيرة جداً مسقطة بواسطة الأجسام المضيئة خلال الفراغ . وقد هجر العلماء هذه النظرية فى أوائل القرن التاسع عشر محبذين النظرية الموجية للعالم هيوجنز Huygens التى تؤكد ضرورة وجود وسط لا وزن له ولا يمكن أن يرى اسمه « الأثير » ولا يمكن أن يدرك بالحواس ولكنه ينتشر فى الفراغ ويملأ الفراغات الصغيرة الموجودة بين جزئيات الهواء والمواد الأخرى .

---

(١) Philosophical Transactions

وظل العلماء يعتبرون أن هذه النظرية الموجية تفسر جميع الظواهر الطبيعية للضوء حتى عام ١٩٠٠ حين بدأوا يصرحون أن النظرية لا تفسر جميع الظواهر واقترح ماكس بلانك Max Planck عام ١٩٠٠ أن الضوء ينتقل فى « كتل » صغيرة أو Quanta . وللقارئ الذى يرغب فى الاستزادة من هذه النظرية أن يقرأ The Dilemma of Modern Physics للدكتور د . أ . رتشموند .

هذه الدراسة خارجة عن نطاق قصة الرياضيات ، ولذا نكتفى بالقول بأن العلماء لايستطيعون تفسير جميع الطرق الطبيعية للضوء دون الاستعانة بكل من النظريتين الموجية ونظرية الكتل ، ولذا فإن من المرجح أن نيوتن كان يسير نحو كشف الحقيقة عندما وضع نظريته عن « جزئيات » الضوء .

وفى عام ١٦٧٣ وقع حادث يرمى ضوءاً على حالة نيوتن المالية أو ربما يشعر باهتمام غير منتظر منه بقيمة المادة . كانت العضوية بكلية ترنيتى تنتهى بعد فترة معينة ما لم يكن صاحبها من رجال الكهنوت ، وحيث إن نيوتن — رغم تدينه الشديد — لم يكن قد رسم كاهنا فكان من المفروض أن تنتهى مدة عضويته فى خريف ١٦٧٥ .

ويظهر أن احتمال ضياع مرتبه قد أقلقه ، إذ أنه كتب إلى أولدنبرج سكرتير الجمعية الملكية يقول: « سيدى: أرجو أن تطلب من الجمعية أن تسمح لى بالانسحاب من عضويتها ، إذ أننى أشعر رغم احترامى لهذه الهيئة الموقرة بأنها لم تفدنى وأنى لن أستطيع حضور اجتماعاتها (لبعد الشقة) ولذا قررت الانسحاب » .

ويرجح أن أولدنبرج عرض عليه أن يطلب إلى الجمعية إعفاءه من الرسوم المقررة لأن نيوتن كتب إليه يقول : « بالنسبة لرسم العضوية الذى أدفعه أشكرك ولكننى لن أطمع فى أن تبذل أى جهد لإعفائى من الدفع » . ثم كتب بعد ذلك يقول : « لقد أجمعت الهيئة على إعفائى من الاشتراك أسوة بالآخرين » ومع كل ففى عام ١٦٧٥ صدر استثناء خاص بالنسبة لنيوتن يسمح له باعتباره أستاذ كرسى لوكاس بالاحتفاظ بعضوية الكلية دون أخذ العهود الكهنوتية . ويغلب الآن الظن أن حالته المالية تحسنت بعد عام ١٦٧٦ إذ أنه تبرع بمبلغ ٤٠ جنيها (تعادل ١٠٠٠ دولار الآن فى قوتها الشرائية) إسهاما منه فى بناء المكتبة الجديدة بكلية ترينيتى .

وبين الأعوام ١٦٧٤ ، ١٦٧٧ كان حساب التفاضل والتكامل للكميات المتناهيات الصغر قد تطور مستقلا فى ألمانيا عن طريق الرياضى ليبنتز ، غير أن عمله فى هذه المادة لم ينشر إلا فى عام ١٦٨٤ . وسنلقى نظرة على عمل وحياة هذا العالم فى باب آخر .

ولنعد الآن إلى نيوتن . بين السنوات ١٦٧٣ ، ١٦٨٣ كانت محاضراته فى كمبردج فى الجبر ، لاسيما ما كان يتعلق فيها بنظرية المعادلات ، ووضعت هذه المحاضرات على صورة كتاب وطبعت عام ١٧٠٧ وظهر فيهـا تقـدم محسوس هام فى المادة لاسيما فيما يسمى بالجذور « التخيلية » لبعض المعادلات وهى مادة سوف نتكلم عنها فيما بعد .

وقد زار نيوتن عام ١٦٨٤ صديقه ادموند هاللى ، وكان لهذه الزيارة أثر عظيم ونتائج هامة . كان هاللى ، وهوك ، وهيوجنز ، ورن يحاولون إيجاد تفسير

للقوانين الأساسية لحركة الأجسام السموية التى كان قد اكتشفها كپلر ، وقال هاللى إن بحوثهم قد توقفت لعجزهم عن تطبيق قوانين كپلر لأنهم كانوا يحاولون تعيين مدار النجم .

فقال له نيوتن للتو إنه أثبت قبل ذلك بخمسة أعوام أن مدار النجم هو قطع ناقص ولم يستطع أن يضع يده على الورقة التى دون فيها حساباته عام ١٦٧٩ أثناء الزيارة فوعد بإعادة عملها إكراماً لصديقه . ويظهر أن هذا الوعد أدى به إلى العودة إلى موضوع الجاذبية الكونية فى أثناء العطلة الصيفية عام ١٦٨٤ لأن محاضراته فى الفصل الدراسى الثانى كانت فى نفس هذا الموضوع ، وعاد هاللى فزاره للمرة الثانية فى منتصف الفصل الدراسى ، واطلع على مذكرات محاضراته ، وهذه المذكرات نفسها تحت عنوان « فيما يتعلق بحركة الأجسام » موجودة حالياً فى مكتبة جامعة كمبردج ، واستحث هاللى صديقه نيوتن على نشر هذه المذكرات ولكنه لم ينجح فى إقناع نيوتن بذلك ، فاكتفى بوعد منه فى أن يرسل هذه المذكرات إلى الجمعية الملكية ، وبر نيوتن بوعده فى السنة التالية ، ويرجع الفضل فى انهماك نيوتن فى موضوع الجاذبية إلى إلحاح هاللى ولباقته وقد تكلمنا عنها فى بدء هذا الباب . وفى عام ١٦٨٥ استطاع إثبات أن قوة الجذب الكلية لكرة مصمتة لكتلة خارجة عنها يمكن اعتبارها مركزة فى نقطة واحدة هى مركز الكرة .

حالما أثبت نيوتن هذه النظرية الرائعة — ونحن نعلم من كلماته نفسها أنه لم يكن ينتظر نتيجة مبدعة كهذه حتى رآها تظهر من بين سطور بحثه الرياضى — حتى تفتحت أمامه حركة الكون بأكملها . . لم يكن يدرى حين ألقى محاضراته عام ١٦٨٤ أن الشمس والأرض تؤثران بقوة جذبهما كما لو كانتا

نقطتين . تصور إذن كيف بدت هذه النظريات فى عينى نيوتن حين أدرك أن هذه النتائج التى كان يعتقدها تقريبية حين طبقت على النظام الشمسى إنما هى فى الواقع مضبوطة .

كان إلى ذلك حين يجدها مضبوطة عندما كان يعتبر الشمس نقطة إذا قورنت ببعدها عن النجوم أو حين اعتبر الأرض نقطة بالنسبة إلى بعدها عن القمر — وهى مسافة تساوى نصف قطر الأرض ستين مرة فقط — أما الآن فقد ثبتت صحتها رياضيا فيما عدا انحراف خفيف عن الكروية الكاملة فى حالة الشمس والأرض والنجوم ، ويمكننا أن نتصور تأثير هذا الانتقال من التقريب إلى الدقة فى إرسال الحماسة فى نفس نيوتن وتشجيعه على القيام بأعمال أكبر وأجل شأنا ، ففى إمكانه الآن أن يطبق التحليل الرياضى بدقة مطلقة فى المسائل الواقعية فى الفلك .

وكانت الجهود التى يبذلها عقل نيوتن على أثر انتصاراته العلمية قوية عنيفة حتى إنه فى إبريل ١٦٨٦ أرسل كتابه الأول من Principia إلى الجمعية الملكية ، وأرسل الثانى فى صيف نفس السنة ، وأكمل كتابه الثالث فى صورة مخطوط فى عام ١٦٨٧ ، ونشر الكتاب بأجزائه الثلاثة على نفقة هالى فى صيف عام ١٦٨٧ وكان هذا هو العمل العظيم الذى امتدحه لابلاس بعد مائة سنة بقوله : يفوق كل ما أنتجته العبقرية البشرية .

وكما سبق وقلنا — كان نيوتن يستخدم الطرق الهندسية فى جميع براهينه فى Principia لعلمه بجهل سائر الرياضيين بتفاضل الحركة وقد يؤدى ذلك إلى رفض نتائج تخالف النظريات السائدة فى ذلك الحين مثل نظرية ديكارت عن الكون .

وربما كان عـدم تطور حساب التفاضـــــل تطوراً كاملا حينذاك من الأسباب التى حدت بنيوتن إلى استخدام الهندسة الإغريقية المألوفة ، وحيث إن نيوتن قدم براهينه الهندسيـة دون تفسير ، فلم يستطع تتبع تدليله المركز سوى نخبة من كبار الرياضيين ، وعلى الرغم من ذلك فبفضل الاستقبال الحماسى الذى لقيه ال Principia انتشرت نظرية نيوتن الكونية بسرعة فى ربوع أوروبا فيما عدا فرنسا حيث قوبلت آراؤه بمعارضة شديدة لسنوات عدة ، وعلى كل فقد كتب فولتير — بمساعدة صديقته مدام دى شاتليه وكانت رياضية مرموقة — مقالا مطولا عن نظام نيوتن أدى إلى الاعتراف به فى فرنسا كما فى سائر أوروبا ، وكان الإقبال على شراء ال Principia شديداً حتى إنه ما إن أتى عام ١٦٩١ حتى كانت الطبعات كلها قد نفدت .

وفى عام ١٦٨٧ وقف نيوتن وقفة مشرفة فى دفاعه عن امتيازات جامعة كمبردج حين كانت مهددة من الملك جيمس الثانى ، وفى عام ١٦٨٩ اختارته الجامعة ليمثلها فى البرلمان تقديراً له على موقفه الحاسم وعزيمته القوية فى تلك المناسبة ، وليس لدينا ما يثبت أنه اشترك فى المناقشات البرلمانية ، وفى عام ١٦٩٠ تنازل عن كرسيه وعاد إلى كمبردج .

ولنترك نيوتن الآن لنلتفت إلى معاصر عظيم له فى ألمانيا .

كان جوتفريد ليبنتز Gottfried Leibniz يصغر نيوتن بثلاثة أعوام ونصف عام ؛ إذ أنه ولد فى ٢١ من يونيو من عام ١٦٤٦ حيث كان أبوه (الذى مات بعد ولادته بستة أعوام) أستاذ الفلسفة الأدبية . وحتى فى طفولته كان ليبنتز مشغوفا بالقراءة ويقال إنه علم نفسه اللاتينية بدراسة نسخة مصورة

من تاريخ ليفى ، وأنه بدأ دراسة اليونانية قبل أن يتم الثانية عشرة ، ثم التفت إلى المنطق وقبل أن يبلغ الخامسة عشرة كان قد فكر فى ضرورة إصلاح الطرق القديمة ، وطرق العصور الوسطى فى معالجة المادة .

وفى خريف ١٦٦١ — وهو نفس تاريخ دخول نيوتن إلى كلية ترينيتى بكمبردج — دخل ليبنتز جامعة ليبزج على الرغم من صغر سنه ودرس فيها القانون وكانت الدراسة تقتضى إلماماً بأعمال بعض المفكرين فى عصره مثل كپلر وجاليليو وديكارت الذين كانوا يعدون العدة لثورة فى ميدانى التفكير العلمى والفلسفة .

وفى عام ١٦٦٦ — وهى السنة التى شغل فيها نيوتن بتطوير طريقته فى الحركة — تقدم ليبنتز لنيل درجة الدكتوراه فى القانون ، ولكنه حرم من الامتحان لصغر سنه . وأغضبه ذلك فترك ليبزج على ألا يعود إليها ، وقدم بحثه إلى جامعة التدروف (نورمبرج) ولم ينل درجته المشتهاة فحسب ، بل عرض عليه منصب أستاذ ورفض المنصب ، ولكنه استقر فى نورمبرج حيث نشر مقالة عن طريقة جديدة فى تدريس وتعلم القانون أعجب بها عمدة ماتز فوجد ليبنتز نفسه وقد عين مساعداً لتنقيح قانون الحكم ، ومن ثم أرسل فى مهمات دبلوماسية مختلفة وكتب عدة مقالات سياسية تتعلق بهذه المهمات . واشترك فى لعبة خطرة وهى توزيع القوى السياسية محاولا أن يحول مطامع لويس الرابع عشر وأنظاره عن ألمانيا إلى تركيا مقترحا أن تتكتل قوى أوروبا فى حرب دينية ضد تركيا وأن تزيد فرنسا من قوتها بالاستيلاء على مصر من تركيا ، ولكن هذه الخطة الشيطانية باءت بالفشل إلا أنها جاءت بالخير عن طريق غير مباشر . ذلك أن

ليبنتز استدعى إلى فرنسا للمثول أمام لويس ووضع الخطة بين يديه وهنا قابل هيوجنز Huygens . قبل أن يقوم ليبنتز بهذه الرحلة كان قد ألف فى موضوعات كثيرة مختلفة ، فقد كتب فى القانون والسياسة والمنطق والفلسفة والطبيعة وفى الدين والميكانيكا وعلم المرئيات كما اخترع آلة حاسبة تفوق آلة بسكال ، إذ أنه كان يمكن بها إجراء عمليات الضرب والقسمة واستخراج الجذور علاوة على الجمع والطرح ، وبدأ ليبنتز فى دراسة جدية للرياضيات تحت إرشاد هيوجنز .

وفى يناير من عام ١٦٧٣ كان قد زار إنجلترا فى إحدى المهمات الدبلوماسية لحساب عمدة ما نز ، وهناك قابل أولدنبرج وعرض آلته الحاسبة على الجمعية الملكية فانتخب عضواً فيها فى إبريل ١٦٧٣ .

وبعد عودته إلى ألمانيا عام ١٦٧٤ كتب إلى أولدنبرج يقول إنه اكتشف نظريات هامة تتعلق « بتربيع » الدائرة ، وأجاب أولدنبرج بأن نيوتن كان قد استخدم طرقا مماثلة ، وفى عام ١٦٧٦ أرسل نيوتن خطابا إلى ليبنتز على يد أولدنبرج يتعلق بفكوكات المقادير ذات الحدين والمتواليات اللانهائية وغيرها ، وأرسل ليبنتز فى طلب المزيد من الإيضاح وفى رده — بلغ عدد الصفحات وقت نشر الرد ثلاثين صفحة ـ أرسل نيوتن الإيضاح المطلوب ثم أضاف الملاحظة أنه حوالى ١٦٦٩ كان قد أعطى بارو فكرة عامة عن طريقته للحركة ولم يفسر تلك الطريقة لليبنتز بل حرص على إخفاء طبيعتها عن ليبنتز بوضع لغز رمزى (٦ أ جج د أى ١٣ ى ف ف ٧ ع ٣١ ٩ ن ٤ و ٤ ك رر ٤ ش ٩ ت ١٢ ل س) وإذا رتبت الحروف بطريقة معينة لكان مؤداها (إذا علمت معادلة

تتضمن عدة متحركات وأريد إيجاد حركتها والعكس بالعكس) وبهذه الطريقة دون أن يكشف نيوتن سر طريقته كان يستطيع اذا أضطر الأمر بعد ذلك أن يثبت أنه مخترعها .

ومن الغريب أن يرفض عقل مثل عقل نيوتن مشاركة ليبنتز له فى اختراعه وكان معروفا إذ ذاك فى كمبردج فعلا لبارو وكولينز فى عام ١٦٦٩ . ربما خطر أن اختراعه يثير المضايقات التى كثيراً ما نغصت عليه حياته إذا ما سمع به الرياضيون خارج دائرة أصدقائه ، وأخيرا قال له ليبنتز إنه يعرف طريقتين لحل « المسائل العكسية للمماسات » (التكامل) . ومرة أخرى حرص على إخفاء طريقته فى لغز . وأجاب ليبنتز فى ٢١ من يونيو عام ١٦٧٧ غير محاول إخفاء شيء من طريقته فى « الفروق » ومعطياً تعبيره الرمزى ى س ، ى ص للفروق المتناهية الصغر فى الاحداثيات المتتالية لنقطة على منحنى . كما أثبت كذلك أنه كان يفهم مبدأ التكامل .

وفى عام ١٦٨٤ نشر ليبنتز طرقه فى صحيفة علمية كان قد أسسها[1] . وبذلك حدث أنه بالرغم من أن نيوتن كان قد ابتدع طريقته للحركة قبل ابتداع ليبنتز لطريقته فى الفروق بعدة سنوات ، إلا أن ليبنتز كان أسبق من معاصره إلى نشر طريقته .

وكان الرجلان فى ذلك الحين صديقين وبينهما مودة . وفى الطبعة الأولى من الـ Principia ذكر نيوتن المكاتبات التى دارت بينه وبين ليبنتز وصرح فعلا بأنه أخفى عنه طريقته للحركة فى لغز حرفى ، بيد أن ليبنتز « ذلك الرجل

---

(١) كان اسم الصحيفة Acta Eruditorum

البالغ الامتياز » قد أوضح طريقته له وهى — كما قال نيوتن — لم تكن تختلف عن طريقته هو إلا فى التعبير والرموز المستخدمة . (ولكن الطبعة الثالثة لكتابه التى ظهرت عام ١٧٢٦ لم تحتو على هذه العبارة) .

ومن عام ١٦٨٤ إلى ١٦٩٩ لم يثر أحد أن ليبنتز لم يكن مبتدع طريقته الخاصة من حساب التفاضل ولكن حدث فى عام ١٦٩٩ أن رياضيا سويسريا مغموراً كان يعيش فى إنجلترا وكان حاقداً على ليبنتز لأنه لم يذكر اسمه ضمن الرياضيين المرموقين فى القائمة التى كان قد أعدها — أوحى فى مقالة قرأها أمام الجمعية بأن ليبنتز لم يبتدع طريقته كما يدعى ، بل إنه أقامها على أساس طريقة الحركة لنيوتن .

ومن الطبيعى أن يثور ليبنتز لهذا ودون شك حار فى أمره بعد أن رأى تأكيد نيوتن عمله فى الـ Principia فأجاب على هذه المهاجمة فى صحيفته واحتج أمام الجمعية الملكية .

وما كان الخرق ليتسع لو أن ليبنتز لم يكتب عام ١٧٠٥ نقداً قاسيا للموضوع الأول عن الحركة الذى نشره نيوتن عام ١٧٠٤ كمقدمة لكتاب يتعلق بالمرئيات ، وفى هذا النقد قال إن نيوتن كان يستخدم دائماً الحركة بدلا من طريقته هو أو طريقة الفروق .

واعتبر جون كيل John Keill أستاذ الفلك بأكسفورد أن ليبنتز يتهم نيوتن بأنه سرق أفكار الآخرين، واتهم هو بدوره ليبنتز بأنه نشر طريقة نيوتن باعتبارها طريقته هو مغيراً فقط اسمها والرموز المستخدمة .

ومرة أخرى رفع ليبنتز أمره إلى الجمعية الملكية وكان نيوتن قد انتخب رئيساً لها عام ١٧٠٣ (وظل رئيسا لها حتى وفاته بعد ذلك التاريخ بخمس وعشرين سنة) . ورجا ليبنتز أن يقنعوا كيل بالتنازل عن اتهامه بسرقة طريقة نيوتن . وحتى فى هذه المرحلة كان من الممكن أن ينطق نيوتن بكلمة رقيقة ، إعادة لما سبق أن أكده فى كتابه Principia فينتهى الإشكال ، ولكن نيوتن لم يتحرك ، وربما كان نيوتن — وكان شديد التأثر بالنقد — غاضبا من ليبنتز بسبب نقده اللاذع له عام ١٧٠٥ ، فلم يرلا هو ولا الجمعية ضرورة سحب اتهـــام التزوير الذى رماه به كيل ، بل عينت لجنــة لكتــابة تقرير عن الموضوع كله ، وجاء فى تقرير هذه اللجنة عام ١٧١٢ ما يلى : « طريقة الفروق هى واحدة ونفس طريقة الحركة فيما عدا الاسم وطريقة التعبير ، فقد أسمى مستر ليبنتز هذه المقـادير فروقا ، بينما سماها مستر نيوتن عزوما أو حركات ورمز لها بالحرف د وهو رمز لا نجد أن مستر نيوتن يستخدمه ، ولذلك فالسؤال الذى يجب أن يوجه لا يكون « من الذى اخترع هذه الطريقة أو تلك » ولكن « من أول من اخترع الطريقة » ونعتقد أن الذين اعتبروا مستر ليبنتز المخترع الأول يعرفون القليل أو لا يعرفون شيئاً عن مكاتباته مع مستر كولينس ومستر أولدنبرج قبل ذلك بكثير ، ولا يعرفون أن مستر نيوتن وضع هذه الطريقة قبل أن ينشرهـا مستر ليبنتز فى صحيفته بخمسة عشر عاما . ولذلك فنحن نعتبر مستر نيوتن المبتدع الأول ، وفى رأينا أن مستر كيل فى تأكيده لنفس الكلام لم يسب مستر ليبنتز ولم يلحق به أى أذى » .

وفى عام ١٧١٥ نشر التقرير بأكمله فى « المبادلات » وهى صحيفة الجمعية الملكية ويقول بروستر فى كتابه (حياة نيوتن) إن معظم مسودة التقرير كانت مكتوبة بخط رئيس الجمعية أى بخط نيوتن .

واشتدت المعركة بعد ذلك واستمرت طويلا بعد وفاة ليبنتز عام ١٧١٦ ووفاة نيوتن عام ١٧٢٧ وتطورت المشادة فى كل من إنجلترا وألمانيا فأصبحت موضوع كبرياء أمـــة ومنزلتها ، واليوم بعد مائتى عام تبـدو المعركة تافهة وغير معقولة ، فقد كان عقلان من جبابرة العقول يعملان فى مادة جمعها كپلر وكافالييرى وفرمات وبسكال ووالليس وبارو ، فليس من الغريب إذن أن يصلا إلى نفس النتائج .

وفى عام ١٧٣٤ ظهر نقد هام بالنسبة إلى صحة الطرق المستخدمة فى حساب تفاضل الـكميات المتناهية الصغر ، وكان صاحب النقد الأسقف باركلى وهو ايرلندى أمضى عدة سنوات فى رودايلند ، بالمستعمرة الإنجليزية هناك ، ثم اهتم بـكلية ليل كما كانوا يسمونها . ولما عاد إلى إنجلترا رسم أسقفا فى مقاطعة يورك بايرلندا ولـكنه كان يقضى معظم أوقاته فى دوائر لندن الأدبية التى كان يؤمها الـكتاب مثل سويفت وستيل واديسون .

وهاجم باركلى استخدام المقادير المتناهية الصفر بقوله إن التدليل المستخدم خاطىء لا منطق ، وعليه فالنتائج التى تقوم عليه لا يمكن قبولها ، وإذا حدث أن حصلنا على نتائج صحيحة فذلك لأن غلطة وازنت غلطة أخرى ، وظهر هذا النقد فى كتاب اسمه المحلل (Analyst) وكان الغرض الأول من تأليفه هو محاولة إثبات أن قوانين المسيحية ليست أقل صلابة من الأفكار الرياضية فى عصره . يقول باركلى : ما هذه التحركات ؟ إنها سرع زيادات ضائعة وما هى هذه الزيادات الضائعة ؟ ليست هى بكميات محدودة ولا هى بكميات متناهية الصغر ولا هى أى شىء . ألا يصـــح أن نسميها إذن أشباح كميات راحلة .

كان لنقد باركلى أثر حسن ، فقد أدى بالرياضى الاسكتلندى كولين ماكلورين Colin Maclaurin (١٦٩٨ — ١٧٤٦) إلى كتابة كتاب[1] عن الحركة (١٧٤٢) وقال فى مقدمة الكتاب إن سبب تأليفه هو مهاجمة باركلى لطريقة نيوتن فى الحركة عام ١٧٣٤ ، وقد أثبت ماكلورين صحة نتائج نيوتن هندسيا . وفى الواقع كان التطور المطرد لمعالجة فكرة « النهاية » فى القرنين الثامن عشر والتاسع عشر هو الذى أسكت النقاد باستبعاد استخدام الكميات المتناهية الصغر ومشكلات « مالا نهاية » المتعلقة التى نتجت عنها .

ومن وجهة نظر الرياضيين يعتبر نيوتن قد أضاع سدى السنوات الثلاثين الأخيرة من حياته فى عمل لايتفق ومواهبه . حين كان يسكن لندن فى أثناء عضويته للبرلمان عن جامعة كمبردج ، تقابل مع جون لوك John Locke الفيلسوف العظيم الذى كان متصلا اتصالا وثيقاً برجال السياسة وكان هو نفسه سكرتيراً لوزارة التجارة . واستقبح لوك وغيره من أصدقاء نيوتن أن رياضيا وفيلسوفا من طابعه يعيش على الأجر الضئيل الذى يتقاضاه أستاذ الجامعة والعضو بها، وبفضل وساطتهم عين نيوتن وكيلا لمصلحة صك النقود عام ١٦٩٥ بمرتب سنوى قدره ٥٠٠ جنيه (يعادل ١٢٠٠٠ دولار فى قوته الشرائية الآن) ولكن المنصب لم يشغله عن مباشرة عمله فى كمبردج . وفى عام ١٦٩٧ عين رئيساً للمصلحة بمرتب يقدر بضعف أو ثلاثة أمثال مرتب الوكيل فعين نائباً له ليقوم بعمله فى كمبردج وليستمتع بالامتيازات التابعة للمنصب ، وفى عام ١٧٠١ استقال نيوتن من عضوية الكلية ومن منصب الأستاذية بها ، وفى عام ١٧٠٣ كما رأينا

---

(١) العنوان الأصلى هو Treatise on Fluxions

أصبح رئيسا للجمعية الملكية ومنحته الملكة آن نوط الفروسية بعد ذلك بسنتين ، وكان فى ذلك الوقت أن نال دوق مورلبورو جد تشرشل الأكبر شهرته كقائد حربى عظيم . ولما ماتت الملكة آن جاء دوق هانوفر سيد ليبنتز وراعيه ليعتلى عرش إنجلترا تحت اسم جورج الأول ، وفى ١٧١٤ شهد نيوتن أمام لجنة من مجلس العموم بخصوص ملتمس مقدم للمجلس من بعض قباطنة البحرية والخدمة التجارية ، كانوا يلتمسون اتخاذ التدابير لإيجاد طريقة دقيقة تكشف عن خط طول سفينة فى البحر ، وفى شهادته نقد نيوتن المقترحات المقدمة واقترح هو منح جائزة مالية كبيرة لمن يتقدم بطريقة دقيقة لهذا الغرض.

وفى عام ١٧٢٥ كتب نيوتن إلى جامعة أدنبره متبرعاً بمرتب نائب أستاذ للرياضيات بها ،وعين ماكلورين فى هذا المنصب ، وبعدها أصبح أستاذاً بنفس الجامعة . وفى تلك الفترة من حياته اهتم نيوتن كثيراً بالدراسات الدينية والفلسفية بالإضافة إلى الأعباء القاسية التى كان يتطلبها عمله كرئيس لمصلحة صك النقود .

ومرض نيوتن فى نهاية حياته الطويلة وأرهقه المرض إلا أنه استمر فى رياسته للجمعية الملكية ، وتوفى يوم ٢٠ مارس عام ١٧٢٧ ودفن فى دير وستمنستر .

وإنه لمن دواعى الأسف حقاً أنه استباح لنفسه قبول وظيفة حكومية بمرتب ضخم ، فقد كان فى ذلك خذلان لموهبته الفذة وحرمان للعالم من خدماته العلمية لمدة ربع قرن .

ولو أنه وهب حياته الطويلة كلها للعلم والرياضيات كما فعل أرشميدس فمن

يدرى أى تقدم خطير فى معلومات البشر كان يمكن أن يحرز فى عزلته فى كلية من كليات كمبردج .

والواقع أن نيوتن فى السنوات الاثنتين والعشرين بين عامى ١٦٦٥ ، ١٦٨٧ ترك إلى الأبد أثر عبقريته فى الرياضيات والعلوم الطبيعية . وإن العالم ليتجه إليه باعتباره مؤلف ال Principia وواضع قوانين الحركة — لا باعتباره مدير مصلحة صك النقود — بالشكر والامتنان على ما قام به من خدمات لا تنكر فى سبيل العلم ، ويحيى فيه أول عقل أنجبته القرون الثمانية عشر ليتعادل مع عقل أرشميدس .

الفصل الثامن

ليبنتز وجوس وآخرون

ظل رياضيو إنجلترا مدة تزيد على مائة سنة بعد وفاة نيوتن فى شجار عنيف مع أتباع ليبنتز شغلهم عن الإفادة من التطورات العظيمة فى حساب التفاضل والتكامل التى قامت فى القارة الأوروبية .

كان ليبنتز — مثله فى ذلك مثل نيوتن — يعتبر أن أى كمية متغيرة تزيد أو تنقص باستمرار زيادة أو نقصا لحظيا . هذه التغيرات المتناهية فى الصغر مثلها ليبنتز بالحرف ى وعليه ى س تمثل تغيراً صغيراً جداً أو فرقا فى قيم س وكذا ى ص تمثل فرقا متناهياً فى الصغر فى قيمة ص، ولقد رأينا كيف أنه فسر ذلك فى كتابه إلى نيوتن بتاريخ ٢١ من يونيو ١٦٧٧ .

ولكن ليبنتز أخفق كما أخفق نيوتن من قبل فى تفسير آرائه عن حساب التفاضل تفسيراً دقيقاً واضحاً ، فكان يفكر أحيانا فى ى س ، ى ص كمستقيمين محدودى الطول وأحيانا كأنهما كميتان متناهيتا الصغر ، ويظهر أنه اعتبر أن أى عدد محدود يتكون من عدد لا نهائى من الكميات الصغيرة التى رغم أنها لا يمكن قياسها لصغرها فإن لها كبراً محدوداً كما اعتبر أن جميع المقادير «المتناهية الصغر» التى يكون مجموعها عدداً تكون متساوية «الكبر».

ولذا فقد اعتبر أن $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$ ليست سوى نسبة بين متناهيي الصغر للمغيرين س ، ص وأن هذه النسبة تساوى مقدارا محدودا يمكن قياسه . وقد أهمل

هذا الرأى منذ أمد بعيد إلا أننا مازلنا نستخدم الرمز الذى وضعه نيوتن $\frac{ء\,ص}{ء\,س}$ ليبين مشتقة ص = د (س) .

وفى يومنا هذا من المعتاد أن نقدم للمبتدئين فى حساب التفاضل الرمز « ء » ليدل على المشتقة ، فتكون $ء_{س}$ ص هى «مشتقة ص بالنسبة إلى س» ويمكن حذف س الواقعة تحت ء إذا لم يكن هناك شك أو غموض . وكذلك ء ($س^٢$) = ٢ س ، ء ($س^٣$) = ٣ $س^٢$ ، ء (٣ $س^٢$ — $س^٣$) = ٦ س — ٣ $س^٢$ وهكذا (أنظر الباب السابع) . وبعبارة أخرى باستخدام الرموز التى رأيناها فى الفصل السابق .

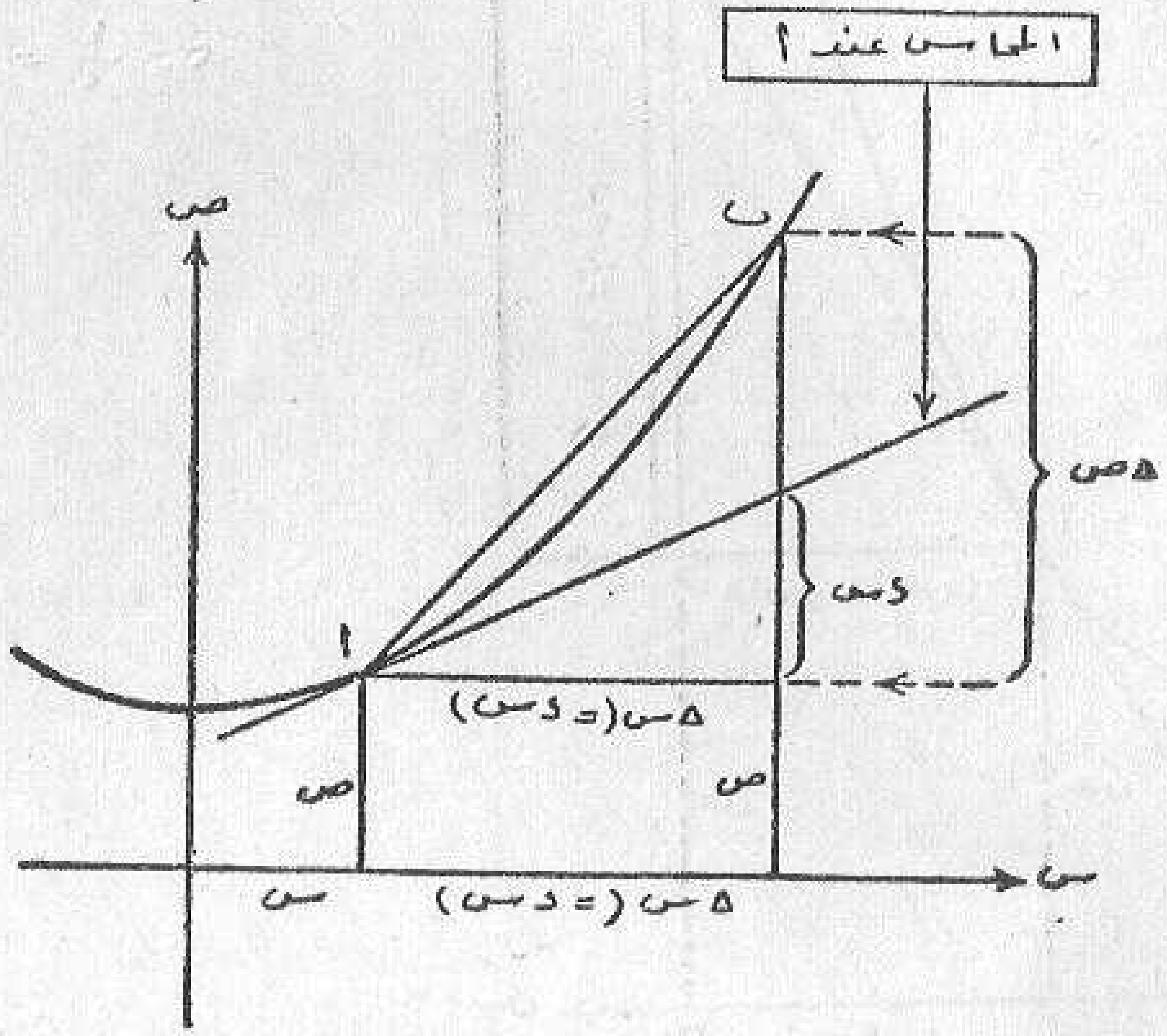
$$\frac{ء}{ء\,س}(ص) = \lim_{\Delta س \to .} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

واستعمال الرمز ء يوضح لنا أن المشتقة ليست نسبة بين الزيادتين فى متغيرين عندما يكونان متناهيين فى الصغر ، وإنما تدل المشتقة على النهاية التى تقترب منها هذه النسبة عندما تقترب الزيادة فى س من الصفر .

وبمجرد أن يفهم الطالب هذه الحقيقة الأساسية نعود إلى تعبير ليبنتز الرمزى وهو $\frac{ء\,ص}{ء\,س}$ عوضا عن $\frac{ء}{ء\,س}$(ص)، واستخدام هذا الرمز الذى يجب ألا يعتبر الآن نسبة بين الزيادتين فى س ، ص (ولو أن مخترعه اعتبره كذلك) هو أحد أسباب عدم فهم الطلبة لحساب التفاضل . وعلى كل حال لقد فات الأوان لأن نغير هذا التعبير ،فقد رسخت قدمه نظراً لطول استعماله . وعلينا أن نتذكر أن $\frac{ء\,ص}{ء\,س}$ وهى تمثل المشتقة مضللة فى مظهرها إذ أنها لا تمثل النسبة

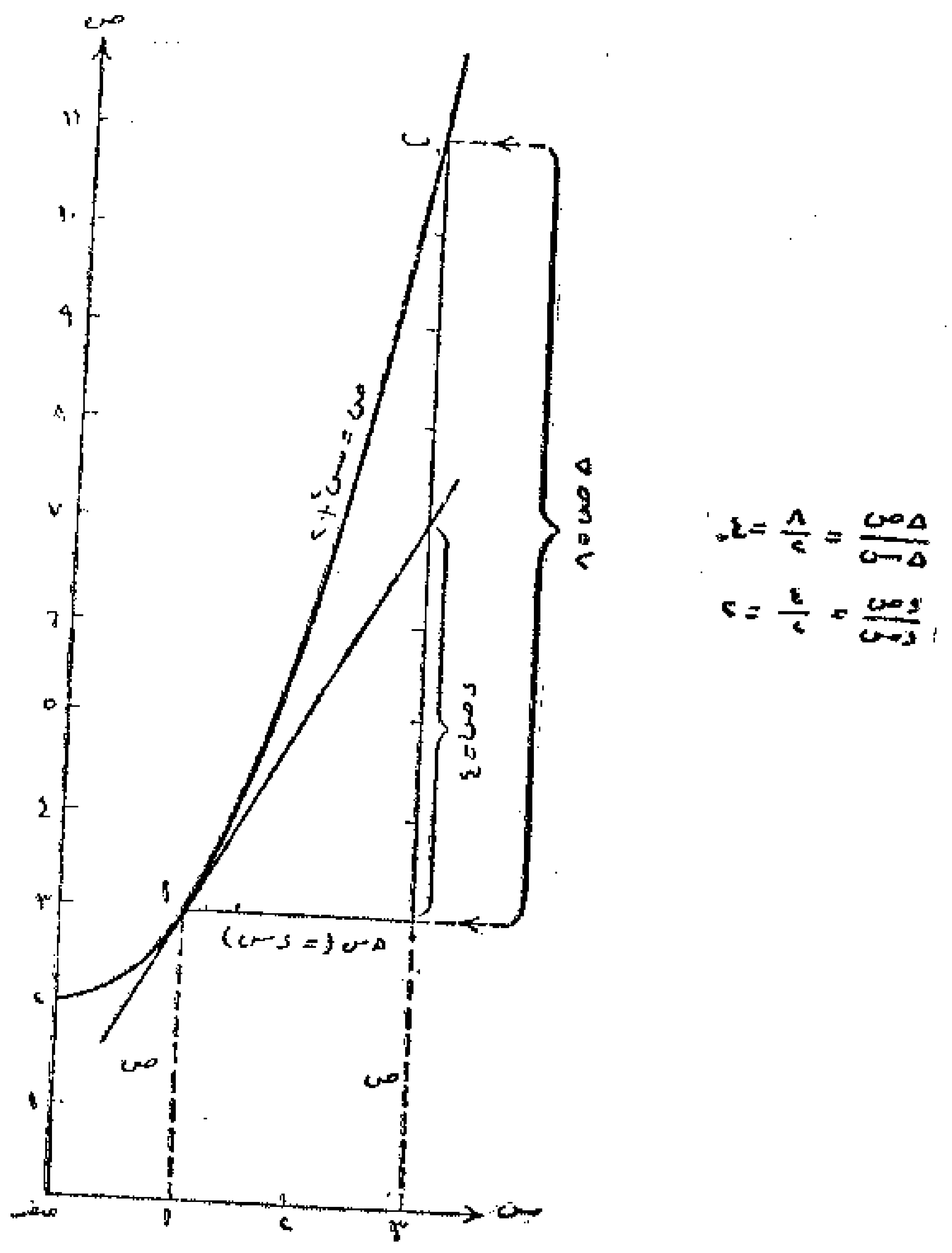
بين زيادتين متناهيتى الصغر فى المتغيرين ولـكنها تمثل النهاية التى تقترب منها هذه النسبة .

وأفضل الطرق للتمييز بين ء ص والزيادة فى طول الاحداثى الصادى هى الإيضاحى الهندسى. يوضح شكل ١٠٠ الرأى الحديث وهو الذى يوضح الفرق بين △ ص (الزيادة فى طول الاحداثى الصادى التى تناظر الزيادة △ س فى الاحداثى السينى أى بعد الاحداثى الصادى عن نقطة الأصل) ، ء ص .



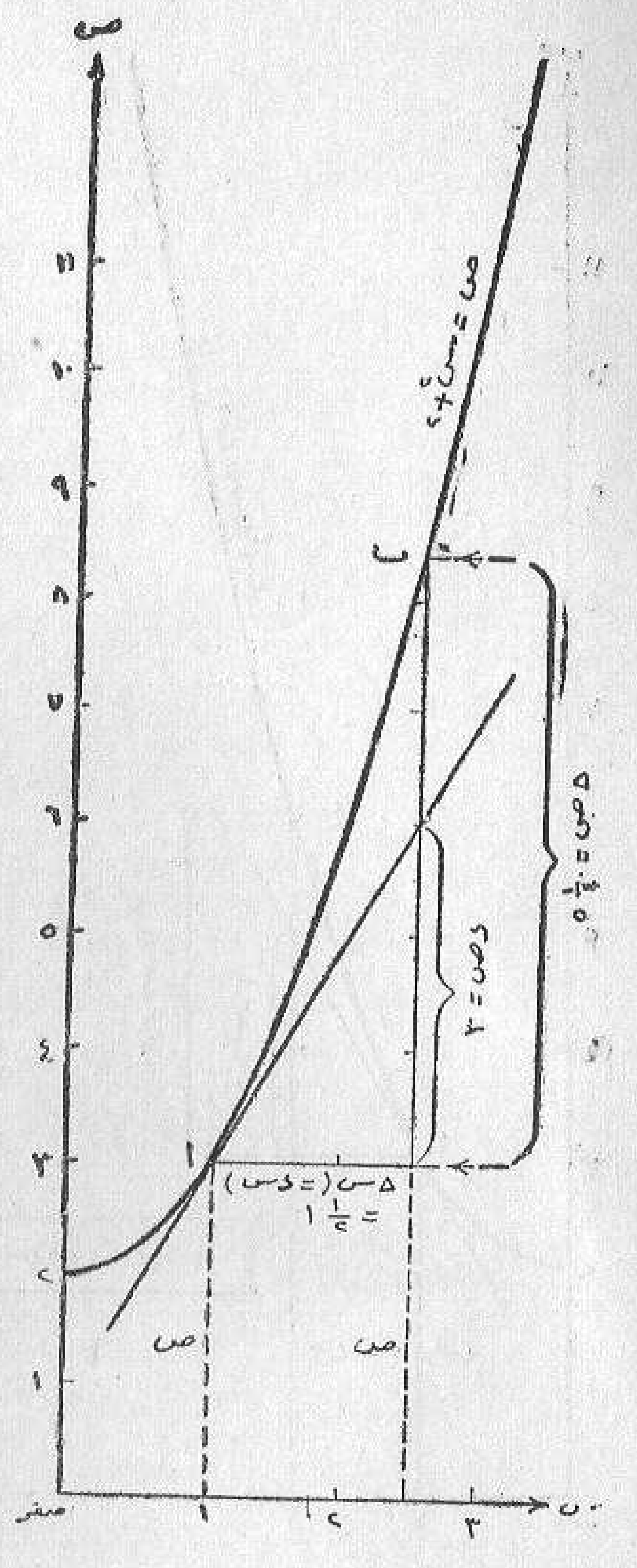
شكل (١٠٠)

سبق وعرفنا △ س بأنها « الخطوة الأفقية نحو اليمين من نقطة أعلى المنحنى » △ ص بأنها « الخطوة الرأسية اللازمة فى هذه الحالة للوصول إلى المنحنى مرة أخرى » ويمكننا الآن أن نعرف ء س بأن لها نفس المعنى السابق بصفة عامة الذى للرمز △ س ولـكن ء ص لهامعنى يختلف تمام الاختلاف عن معنى △ ص عندما نأخذ خطوة △ س (أو ء س) نحو اليمين من النقطة ا فإن ء ص تمثل



شكل (١٠١)

الخطوة الرأسية اللازمة للوصول إلى المماس عند نقطة ا . وقد سبق ورأينا أن ميل المماس عند ا هو النهاية التى يقترب منها متوسط الميل بين ا ، ب عندما نقترب △ س من الصفر ، بعبارة أخرى متوسط معدل الزيادة فى طول الاحداثى الصادى بين ا ، ب يقترب من المعدل اللحظى عند ا عندما تقترب △ س من الصفر .

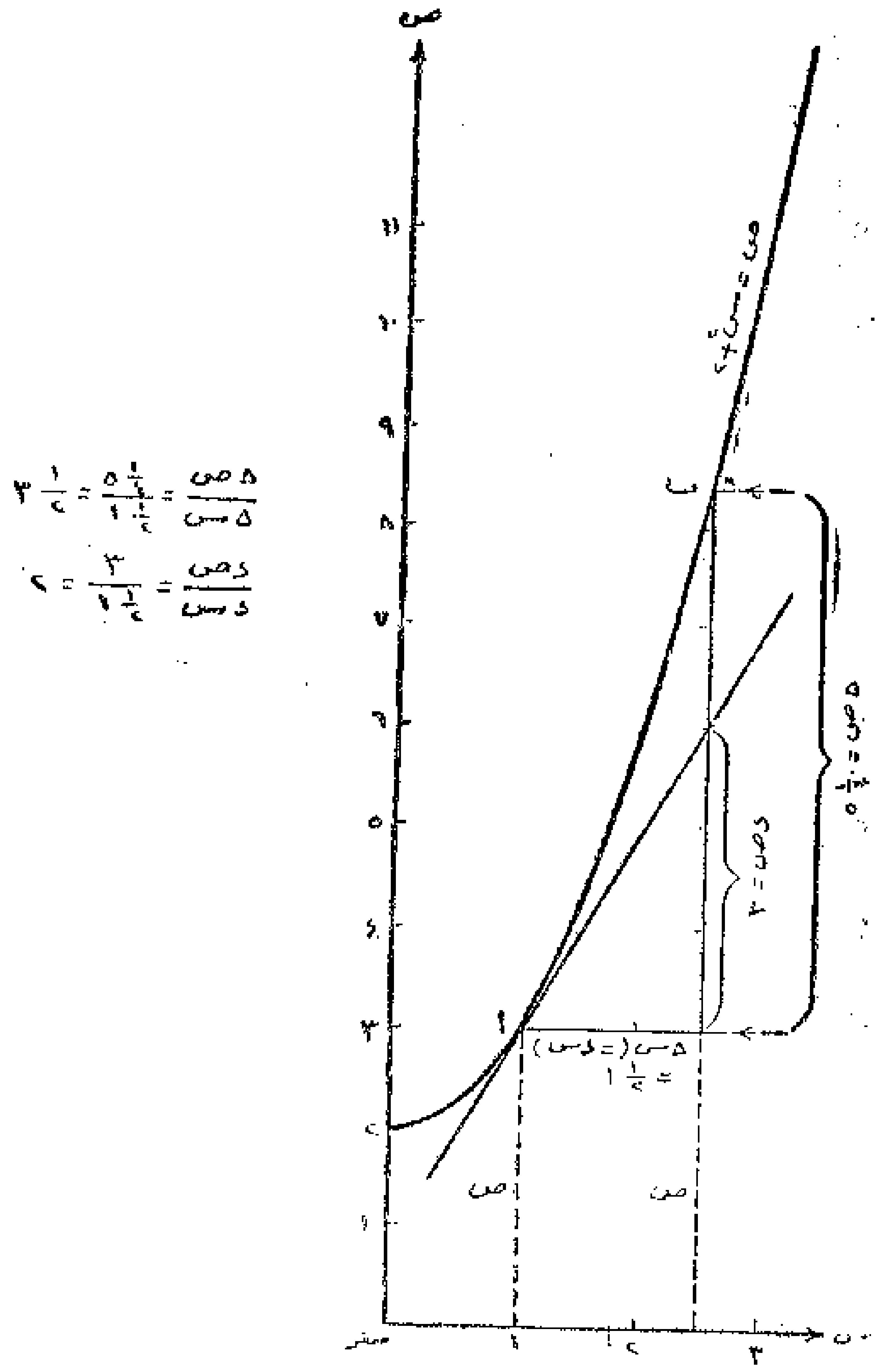


$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{٥\frac{١}{٤}}{١\frac{١}{٢}} = ٣\frac{١}{٢}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{٣}{١\frac{١}{٢}} = ٢$$

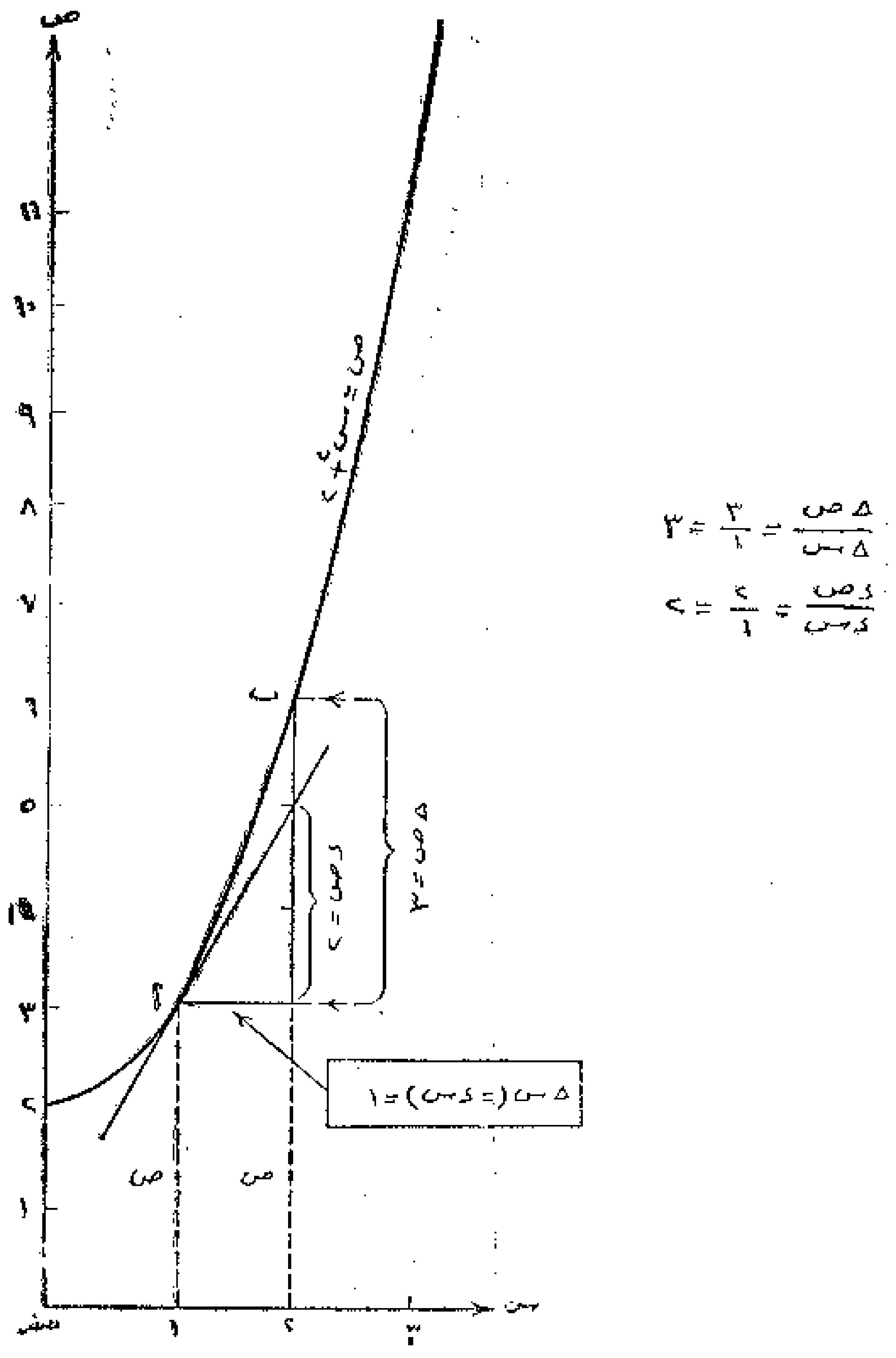
شكل (١٠٢)

وسوف نرى أنه — فيما عدا حالة المستقيم — تتغير النسبة $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ (متوسط الميل من ا ، ب) باستمرار بتغير الطول Δ س، أما قيمة $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ كما عرفناها



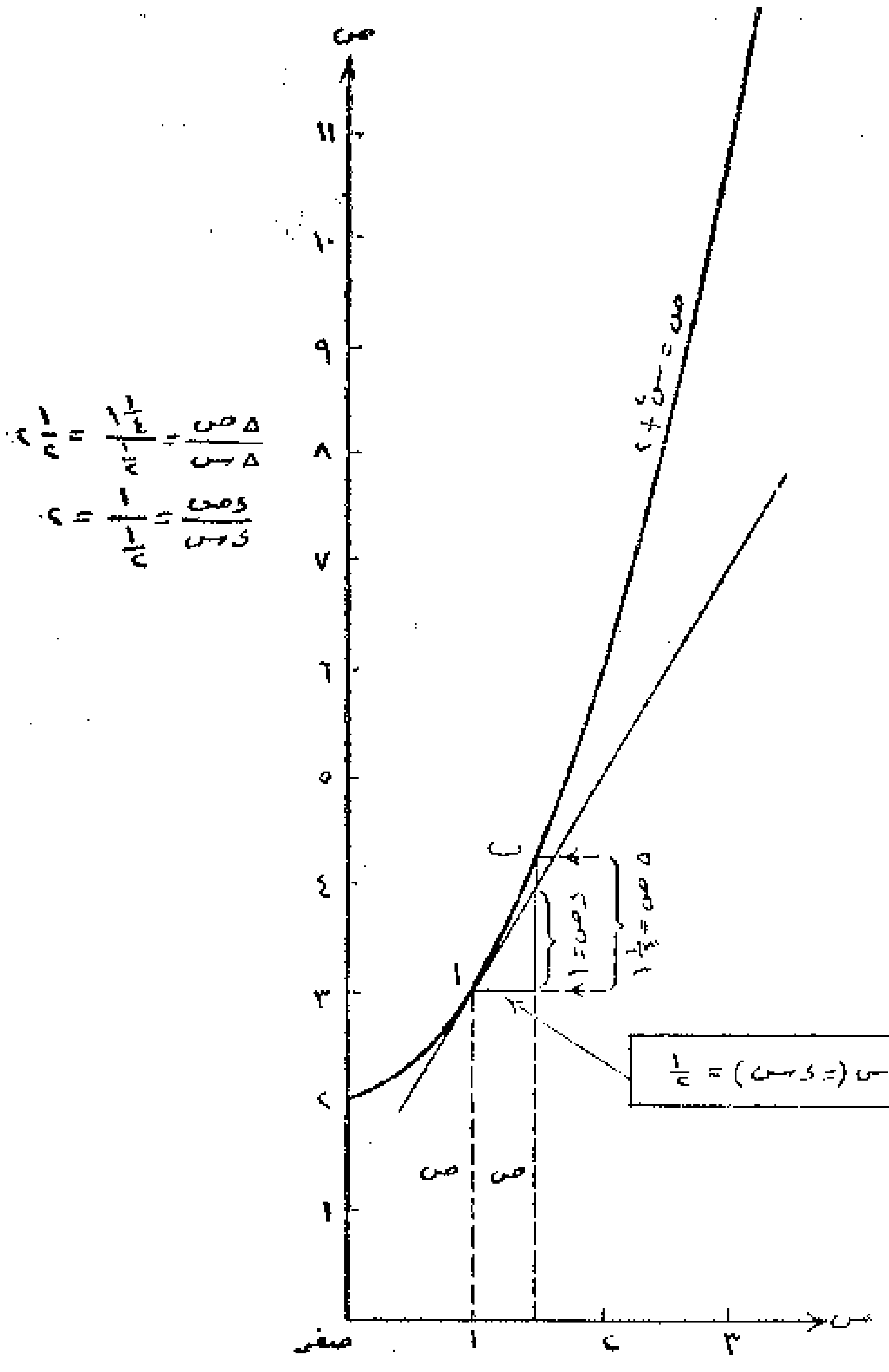
شكل (١٠٢)

وسوف نرى أنه — فيما عدا حالة المستقيم — تتغير النسبة $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ (متوسط الميل من ا ، ب) باستمرار بتغير الطول Δ س، أما قيمة $\frac{ءص}{ءس}$ كما عرفناها



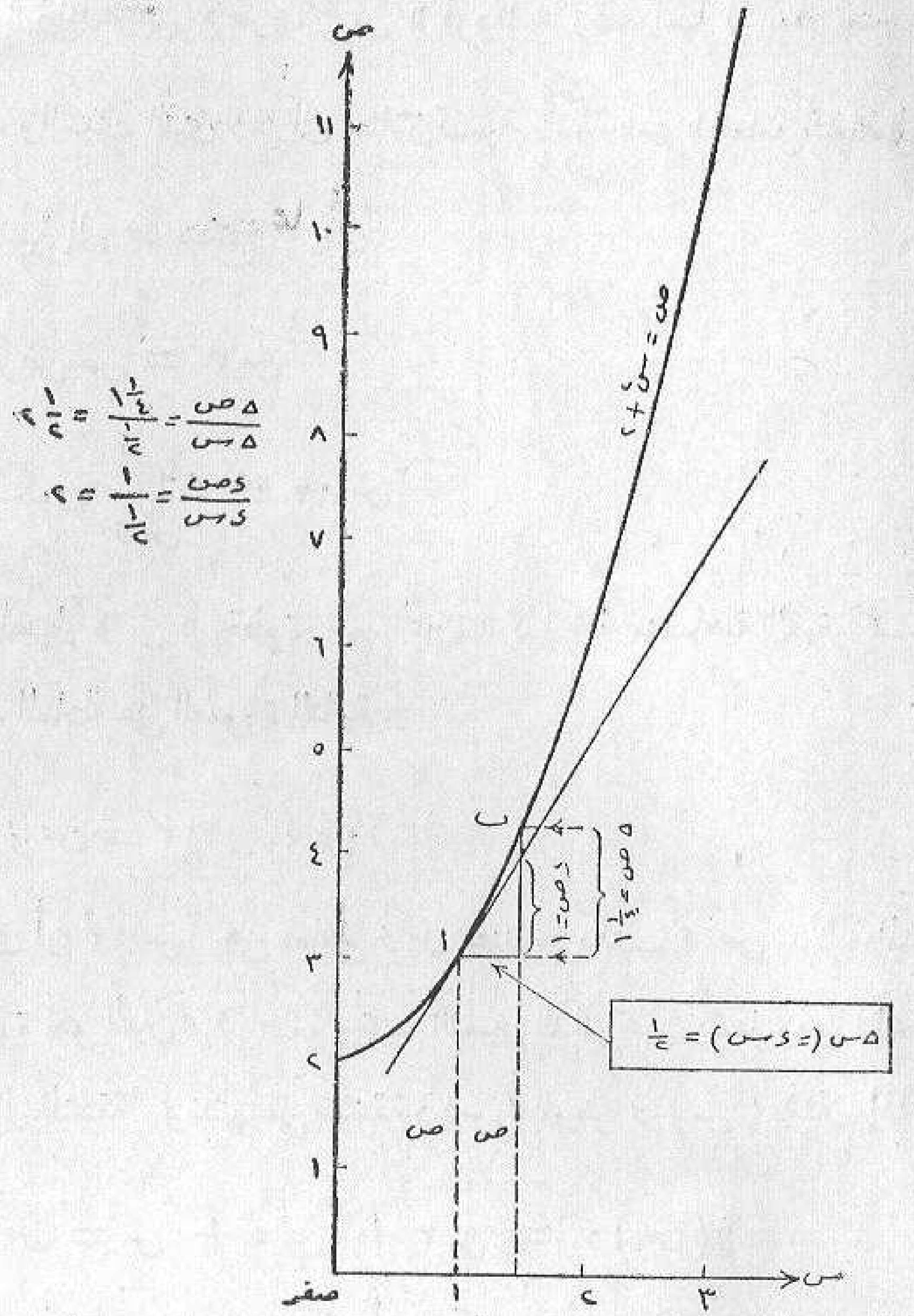
شكل (١٠٣)

بصفة عامة لاتتغير إطلاقا مهما كانت قيم ء س (التى لا تصل أبدا إلى الصفر)؛ وفوق ذلك لن تساوى $\frac{ءص}{ءس}$ النسبة $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ولـكنها تـكون النهاية التى



شكل (١٠٤)

تقترب منها $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ عندما تقترب Δ س من الصفر (أنظر أشكال ١٠١ ، ١٠٢ ، ١٠٣ ، ١٠٤) فهى توضح هذه الأفكار الأساسية هندسيا وحسابياً . لاحظ أنه فى جميع هـــذه الحالات ء س تمثل خطوة اختيارية نحو اليمين بينما المعامل التفاضلى $\frac{ءص}{ءس}$ يكون فى كل حالة مساويا ٢ .



شكل (١٠٤)

تقترب منها $\frac{\triangle ص}{\triangle س}$ عندما تقترب $\triangle$ س من الصفر (أنظر أشكال ١٠١ ، ١٠٢ ، ١٠٣ ، ١٠٤) فهى توضح هذه الأفكار الأساسية هندسيا وحسابياً . لاحظ أنه فى جميع هـــذه الحالات ى س تمثل خطوة اختيارية نحو اليمين بينما المعامل التفاضلى $\frac{ى ص}{ى س}$ يكون فى كل حالة مساويا ٢ .

وما زلنا نسمى ء ص ، ء س « فروقاً » رغم أنها لم تعد تعتبر متناهية الصغر . والسبب الذى دعا إلى بطلان تسمية $\frac{ءص}{ءس}$ باسم «المعامل التفاضلى» للدالة ص بالنسبة إلى س يتضح مما يأتى:

لنفرض ص = ٣ س^{٤}

فتكون $\frac{ءص}{ءس}$ = ١٢ س^{٣}

وباعتبار ء س « خطوة نحو اليمين » لا كمية متناهية الصغر يمكن أن تكتب المعادلة على الصورة التالية .

ء ص = ١٢ س^{٣} ء س .

نرى أن ١٢ س^{٣} هى معامل ء س عند ما يكتب ء ص بدلالة المتغير س «والخطوة نحو اليمين» ء س . ونعمم التعبير الدالى بحيث يشمل رموزا للمشتقات أو الدوال المشتقة . وندل على مشتقة د (س) بالرمز دَ (س) فمثلا إذا كانت

ص = س^{٣} + ٥ س^{٢} + ٣ س = [د (س)]

فإن مشتقة هذه الدالة يمكن أن تكتب بأى واحدة من الصور التالية :

ء$_{س}$ ص = ٣ س^{٢} + ١٠ س + ٣

أو $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣س^{٢} + ١٠س + ٣

أو $\frac{ء(س^{٣} + ٥س^{٢} + ٣س)}{ءس}$ = ٣ س^{٢} + ١٠س + ٣

أو $\frac{ى}{ى س}$ (س^{٣} + ٥ س^{٢} + ٣ س) = ٣ س^{٢} + ١٠ س + ٣

أو دَ (س) = ٣ س^{٢} + ١٠ س + ٣

وإذا كانت د (س) = ٨ س^{٤} كانت دَ (س) = ٣٢ س^{٣} وهكذا .

ويمكننا فى غالب الأحيان أن نوجد المشتقات المتتالية للدالة . فمثلا مشتقة المشتقة ٣ س^{٢} + ١٠ س + ٣ هى ٦ س + ١٠ . وتسمى هذه بالمشتقة الثانية للدالة س^{٣} + ٥ س^{٢} + ٣ س وتكتب إما على الصورة :

$$دً (س) = ٦ س + ١٠$$

$$وإما \quad \frac{ى^{٢} ص}{ى س^{٢}} = ٦ س + ١٠$$

وتفسير التعبير الرمزى $\frac{ى^{٢} ص}{ى س^{٢}}$ معقد بعض الشىء

لنفرض أن ص = س^{٤} [= د (س)]

فتكون $\frac{ى ص}{ى س}$ = ٤ س^{٣} [= دَ (س)]

∴ ى ص = ٤ س^{٣} . ى س .

فإذا تذكرنا أن ى س ثابت وليس دالة فى س نفاضل طرفى المعادلة .

(حيث إن ى س التى فى الطرف الأيمن للمعادلة ثابت وليس بكمية متغيرة، فى هذه الحالة فإن مشتقة هذا الطرف تكون مشتقة ٤ س^{٣} × ى س)

$$\frac{ى (ى ص)}{ى س} = ى س \left[\frac{ى (٤ س^{٣})}{ى س} \right]$$

$$\therefore \frac{ء(ءص)}{ء س} = ء س \; [\; ١٢ س^٢ \;]$$

وبقسمة كل من الطرفين على الثابت الاختيارى ء س

$$\therefore \frac{ء(ءص)}{(ءس)^٢} = ١٢ س^٢$$

ويختصر هذا إلى

$$\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} = ١٢ س^٢$$ (وتقرأ دال اثنين ص على دال س تربيع)

وهى صورة أخرى للتعبير الأبسط $دً (س) = ١٢ س^٢$

[حيث $د (س) = س^٤$ ، $دَ (س) = ٤ س^٣$]

حيث إن المشتقة تدل على المعدل الذى تزيد به الدالة التى أخذت فيها هذه المشتقة فى أى لحظة معلومة فيتبع من ذلك أنه إذا كانت ف = المسافة التى يقطعها جسم ما ، ه = الزمن اللازم لقطع هذه المسافة ، كانت ف = د (ه) (أى إن ف تتعين بدلالة (ه) فإن ف = د (ه)

، المعدل = دَ(ه)

، العجلة = دً(ه) حيث إن العجلة تساوى الزيادة فى المعدل فى وحدة الزمن

مثال ذلك : لنفرض أن $ف = ١٥ ه^٣ - ه^٤ = د (ه)$

كان المعدل $= دَ (ه) = ٤٥ ه^٢ - ٤ ه^٣$ قدم / ثانية

والعجلة = د (ه) = ٩٠ ه — ١٢ ه٢ قدم ثانية/ ثانية

وإذا كانت ه = ٢ كانت المسافة = ١٢٠ — ١٦ = ١٠٤ أقدام

وكان المعدل = ١٨٠ — ٣٢ = ١٤٨ قدم/ ثانية

وكانت العجلة = ١٨٠ — ٤٨ = ١٣٢ قدم/ ثانية/ ثانية

كان نيوتن قد ابتدع نفس العملية فى طريقته للحركة . وكما رأينا كان يرمز لكمية متحركة أو للمتحرك بالرمز س وحركته بالرمز سً وحركة الحركة بالرمز سٌ وهكذا . وتصادف هذه الرموز أحيانا فى مؤلفات بعض الكتاب الحديثين.

[ننصح القارئ العادى أن يرجع إلى قانون واليس قبل أن يتابع قراءة هذه السطور (الصفحات ١٦٧ — ١٧٤)]

فى عام ١٦٨٤ وكذلك فى ١٦٨٦ نشر ليبنتز فى صحيفته مقالات عما كان يسميه بالحساب المجموعى Calculus Summatorius إذ أنه كان يتعلق بإيجاد مجموع عدد من المساحات المتناهية الصغر التى يبين مجموعها بالحرف اللاتينى S وتكتب على الصورة $\int$.

وفى عام ١٦٩٦ استمع إلى نصيحة يوهان برنولى من بازل بسويسرا وغير العنوان إلى حساب التكامل calculus Integrali باعتبار أنه حصل على مساحة كاملة بجميع أجزائها . وهذا يناظر فى عمل نيوتن « الطريقة العكسية للمماسات » غير أن طريقة ليبنتز كانت تطويراً لأعمال كافاليرى وبسكال بدلا من عمل واليس .

والعجلة = د (ه) = ٩٠ ه — ١٢ ه٢ قدم ثانية/ ثانية

وإذا كانت ه = ٢ كانت المسافة = ١٢٠ — ١٦ = ١٠٤ أقدام

وكان المعدل = ١٨٠ — ٣٢ = ١٤٨ قدم/ ثانية

وكانت العجلة = ١٨٠ — ٤٨ = ١٣٢ قدم/ ثانية/ ثانية

كان نيوتن قد ابتدع نفس العملية فى طريقته للحركة . وكما رأينا كان يرمز لكمية متحركة أو للمتحرك بالرمز س وحركته بالرمز سَ وحركة الحركة بالرمز سً وهكذا . وتصادف هذه الرموز أحيانا فى مؤلفات بعض الكتاب الحديثين.

[ننصح القارئ العادى أن يرجع إلى قانون واليس قبل أن يتابع قراءة هذه السطور (الصفحات ١٦٧ — ١٧٤)]

فى عام ١٦٨٤ وكذلك فى ١٦٨٦ نشر ليبنتز فى صحيفته مقالات عما كان يسميه بالحساب المجموعى Calculus Summatorius إذ أنه كان يتعلق بإيجاد مجموع عدد من المساحات المتناهية الصغر التى يبين مجموعها بالحرف اللاتينى S وتكتب على الصورة ∫ .

وفى عام ١٦٩٦ استمع إلى نصيحة يوهان برنولى من بازل بسويسرا وغير العنوان إلى حساب التكامل calculus Integrali باعتبار أنه حصل على مساحة كاملة بجميع أجزائها . وهذا يناظر فى عمل نيوتن « الطريقة العكسية للمماسات » غير أن طريقة ليبنتز كانت تطويراً لأعمال كافالييرى وبسكال بدلا من عمل واليس .

وقد أثبت هؤلاء الرياضيون أنه يمكن إيجاد ما سميناه بدالة المساحة فى الفصل السادس عن طريقة الجمع من الدالة الصادية .

والآن نقارن بعض الدوال المساحية التى أوجدناها فى الفصل السادس بدوالها الصادية .

الدالة المساحية	الدالة الصادية
٤ س [$\frac{١}{١}$ × ٤ س^{١}]	٤ [أو ٤ س^{٠}]
٢ س^{٢} [أو $\frac{١}{٢}$ × ٤ س^{٢}]	٤ س [أو ٤ س^{١}]
$\frac{١}{٣}$ × ٤ س^{٣}	٤ س^{٢}
س^{٤} [أو $\frac{١}{٤}$ × ٤ س^{٤}]	٤ س^{٣}
$\frac{١}{٥}$ × ٤ س^{٥}	٤ س^{٤}

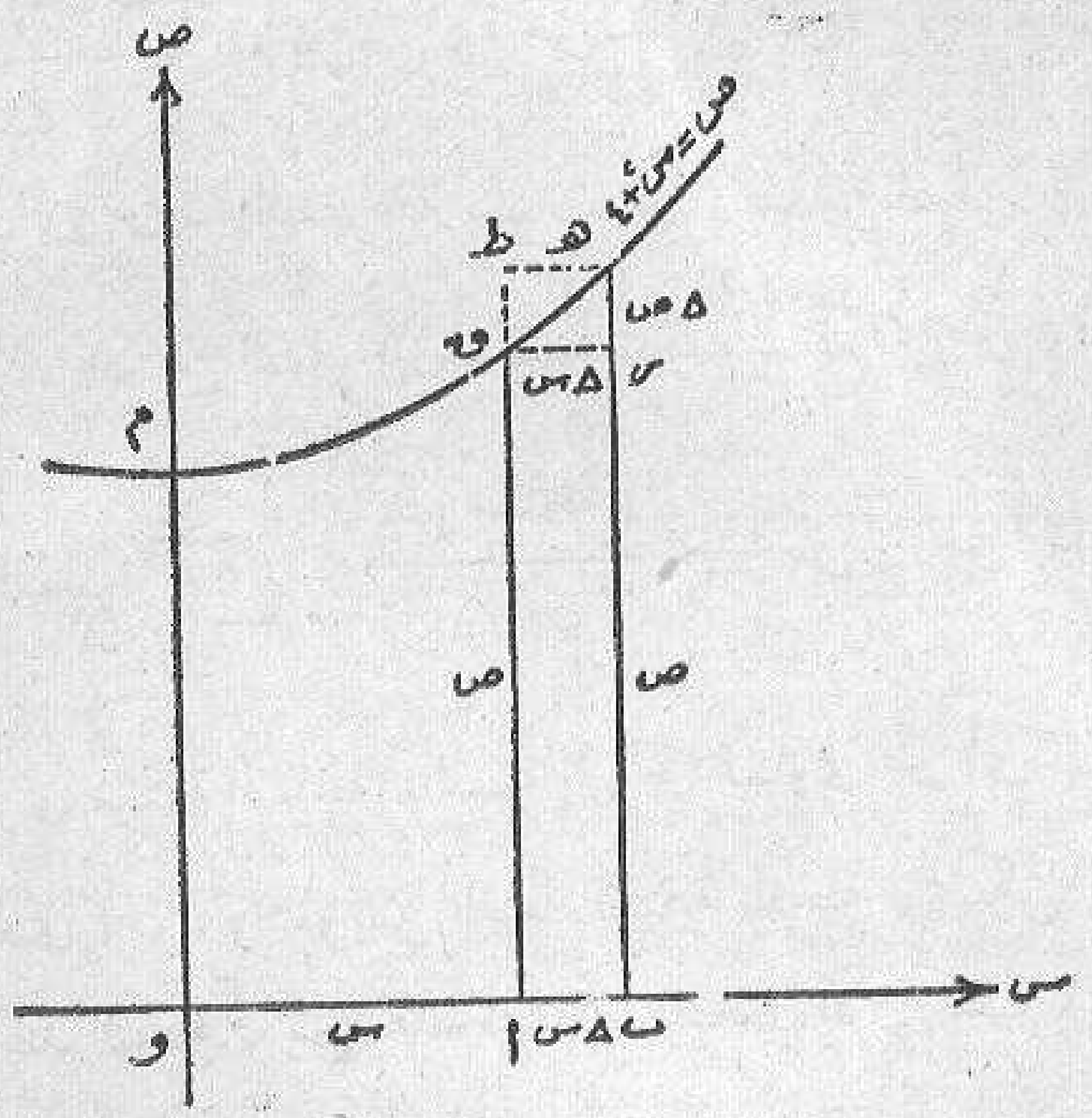
من المقارنة نجد أن الدالة الصادية هى مشتقة الدالة المساحية .

إذا عوضنا بالقيمة السينية لأى احداثى صادى بدلا من س فى المشتقة فإننا نحصل على المعدل الذى تزداد به المساحة عند هذه النقطة كما سبق ورأينا ولكن هذا التعويض يعطينا أيضاً طول الأحداثى الصادى عند النقطة التى لها هذه القيمة السينية .

ويتبع من ذلك أن طول الأحداثى الصادى لأى نقطة على المنحنى يدل على المعدل اللحظى لزيادة المساحة المحصورة تحت المنحنى عند هذه النقطة . هذه

الحقيقة عجيبة وهامة فى نفس الوقت . وجدير بنا أن نحاول الوصول إلى نفس النتيجة من وجهة نظر أخرى .

لنفرض أن شكل ١٠٥ يمثل جزءا من لمنحنى ص = س٢ + ٤ وأننا نرغب فى إيجاد المساحة المحدودة بالمستقيمات م و ، و ا ، ا ن ، القوس م ن .



شكل (١٠٥)

كلما زادت قيمة س كبرت المساحة المتضمنة . وعليه المساحة التى نريد إيجادها هى دالة فى س ، والآن نأخذ خطوة Δ س عن يمين ا ، ونسميها ا ب فيصبح ب هـ عبارة عن (ص + Δ ص) وهى الخطوة اللازمة للوصول مرة أخرى إلى المنحنى . بهذه الزيادة Δ س فى القيمة السينية زادت المساحة بمقدار الشكل ا ب هـ ن ، وسنسمى هذه الزيادة فى المساحة بالرمز Δ (مساحة) .

ومن شكل ١٠٥ نرى أن △ (مساحة) تقع بين المساحتين ا ب م ن ، ا ب هـ ط أى بين ص × (△ س) ، (ص + △ ص) × △ س . ويتبع من ذلك أن أى كسر من △ (المساحة) لابد أن يقع بين هذا الكسر نفسه من المساحتين الأخريين ، وعليه إذا قسمنا كلا من هذه المساحات الثلاث على △ س كانت :

$$\frac{\text{△ (مساحة)}}{\text{△ س}} \text{ تقع بين ص ، (ص + △ ص)}$$

وكلما اقتربت △ س من الصفر اقتربت △ ص أيضاً من الصفر . بعبارة أخرى عند ما تقترب △ س من الصفر فإن $\frac{\text{△ (المساحة)}}{\text{△ س}}$ تقع بين ص ، قيمة تقترب من ص أى إن

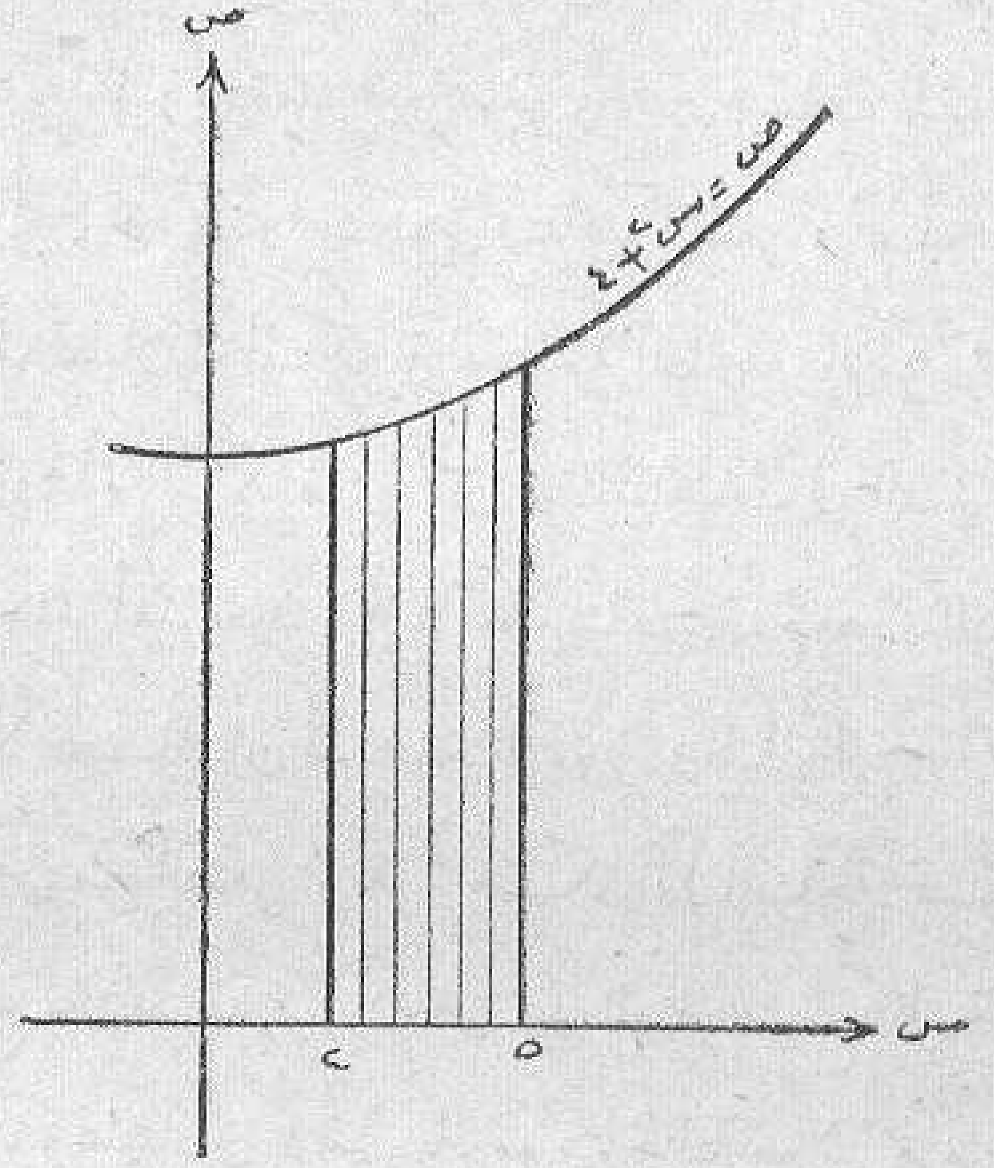
$$\text{نهـا}_{\text{△ س} \leftarrow \text{٠}} \frac{\text{△ (مساحة)}}{\text{△ س}} = \text{ص} = \text{س}^{٢} + ٤$$

بعبارة أخرى مشتقة المساحة بالنسبة إلى س تساوى ص أى تساوى طول الاحداثى الصادى ا ن ، وبتعويض القيمة السينية للنقطة ا يمكن إيجاد معدل زيادة المساحة عند النقطة ن من هذه المشتقة . نبحث الآن كيف يمكننا إيجاد المساحة من المعادلة ص = س^{٣} + ٤ . حيث إن مشتقة المساحة فى هذا المثال هى س^{٢} + ٤ فبتطبيق قانون واليس يكون قانون المساحة هو $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + ٤س + حـ .

ولكن فى هذا المثال إذا كانت س = ٠ فإن المساحة = ٠ وبناء عليه حـ = ٠ نستطيع أن نقول إذن إنه لجميع قيم س مقيسة إلى يمين المحور الصادى تكون المساحة $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + ٤ س ، وبالتعويض عن س بأى

قيمة فى هذا المقدار يمكن أن نوجد المساحة ، إلى الاحداثى الصادى ، عند النقطة التى تكون قيمتهما السينية هى القيمة التى عوضنا بها .

فإذا كانت س = ٥ مثلا فإن المساحة = $\frac{١}{٣}(٥)^{٣}$ + ٤ (٥) أو $\frac{٢}{٣}$ ٦١ وحدة مربعة .



شكل (١٠٦)

والآن نفرض أننا أردنا إيجاد مساحة الجزء المظلل فى شكل ١٠٦ الذى يمثل نفس المنحنى المرسوم فى شكل ١٠٥ .

لقد رأينا أن المساحة بين المحور الصادى والاحداثى الصادى عند س = ٥ هى $\frac{٢}{٣}$٦١ وحدة مربعة . فإذا طرحنا منها المساحة المحصورة بين المحور الصادى والاحداثى الصادى عند س = ٢ لحصلنا على المساحة المظللة هكذا :

مساحة الجزء المظلل = $٦١\frac{٢}{٣} - [\ \frac{١}{٣}(٢)^{٣} + ٤(٢)\ ]$

$= ٦١\frac{٢}{٣} - ١٠\frac{٢}{٣}$

= ٥١ وحدة مربعة .

وما زلنا نعبر عن هذه العملية ، عملية إيجاد الدالة المساحية من الدالة الصادية بالرموز التى ابتدعها ليبنتز ، غير أن هذه الرموز مضللة . لقد رأينا كيف أن ليبنتز استخدم ءس للدلالة على زيادة متناهية الصغر واعتبر مساحة المستطيل ص(ءس) هى مساحة المستطيل ا هـ عندما تكون متناهية الصغر ، ثم عبر عن مجموع عدد لانهائى من هذه المستطيلات المكونة للمساحة المطلوبة بالرمز ∫س (ءس) . وعلى الرغم من أن هذه النكرة فى أن « المتناهيات فى الصغر » لها « كبر » محدود قد هجرت منذ أمد بعيد ، فإننا ما زلنا نستخدم هذه التعبيرات الرمزية المضللة ، وكان الأفضل أن نستخدم الرموز : المساحة = ∫ص (△ س) عندما تقترب △ س من الصفر وتقرأ هكذا (المساحة تساوى النهاية التى يقترب منها المجموع عندما تقترب △ س من الصفر) ومع كل فقد فاتت فرصة تغيير هذه الرموز ، وعلينا أن نرضى بالرموز الحالية مع شىء من التحفظ . إذا استخدمنا تعبير ليبنتز الرمزى ، فإن حل المسألة السابقة يكون كما يلى :

المساحة = $\int_{س=٥}$ (س^{٢} + ٤) ءس − $\int_{س=٢}$ (س^{٢} + ٤) ءس

أو بعبارة مختصرة فى المساحة = $\int_{٢}^{٥}$ (س^{٢} + ٤) ءس .

وهذا التعبير الأخير يعرف بالتكامل المحدود الذى « نهايته العليا ٥ ونهايته السفلى ٢ » .

وقد رأينا أن عملية التكامل هى عكس عملية التفاضل (كما أن

القسمة عكس عملية الضرب) وعليه يمكننا أن ننسى عملية الجمع والمساحات ونطبق ببساطة قانون واليس على المشتقة لكى نحصل على الدالة الأصلية ، وعلى سبيل المثال نأخذ المسألة الآتية : قذفت كرة رأسيا لأسفل بسرعة ابتدائية قدرها ٤٠ قدم/ ثانية من شباك يرتفع ١٠٠٠ قدم عن سطح الأرض ، فكم يكون ارتفاع الكرة عن الأرض بعد مرور ٥ ثوان من لحظة القذف ؟ .

سبق أن رأينا فى الفصل السابع أن السرعة لأسفل فى هذا النوع من المسائل تعتبر سالبة ومن الجدول الذى أنشأناه فى صفحة ٣٢٤ (أنظر مسألة الكرة) نرى أن عجلة الجسم الذى يصعد أو يهبط تتناقص باستمرار (جبريا) بمقدار ٣٢ قدما / ثانية / ثانية ، وعليه فسنعطى كلا من السرعة الابتدائية والعجلة إشارة سالبة فى هذه المسألة .

لنفرض أن ارتفاع الكرة فوق سطح الأرض فى أى لحظة هى ف قدما ولتكن ه هى عدد الثوانى اللازمة لقطع هذه المسافة .

وقد رأينا آنفا أن العجلة هى د″ (ه) . وبناء عليه حيث إن عجلة جسم صاعد أو هابط هى — ٣٢ قدم / ثانية / ثانية فإن .

$$\text{د}''(\text{ه}) \text{ أو } \frac{\text{ى}^{٢}\text{ف}}{\text{ى}\text{ه}^{٢}} = -٣٢$$

$$\therefore \text{د}(\text{ه}) \text{ أو } \frac{\text{ى ف}}{\text{ى ه}} = \int (-٣٢)\,\text{ى ه} = -٣٢\text{ه} + \text{ح}$$

حيث إن عند ه = ٠ كانت السرعة $\frac{\text{ى ف}}{\text{ى ه}} = -٤٠$ قدما / ثانية

∴ ح = — ٤٠

∴ ءف / ءه = — ٣٢ه — ٤٠

∴ د(ه) أو ف = ∫ (— ٣٢ه — ٤٠) ءه

= — ١٦ه٢ — ٤٠ه + ك

وحيث إنه عند ه = . تكون ف = ١٠٠٠ فإن ك = ١٠٠٠

∴ ف = — ١٦ ه٢ — ٤٠ه + ١٠٠٠

∴ عند ه = ٥ تكون ف = — ٤٠٠ — ٢٠٠ + ١٠٠٠

= ٤٠٠ قدما

وهذا مثل بسيط من مسائل لا حصر لها يمكن حلها بسرعة وبساطة بحساب التكامل .

نعود الآن إلى حياة ليبنتز الشخصية : كان اختراعه لحساب التفاضل والتكامل واحداً من أنواع نشاطه المختلفة المتعددة النواحى، وفضلا عن دراساته الرياضية والعلمية فقد أمضى وقتا طويلا — فى نظرنا اليوم يعتبر وقتا ضائعا — فى الأعمال الديبلوماسية ولم تكن كلها بعيدة عن الشبهات ، فقد رأينا فى الفصل السابع كيف أنه حاول توجيه مطامع لويس الرابع عشر إلى تركيا بدلا من وطنه ألمانيا ، وكان عمله الديبلوماسى بعد ذلك لصالح أسرة برنزويك ، وليس لصالح سيد ماينز .

التحق ليبنتز بخدمة دوق برنزويك لونبرج (هانوفر) عام ١٦٧٣ وظل فى خدمة هذه الأسرة أربعين عاما خدم فيها أربعة من ملوكها . كان منصبه

الرسمي أمين المكتبة الدوقية فى هانوفر ، إلا أنه كثيرا ما كان يعهد إليه بمهمات ديبلوماسية ، وفى هذه الناحية لعب دورا رئيسيا فى ترقية دوق هانوفر إلى « الدائرة الانتخابية » أو جماعة أمراء ألمانيا الذين كان لهم حق انتخاب إمبراطور « الامبراطورية الرومانية المقدسة » التى أصبحت فى القرن السابع أثرا بعد عين. أضاع ليبنتز قدرا كبيراً من عبقريته الغالية فى جمع وإعداد المعلومات عن تاريخ أسرة برنزويك لونبرج ليدعم بها مركز سادته عمداء الأسرة ، غير أنه لم ينجح إلا فى تغطية الفترة بين ٧٦٨ و ١٠٠٥ م . وقد أدى به جمع هذه المادة إلى الإكثار من التنقل فى ألمانيا وإيطاليا فى السنوات بين ١٦٨٧ ، ١٦٩٠ ، وكان اهتمامه فى هذه الفترة منصبا على محاولة إعادة توحيد الكنيستين البروتستنتية والكاثوليكية ، وألف كتابا فى الموضوع (لم ينشر إلا فى ١٨١٩ بعد فوات الأوان) .

وفى عام ١٧٠٠ زار برلين بشأن الأكاديمية التى كان ينوى إنشاءها بالمدينة ، وانتخب رئيسا لها عام ١٧١١ كما أنه وضع تصميما لأساس أكاديمية بطرسبرج ، بناء على رجاء من بطرس الأكبر ، إلا أن هذا التصميم لم ينفذ فى حياة القيصر ، بل قامت بتنفيذه أرملته كاترين الأولى . وفى ١٧١٢ منح لقب بارون الإمبراطورية وكان لقبا طالما اشتهى الحصول عليه كما كان آخر تقدير حصل عليه، فقد قضى بقية حياته تحت غمامة من الإهمال . وفى عام ١٧١٤ أصبح سيده جورج لويس سيد هانوفر ملكا لإنجلترا ، باسم جورج الأول وأراد ليبنتز مرافقته إلى هناك ، ولكن العاهل العظيم أبى وأمر ببقائه فى هانوفر ليكمل كتابه عن تاريخ أسرة برنزويك. ومات ليبنتز عام ١٧١٦ مهملا كسير الفؤاد ، ولم يشيعه سوى سكرتيره إكهارت ، ولم يهتم أحد بوفاته لا فى أكاديمية برلين التى أسسها

ولا فى لندن حيث كان سيده يجلس على عرش إنجلترا بل انفردت الأكاديمية الفرنسية بتأبينه وتخليد ذكراه .

امتاز ليبنتز فى جميع مراحل حياته بقدرته العجيبة على العمل السريع المستمر لفترات طويلة . وحتى فى أسفاره كان يحل المسائل ، وكتب كثيرا فى الموضوعات الفلسفية بانيا بعض آرائه على آراء ديكارت وبعضها على آراء سبينوزا Spinoza ، وكان قد قابل الأخير فى امستردام عام ١٦٧٦ ونشر مقالا فى الفلسفة عام ١٦٦٦ اقترح فيه معالجة رياضية للمنطق حيث تستخدم الرموز والقوانين – كما فى الرياضيات — بدلا من التفكير فى الحالات الفردية ، واقترح أن يكون هذا التعبير الرمزى بلغة مصطلح عليها بين الأمم ، وبذا يتوقف اعتبار الحق وضده كوجهتى نظر ويصبحان مسألة صحة أو خطأ فى الحسابات .

واليوم نذكر ليبنتز ، لا لحصافته السياسية والدبلوماسية ، ولا لأنه أسهم فى الأمور الدينية والعلوم والفلسفة ، ولكن لما أسهم به فى حساب التفاضل والتكامل . لم يعبأ رياضيو ألمانيا فى بادىء الأمر بحساب التفاضل والتكامل الذى ابتدعه وربما كان السبب فى ذلك راجعا إلى غموض أسلوبه . أما فى سويسرا فقد استرعت مقالاته اهتمام العالم الفذ جاكوب برنولى Jakob Bernoulli

فى ظرف مائة عام أنجبت أسرة برنولى مالا يقل عن ثمانية من كبار الرياضيين وأهمهم جاكوب برنولى (١٦٥٤ — ١٧٠٥) وشقيقه يوهان (١٦٦٧ — ١٧٤٨) ، ودانيال (١٧٠٠ — ١٧٨٢) ابن يوهان .

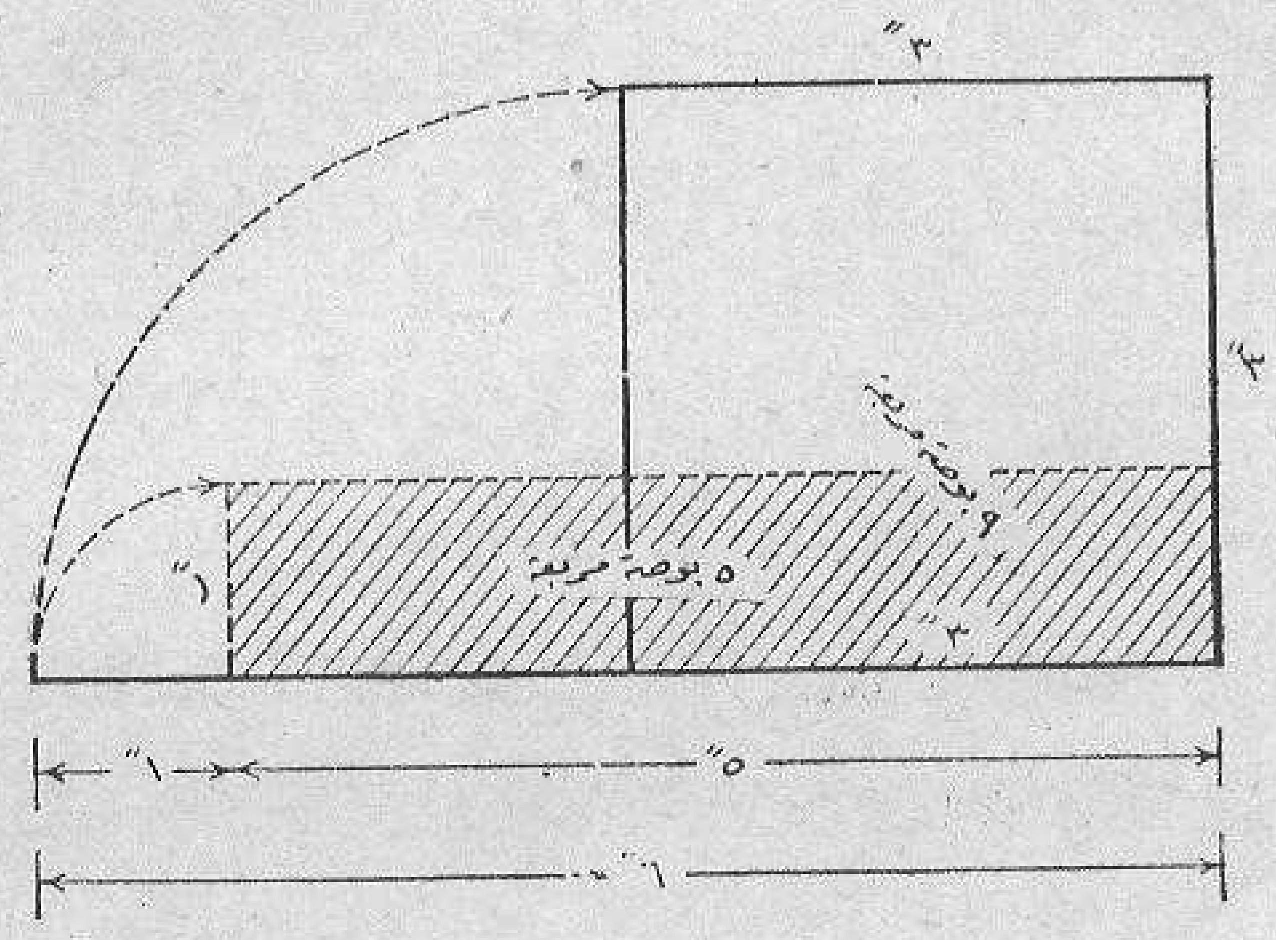
كانت أسرة برنولى قد حالفها الحظ وأيسر التجار منها حين ولد جاكوب الذى كان فى النية أن يصبح كاهنا ، وبناء عليه درس الفلسفة بجامعة بازل ، إلا

أنه شغف بالرياضيات ، ولخوفه من معارضة والده أخذ يدرسها سرا ويظهر ذلك فى اختياره لعبارة « أدرس النجوم ضد إرادة والدى » لتكون شعارا له .

فى عام ١٦٨٢ افتتح مدرسة للرياضيات والعلوم فى بازل، وبعد ذلك بخمس سنوات عين أستاذا للرياضيات بجامعة بازل. وقد أثبت جدارته كمدرس ، وتعلم كثير من الرياضيين المعروفين على يديه . وقد جاهد فى تعريف الآخرين بحساب التفاضل والتكامل لليبنتز ، وكان قد استوعبه من المقالات الصعبة المعقدة التى كان يقرأها فى صحيفة المؤلف .

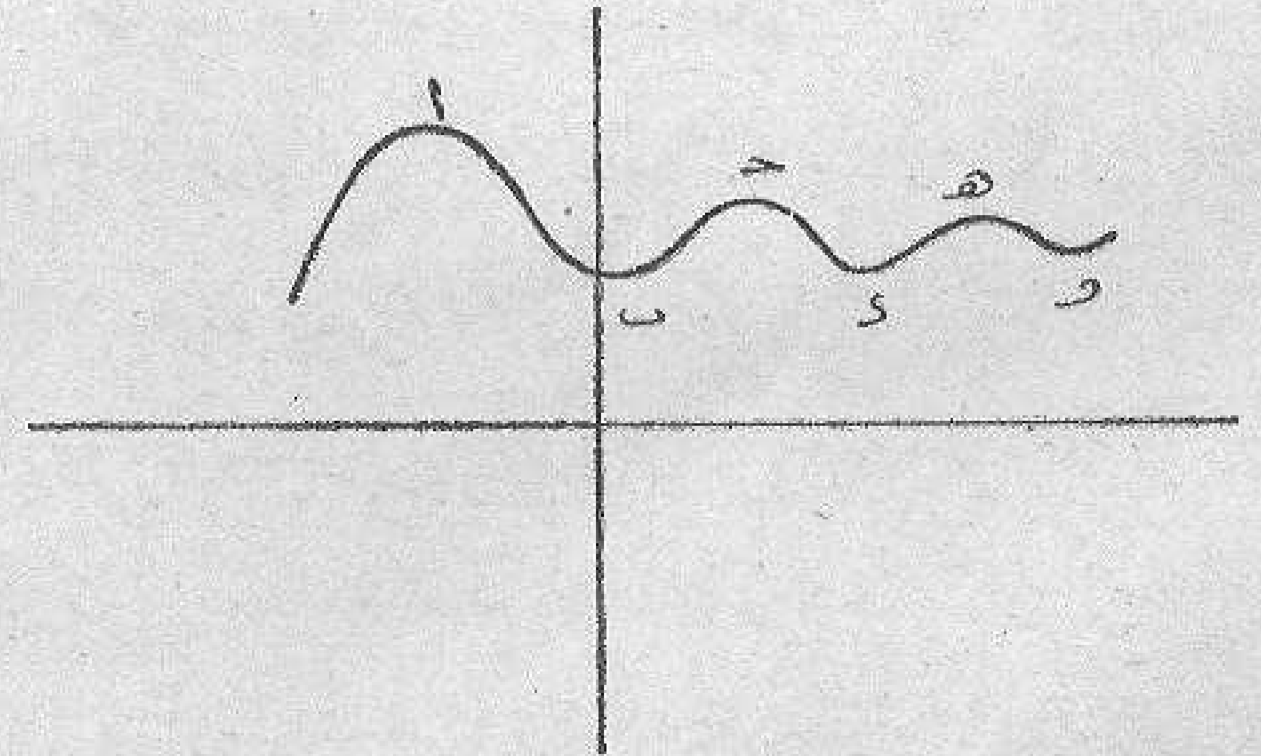
وفى عام ١٦٩٦ أعلن عن جائزة لمن يحل مسألة فى « تساوى المحيط » . كان اليونان القدامى قد اكتشفوا بعض الحقائق البسيطة عن أكبر وأصغر قيمة لكمية متغيرة تحت شروط معينة ، وكان أقليدس أول من أوجد الأمثلة فى النهايات العظمى والصغرى حين بين طريقة إيجاد أطول وأقصر المستقيمات التى يمكن رسمها إلى دائرة من نقطة خارجها . وقد أثبت كذلك أنه إذا نصف مستقيم فإن مساحة المستطيل (مربع فى هذه الحالة) المرسوم على أحد الجزأين المتساويين من المستقيم يكون أكبر من أى مستطيل آخر يكون ضلعاه المتجاوران أى جزأين مختلفين ينقسم إليهما المستقيم . انظر شكل ١٠٧ .

وبعد عصر إقليدس أثبت رياضيون آخرون من الإغريق أن مساحة المضلع المنتظم أكبر من مساحة المضلع غير المنتظم الذى يكون محيطه مساويا محيط المضلع المنتظم ، وأن مساحة الدائرة أكبر من مساحة أى منحنى آخر أو مضلع يكون له نفس المحيط .



شكل (١٠٧)

وبمرور الزمن اتخذت كلمتا عظمى وصغرى معانى أكثر اتساعا من مجرد « الأكبر و الأصغر » ، فالمنحنى مثلا يمكن أن تكون له عدة نهايات كبرى وصغرى تدل على أكبر أو أصغر قيم فى منطقة معينة على المنحنى الممثل لدالة ما ، فمثلا فى شكل ١٠٨ تقع النهايات الكبرى عند النقط ا ، حـ ، هـ وتقع النهايات الصغرى عند ب ، د ، و .



شكل (١٠٨)

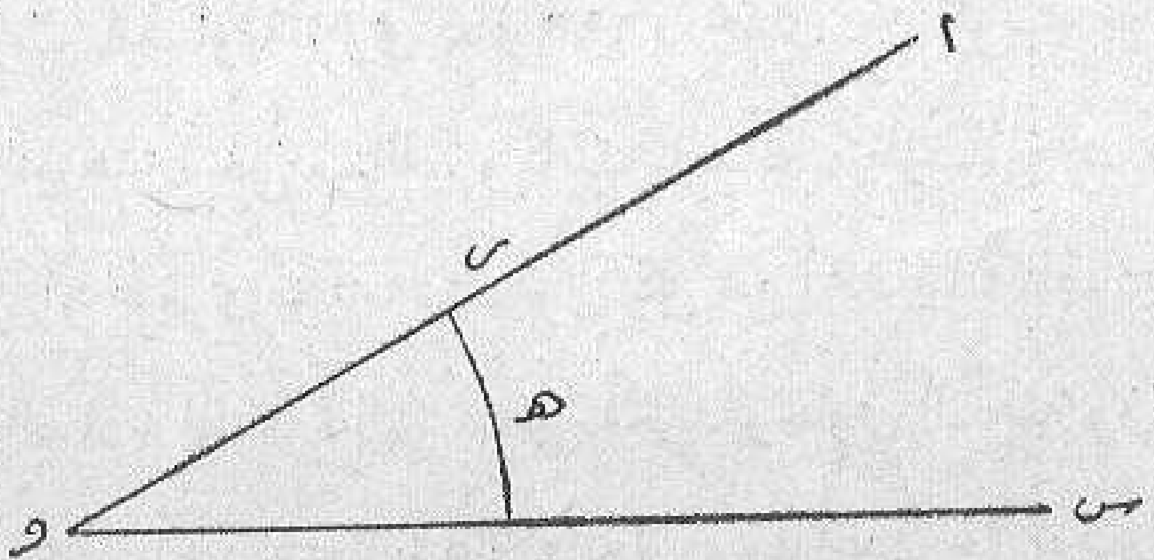
ومن السهل أن تحدد النهايات العظمى والصغرى لدالة عن طريق حساب التفاضل والتكامل . وقد سبق وشرحنا هذه الطريقة فى باب سابق . حيث إن مشتقة الدالة تبين ميل الرسم البيانى لتلك الدالة ، فكل ما علينا عمله عامة هو إيجاد قيم س التى تجعل $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$ (إذا كانت ص دالة فى س) .

كان جاكوب برنولى وشقيقه يوهان شديدى الاهتمام بنوع جديد من مسائل المحيطات المتساوية . وفى عام ١٦٩٦ تحدى جاكوب سائر الرياضيين ومنهم شقيقه يوهان لحل مسألة . وكانت المسألة تتطلب إيجاد منحنى يعطى مساحة عظمى أو صغرى عندما يكون كل من أحداثياته الصادية دالة معلومة للاحداثيات الصادية المناظرة التى لمنحنى آخر . وحاول الكثيرون من رياضيى أوروبا حل هذه المسألة، ومنهم يوهان برنولى ، ولما أعلن جاكوب أن حل شقيقه كان خاطئا قام شجار عنيف بين الشقيقين، وكان يوهان سريع الغضب بطبعه، ولو أنه كان يعرف كيف يخلص لأصدقائه ، وكان من بينهم المركيزدى لوبيتال وليبنتز وأويلر وسوف نقابل هذا الأخير قريبا .

بعد وفاة جاكوب أظهر يوهان حلا لمسألة المحيطات المتساوية مدعيا أنه من عمله ولكنه كان فى الواقع حل أخيه . هذا النوع من المسائل أدى إلى تنمية فرع من حساب التفاضل والتكامل يعرف باسم « حساب المتغيرات » .

كان جاكوب برنولى من أوائل الرياضيين الذين عمموا استخدام « المحاور القطبية » للتفرقة بينها وبين المحاور المتعامدة التى استخدمها ديكارت . والواقع أن بعض الموضوعات يسهل دراستها باستخدام المحاور القطبية . فى المحاور القطبية أو المثلثية يتحدد موضع النقطة على سطح مستو ببعد واتجاه عوضا عن

عن بعدين كل منهما عمودى على واحد من المحورين المتعامدين . مثلا فى شكل ١٠٩ يمكن أن يتحدد موقع النقطة ا (أولا) بالبعد و ا الذى يعرف بنصف القطر الموجه من نقطة و (القطب) ويشار إليه في الرسم بالرمز ر ، (ثانيا) بالزاوية هـ ، وهى الزاوية الموجهة أو الزاوية التى يعملها و ا أثناء دورانه فى اتجاه عكس عقرب الساعة مبتدئا من مستقيم معين و س يعرف بالمحور القطبى .



شكل (١٠٩)

المقياسان ر ، هـ يعرفان بالأحداثيين القطبيين للنقطة ا .

يبين شكل ١١٠ العلاقة بين الأحداثيات القطبية والكارتيزية .

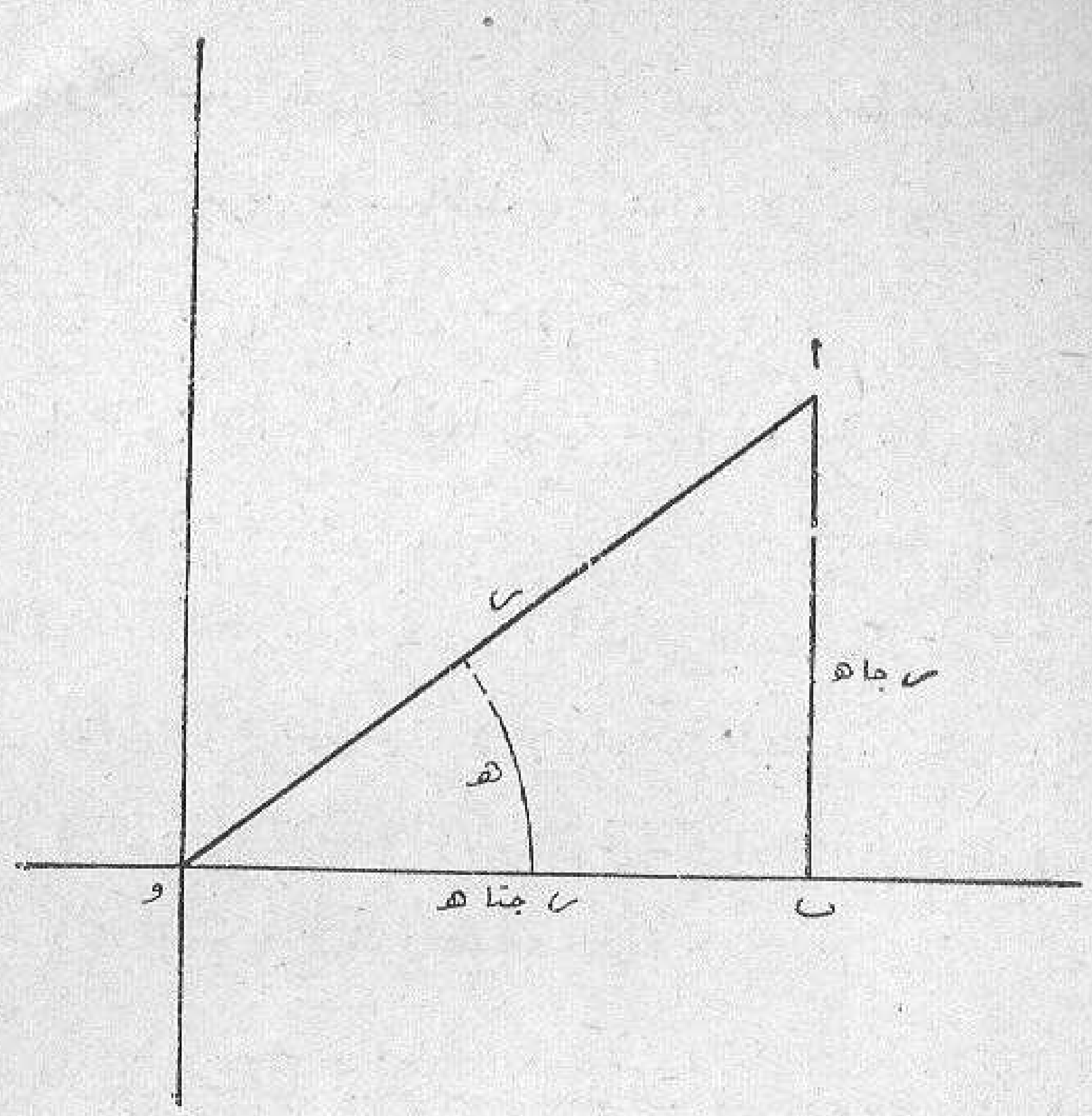
حيث إن $\frac{\text{ب ا}}{\text{و ا}}$ = جا هـ فإن ب ا = و ا جا هـ = ر جا هـ .

ولكن فى الأحداثيات الكارتيزية ب ا = ص

∴ ص = ر جا هـ

وبالمثل

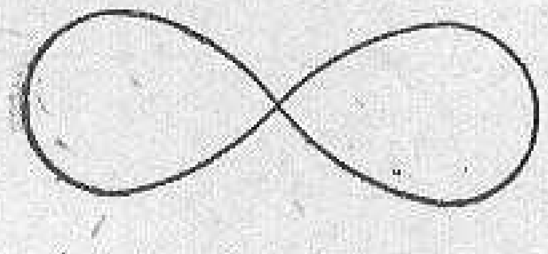
$\frac{\text{و ب}}{\text{و ا}}$ = جتا هـ فيكون و ب = و ا جتا هـ = ر جتا هـ



شكل (١١٠)

ومن الأحداثيات الكارتيزية و ب = س

∴ س = ر جتاهـ



شكل (١١١)

كان أحد المنحنيات التى اكتشفها جاكوب برنولى بواسطة الأحداثيات القطبية هو « الفيونكة » أو عروة برنولى (شكل ١١١)

طلب جاكوب برنولى ، كما فعل أرشميدس ، أن يحفر شكل رياضى على قبره واختار لذلك الغرض الحلزونى اللوغاريتمى ، ربما لأنه يتفق مع العبارة التى وضعها لترافق الرسم وهى « سأقوم كما أنا ولكننى أتغير » إذ أنه غالبا ما ينتج الحلزونى اللوغاريتمى نفسه تحت شروط كثيرة مختلفة .

وبعد وفاته بثمان سنين ظهر مؤلف له تناول فيه موضوعات شتى منها ما اكتشفه عن نظرية الاحتمالات ، وهو ما كان له أثره فى تطوير مادة هذا الموضوع التى وضع أساسها فرمات وبسكال .

سار يوهان برنولى كأخيه جاكوب ضد إرادة والده فى انتقاء عمله فى الحياة . كان أبوه يرغب فى أن يسلمه زمام تجارته الناجحة ولكنه بعد أن قضى سنة فى دنيا التجارة اتجه نحو بازل ليدرس الفلسفة والرياضيات . وعاش ردحاً من الزمن فى فرنسا حيث درس قوانين ليبنتز فى حساب التفاضل والتكامل وكان ضمن تلاميذه المركيزدى لوبيتال Marquis de L'Hopital الذى ألف أول كتاب يعالج المادة بطريقة منسقة .

علم يوهان الرياضيات لمدة عشر سنوات فى جرونجن فى هولندا ، وخلف شقيقه بعد وفاته كأستاذ للرياضيات فى جامعة بازل ، حيث نال شهرة واسعة كمدرس ، وكان قد عرف فى جميع أنحاء أوروبا بسبب مسألة عن المحيطات المتساوية التى سبق وتكلمنا عنها، وكثيراً ما اشتبك يوهان فى شجار عنيف ومناقشات طويلة ، كما أنه لعب دوراً قياديا فى المعركة التى قامت ضد الرياضيين الانجليز بشأن مخترع حساب التفاضل والتكامل .

أنجب يوهان ثلاثة أبناء أصبحوا جميعاً أساتذة فى الرياضيات ، اثنان منهم هما نيقولاوس ودانيال أصبحا أستاذين فى أكاديمية بطرسبرج التى أسستها كاترين الأولى. غير أن نيقولاوس مات صغيراً وعاد دانيال إلى بازل عام ١٧٣٣ بعد فترة قصيرة بالأكاديمية لاعتلال صحته . أما الثالث واسمه يوهان « كأبيه » فقد خلف والده أستاذاً للرياضيات بجامعة بازل. ولقد فاز دانيال وكان أشهرهم بما لا يقل عن عشرة

جوائز منحتها له الأكاديمية الفرنسية للعلوم وتقاسم إحداها مع والده الذى أغضبه ذلك ! .

وسر دانيال مرة حين سأله شخص غريب عن إسمه فأجاب « اسمى دانيال برنولى » ، فقال السائل على الفور فى سخرية بالغة : « وأنا اسمى إسحق نيوتن » !

لما استقال دانيال من منصبه بأكاديمية بطرسبرج خلفه صديقه ليونارد أويلر Leonard Euler وهو أحد كبار رياضيى القرن الثامن عشر وأشهر من أنجبت سويسرا .

ولد أويلر فى بازل عام ١٧٠٧ ، وكان أبوه راعى كنيسة من مذهب كالفن Calvin ، كما كان رياضياً تعلم على يدى جاكوب برنولى ، وعلى عكس جاكوب ويوهان برنولى شجعه أبوه وساعده ثم أرسله ليدرس الرياضيات عن يوهان برنولى بالرغم من أن نفسه كانت تتوق لأن يحذو ابنه حذوه ويصبح راعى كنيسة . ظل الجو الدينى الذى تربى فيه أويلر ملازماً له طوال حياته فلم يهجره إيمانه البسيط الذى لا يعرف الشك — ذلك الايمان الذى تعلمه فى طفولته — فى سبعة وسبعين عاماً عاشها ، وربما كان هذا الإيمان هو الذى قواه على احتمال العمى بصبر وشجاعة لا تخور ، وجعل من العسير عليه أن يتعامل مع أناس مثل فردريك الأكبر وفولتير كما سنرى فيما بعد .

كان الجو مهيأ لتطورات هامة فى الرياضيات حين ولد أويلر عام ١٧٠٧ وكان قد مضى سبعون عاماً منذ تقدم ديكارت بهندسته التحليلية الثورية وكان ليبنتز قد قدم حساب التفاضل والتكامل إلى أوروبا منذ ثلاثين عاماً ،

وبعد وفاته بثمان سنين ظهر مؤلف له تناول فيه موضوعات شتى منها ما اكتشفه عن نظرية الاحتمالات ، وهو ما كان له أثره فى تطوير مادة هذا الموضوع التى وضع أساسها فرمات وبسكال .

سار يوهان برنولى كأخيه جاكوب ضد إرادة والده فى انتقاء عمله فى الحياة . كان أبوه يرغب فى أن يسلمه زمام تجارته الناجحة ولكنه بعد أن قضى سنة فى دنيا التجارة اتجه نحو بازل ليدرس الفلسفة والرياضيات . وعاش ردحاً من الزمن فى فرنسا حيث درس قوانين ليبنتز فى حساب التفاضل والتكامل وكان ضمن تلاميذه المركيزدى لوبيتال Marquis de L'Hopital الذى ألف أول كتاب يعالج المادة بطريقة منسقة .

علم يوهان الرياضيات لمدة عشر سنوات فى جبرونتجن فى هولندا ، وخلف شقيقه بعد وفاته كأستاذ للرياضيات فى جامعة بازل ، حيث نال شهرة واسعة كمدرس ، وكان قد عرف فى جميع أنحاء أوروبا بسبب مسألة عن المحيطات المتساوية التى سبق وتكلمنا عنها، وكثيراً ما اشتبك يوهان فى شجار عنيف ومناقشات طويلة ، كما أنه لعب دوراً قياديا فى المعركة التى قامت ضد الرياضيين الانجليز بشأن مخترع حساب التفاضل والتكامل .

أنجب يوهان ثلاثة أبناء أصبحوا جميعاً أساتذة فى الرياضيات ، اثنان منهم هما نيقولاوس ودانيال أصبحا أستاذين فى أكاديمية بطرسبرج التى أسستها كاترين الأولى. غير أن نيقولاوس مات صغيراً وعاد دانيال إلى بازل عام ١٧٣٣ بعدفترة قصيرة بالأكاديمية لاعتلال صحته . أما الثالث واسمه يوهان « كأبيه » فقد خلف والده أستاذاً للرياضيات بجامعة بازل. ولقد فاز دانيال وكان أشهرهم بما لا يقل عن عشرة

وفى حساب المثلثات اخترعت النسب الست ، إلا أنها لم تعرف بهذه التسمية إلى عام ١٧٧٠ ، وكانت تعتبر كأطوال وليس كنسب ، كما كانت المادة تنوء تحت المعالجة الهندسية القديمة ، وعلى الرغم من وجود قدر كبير من المادة العلمية فى حساب المثلثات ، إلا أنها كانت فى حاجة إلى الترابط ولم تكن قوانينها المبعثرة قد تطورت إلى مادة منسقة متصلة .

فى ظرف خمسين عاماً حرر أويلر هندسة ديكارت من الهندسة اليونانية القديمة وجعلها فرعا مستقلا من التحليل الرياضى ، كما لخص كل ما كان معروفا فى وقته من حساب التفاضل والتكامل ، وفتح أبواباً جديدة من التفكير الرياضى طورها ونماها خلفاؤه ، كما أنه نقل حساب المثلثات من أساس هندسى إلى أساس جبرى كما سبق أن قلنا فى الفصل الرابع .

وبالرغم من أن القرنين التاسع عشر والعشرين قد رأيا تطورات هامة ، ولا سيما فيما يتعلق بمعالجة أويلر الدقيقة لبعض أعماله ، فإن معظم أسس المبادىء الجبرية التى يدرسها الطلبة اليوم من وضع أويلر . كان نشاطه وقدرته على التطبيق لاحد لهما ، وكانت ثمار جهوده فى الرياضيات والعلوم والفلك بحيث ملأت أربعين مؤلفا ، هذا عدا الأعمال التى لم تنشر .

وعالم الرياضيات مدين بالفضل لبعض ملوك أوروبا الثاقبى الرأى الذين مكنوا أويلر من الإسهام بسخاء فى الرياضيات . إن معظم البحوث التى تتعلق بالرياضيات والعلوم فى أوروبا راجعة إلى تشجيع بعض الأكاديميات وقد رأينا كيف أطلقت كلمة «أكاديمية» على مدرسة أفلاطون للفلسفة ، وكانت أول جمعية من العلماء تأسست للبحث فى العلوم الطبيعية تسمى «أكاديمية أسرار الطبيعة»

وكان مركزها نابلى ، وكان ذلك فى عام ١٥٦٠ ولكن هذه الهيئة كانت قصيرة الأمد ، لأن اسمها كان يوحى لجهلاء العصر بفكرة السحر « والفنون السوداء » !

ولقد رأينا كيف أن بسكال كان يحضر اجتماعات الرياضيين والعلماء فى باريس وكانت هذه الاجتماعات نواة للأكاديمية الفرنسية للعلوم ، وقد قامت هذه الأكاديمية بمنح الرياضيين والعلماء مرتبات لتمكنهم من التفرغ للبحث فضلا عن تشجيعها لتطور الرياضيات والعلوم بإعطاء الجوائز للمتنافسين فى هذا المضمار . وقد أعيد تكوين الأكاديمية الفرنسية عدة مرات وضمت بين أعضائها معظم الأسماء اللامعة فى العلوم والرياضيات فى فرنسا ، كما ضمت عدداً من الأجانب مثل بنيامين فرانكلين الذى انتخب (عضواً أجنبيا) بها عام ١٧٧٢ .

كان أويلر متصلا فى أوقات مختلفة باثنتين من هذه الأكاديميات الأوروبية وكانت كلتاهما من تصميم ليبنتز . ففى عام ١٧٠٠ أسس فردريك الأول ملك بروسيا أكاديمية برلين للعلوم إلا أنها لم تفتح أبوابها حتى عام ١٧١١ حين عين ليبنتز أول رئيس لها . وفى ١٧٢٤ وافق بطرس الأكبر على تصميم ليبنتز للأكاديمية الأمبراطورية للعلوم فى بطرسبرج ولم يحل موت الملك المفاجىء دون تنفيذ التصميم فقد نفذته الامبراطورة الواسعة الأفق (فى أكثر من ناحية) كاترين الأولى عشيقة الملك السابقة وزوجته ثم أرملته ، وفى كلتا المدينتين - برلين وبطرسبرج - كانت الأكاديمية تمنح مرتبات سخية من خزانة الدولة لتمكن العلماء من متابعة بحوثهم فى الرياضيات والعلوم ، وبذا قامت بالتشجيع الذى كانت تفتقر إليه جامعات أوروبا فى القرن الثامن عشر إذا استثنينا المبالغ الضئيلة التى كانت تمنحها جامعتا أكسفورد وكمبردج للكهنة من أعضائها .

انتخب أويلر — كما سبق ورأينا — لأكاديمية بطرسبرج عام ١٧٣٣ ومن ذلك التاريخ فصاعدا كان كل همه هو دراسة الرياضيات والعلوم ، وفى عا ١٧٣٥ أصيب بحمى من فرط الإجهاد ، وكانت نتيجة ذلك أن فقدت عينه اليمنى قوة الإبصار ولكنها لم تبطىء من تأليفه الضخم فى الرياضيات والعلوم . وبعد ذلك بثلاثة أعوام نال جائزة الأكاديمية الفرنسية للعلوم وفى ١٧٤٠ اقتسم الجائزة مع ماكلورين ودانيال برنولى .

وفى عام ١٧٤١ كان قد ضاق بالانقلابات وأوامر الإعدام القائمة فى روسيا فقبل دعوة فردريك الأكبر لأن يصبح عضوا بأكاديمية برلين وظل بها لمدة ربع قرن ، ولكن شخصيته لم تنسجم مع نوع الناس — مثل فولتير — الذين كان يجتذبهم بلاط فردريك . وفى عام ١٧٦٦ بعد سنوات من المضايقات التافهة رحب بدعوة كاترين العظمى للعودة إلى بطرسبرج حيث كان يتمتع باحترام أهل روسيا حتى بعد أن عاد إلى بروسيا عام ١٧٤١ . وفى عام ١٧٦٠ كانت بروسيا منشغلة فى حرب السبع السنوات ضد روسيا وغيرها ، وأغار الروس على بروسيا فى أثناء تغيب فردريك على رأس جيشه فى برسلو بسيليسيا وسقطت برلين ، وفى أثناء المعركة دمر الروس مزرعة فى تشارلوتنبرج على بعد ٤ أميال من برلين كان يملكها أويلر . ولما سمع الجنرال الروسى باسم صاحبها أمر بدفع تعويض كامل لأويلر بينما أرسلت إليه اليصابات إمبراطورة روسيا مبلغاً إضافياً قدره أربعة آلاف كراون ، وأمام هذا الشعور الفياض من جانب روسيا من جهة وفتور فردريك وبلاطه من جهة أخرى لم يكن من الغريب أن يقبل أويلر دعوة كاترين العظمى عام ١٧٦٦ وأن يعود إلى أكاديمية بطرسبرج حيث قضى السبعة عشر عاما التى بقيت من حياته .

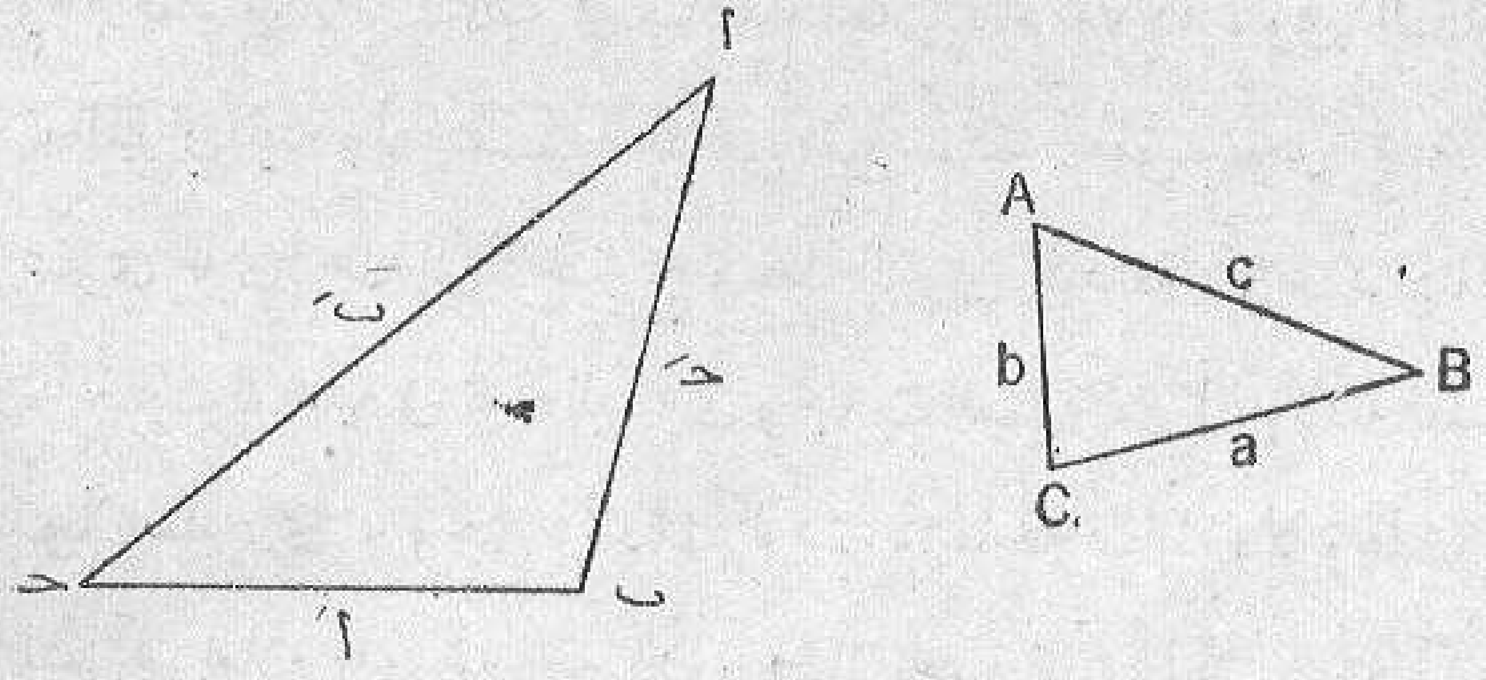
وبعد رجوعه إلى عاصمة القياصرة بوقت قصير تكونت سحابة على عينه اليسرى ، ولكن هذه المصيبة الجديدة لم تفتت هدوءه وشجاعته ، بل استمر فى عمله وقام فعلا بإملاء كتاب فى مبادىء الجبر عام ١٧٧٠ ، وفى السنة التالية دمرت النيران بيته ولم ينقذ الأعمى من موت محقق سوى محبة خادمه السويسرى الذى حمله إلى الخارج وسط النيران المندلعة ، وبعد ذلك بمدة قصيرة أجريت له عملية فى عينه اليسرى ونجحت العملية لفترة ، إلا أنه فقد بصره نهائيا ولم يعد يرى ، وحتى فى ذلك الوقت لم يفارقه نشاطه ولا وهنت عزيمته بل استمر فى إملاء قدر كبير من الأوراق الرياضية لبنيه ، ونشر عدد كبير منها بعد وفاته بمدة فى الصحيفة الرسمية لأكاديمية بطرسبرج .

وافق أويلر على استخدام الحرف اليونانى π (يقرأ پاى) وهو يعادل ط عندنا فى العربية للدلالة على العدد ٣و١٤١٥٩ أو النسبة بين محيط الدائرة وقطرها كما وافق على حرف e (يقرأ إى) لتمثل العدد غير القياسى ٢و٧١٨٢٨ أو

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \cdots$$

الذى يلعب دوراً أساسياً فى الرياضيات العليا . وكان أويلر أول من استخدم الرمز د (س) للدلالة على « دالة فى س » فى حين كان هو واضع الرمز ن (وهو يعادل ت فى العربية) للدلالة على $\sqrt{-1}$. وكان أول رياضى تحرر من فكرة نابيير القائلة بأن اللوغاريتم علاقة بين حد من متوالية حسابية وحد من متوالية هندسية ، ووضع بدلا منها الفكرة الحديثة المبسطة القائمة على الأسس . وكذلك عودنا استخدام الحروف الكبيرة فى تسمية

زوايا المثلث والحروف الهجائيـــة الصغيرة للدلالة على الأضـــلاع المقابلة للزوايا[١] .



شكل (١١٢)

بالإضافة إلى أعماله الكثيرة فى الرياضيات التى لا يسمح المجال بالتحدث عنها لصعوبتها الفنية كتب أويلر عن القمر والنجوم والكواكب السيارة فضلا عن إعداد كتاب « شعبى » فى الميكانيكا والفلك والعلوم العامة لابنة أخ فردريك الأكبر بعنوان « رسائل إلى أميرة ألمانية عن بعض موضوعات الطبيعة والفلسفة » . ويبين تأليف هذا الكتاب بالفرنسية مدى كراهية فردريك للغة الألمانية التى كان يعتبرها لغة الثقلاء ، وكان فردريك نفسه يكتب ويتحدث بالفرنسية ، كما كان يستضيف الكتاب الفرنسيين مثل موپرتوى وفولتير .

كانت ذاكرة أويلر العجيبة خير معوض له عن فقد بصره . كان فى استطاعته أن يعيد قصيدة فرجيل Aeneid — وهى مقطوعة شعرية طويلة باللاتينية — كلها

---

(١) فى اللغة العربية نستعمل آ للدلالة على الضلع المقابل للزاوية ا مثلا : (المترجم) .

عن ظهر قلب ، وكان يحب الحسابات الرياضية المعقدة وهو أعمى . وفى ١٧٨٣ حين كان يلعب مع أحفاده أصيب بشلل وتوفى فجأة وهو فى السابعة والسبعين.

بين الأعوام ١٦٠٠ ، ١٦٥٠ أتى أبناء فرنسا ديكارت وفرمات وبسكال إليها بالشهرة الرياضية والمجد ، ثم جاء دور إنجلترا حين أنجبت واليس وبارو ونيوتن ، وكان ليبنتز عملاق ألمانيا ، ثم تقدمت سويسرا على يدى الإخوة برنولى وأويلر. ومنذ منتصف القرن السابع عشر إلى منتصف الثامن عشر لم يظهر رياضى واحد بفرنسا وأخيرا أتى لويس لاجرانج Louis Lagrange (١٧٣٦ — ١٨١٣) وكان من أعاظم رياضيي العالم وأتى لوطنه فرنسا بمجد جديد وتلاه بيير لابلاس Pierre Laplace (١٧٤٩ — ١٨٢٧) وكتب له الخلود فى عالم الفلك والرياضيات .

ولد لاجرانج فى تورين عام ١٧٣٦ وكان الابن الأكبر لموظف حكومى من أصل فرنسى ، وكانت أمه ابنة طبيب من الأغنياء إلا أن أباه فقد ثروته فى المضاربات المالية ، واعتاد لاجرانج أن يقول بأن السبب فى حسن حظه راجع إلى فقد ثروة أسرته فلربما وقفت الثروة فى سبيل دراسته للرياضيات ، ولكننا نستبعد أن عقلا جبارا كهذا كان يستطيع مقاومة رغبته الملحة فى تذوق العلوم وفى إشباع فضوله العلمى مهما بلغت ثروته .

درس لاجرانج مبادىء الهندسة وهو طالب فى كلية تورين ولكن اهتمامه الجدى بالرياضيات لم يبدأ حتى تصادف أن قرأ مقالة بقلم هللى صديق نيوتن فى « المبادلات الفلسفية » ، أى فى الصحيفة التى كانت تصدرها الجمعية الملكية بلندن . ومن هنا بدأ اهتمامه بالتحليل الجديد الذى كان فى سبيله إلى تغيير

الرياضيات بأسرها . وفى مدى سنتين كان قـــد ألم بالمادة الإلمام الذى جعله يقترح على أويلر — وكان أويلر إذ ذاك فى أكاديمية برلين — طريقة أكثر تعميما من الطريقة المستخدمة وقتئذ لحل مسائل « المحيطات المتساوية » . واقتنع أويلر وأفاد من طريقة لاجرانج ومقترحاته إلا أنه لم يبدأ فى نشر أبحاثه التى بناها على تلك المقترحات ، حتى أعلن لاجرانج التحسينات التى أدخلها على طرق الحل وبذلك أثبت أويلر نبله وكريم خلقه .

وفى عام ١٧٥٤ عين أستاذا للهندسة فى مدرسة تورين الملكية ، وبينما كان يشغل هذا المنصب أسس جمعية تطورت بعد ذلك إلى أكاديمية تورين للعلوم . وفى صحيفة هذه الأكاديمية نشر طرقه التى كان قد بعث بها إلى أويلر والتى أدت إلى حساب التغيرات Calculus of Variations وقد كان أويلر هو الذى اقترح هذه التسمية عام ١٧٦٦ . ونال لاجرانج بين عام ١٧٦٤ ، ١٧٨٨ خمس جوائز مالية منحتها إياه الأكاديمية الفرنسية للعلوم لتطبيقه الرياضيات على مسائل الفلك . وفى تلك الفترة عام ١٧٦٦ خلف أويلر فى أكاديمية برلين ويرجع الفضل فى ذلك إلى تزكية دالمبرت D' Alembert الرياضى الفرنسى الذى كان يخشى غضب فردريك الأكبر إذا هو رفض أن يتقلد المنصب، وخدمة لأويلر الذى كان يرغب فى العودة إلى بطرسبرج .

وبعد وصوله إلى برلين بقليل تزوج لاجرانج من قريبة له وقال لدالمبرت أنه تزوجها طمعا فى أن يجد من يخدمه ويسهر على راحته ، ولكن القدر أراد غير ذلك ، فقد مرضت وسهر هو على تمريضها ، ورغم تفانيه فى خدمتها توفيت بعد فترة وجيزة من زواجهما .

وفى برلين ألف أعظم أعماله وهو الميكانيكا التحليلية وفيها اختصر نظرية ميكانيكا المجسمات والسوائل إلى قوانين عامة يمكن منها الوصول إلى نتائج خاصة، وقد استبعد من كتابه الأفكار الهندسية إلى حد أنه لم يظهر شكل واحد فيه.

وفى عام ١٧٨٧ بعد وفاة فردريك الأكبر بقليل استقال لاجرانج من منصبه فى برلين وقبل دعوة لويس السادس عشر ليكون عضواً بأكاديمية باريس وكان لويس السادس عشر قد خلف جده لويس الخامس عشر قبل ذلك بثلاث سنوات، وفى باريس قوبل لاجرانج بحفاوة من ملكة فرنسا السيئة الحظ مارى أنطوانيت، وخصص له جناح بقصر اللوفر، كما قرر له مرتب ضخم يوازى ما كان يتقاضاه فى برلين. ولكنه — رغم كل هذا الاحتفاء والتكريم — وقع فريسة ضيق نفسى شديد فكره الرياضيات والعلوم، وظل كذلك لمدة عامين كاملين، وحتى الطبعة الأولى من كتابه الميكانيكا التحليلية لم تحظ منه بنظرة. ومن العجيب أن يكون قيام الثورة الفرنسية العنيفة سبباً فى رد عقل هذا الرجل الطيب المحب للسلام إلى صوابه. كان اهتمامه بالانقلاب الاجتماعى شديد العمق، وعلى الرغم من أنه كان أجنبيا اسمياً وفى إمكانه مغادرة فرنسا، فقد آثر البقاء ومراقبة الأحداث عن كثب، ولما اجتاح حكم الإرهاب باريس ندم أشد الندم على بقائه، فلم تحتمل نفسه الوديعة القسوة والدم المراق الذى غمر البلاد، وكثيراً ما كان يلوم نفسه على بقائه قائلا: « أنت الذى جنيت على نفسك ». ومع كل فقد أتته السعادة ببقائه فى فرنسا، ففى عام ١٧٩٢ وهى السنة التى سبقت إعدام لويس السادس عشر ظهرت فى حياته فتاة صغيرة جميلة وهى ابنة عالم الفلك لومونيير Lemonnier مسوقة أولا

بعاطفة الشفقة على لاجرانج الوحيد الحزين ثم أحبته وصممت على الزواج منه وكان يكبرها بأربعين عاما ، ولكن زواجهما كان سعيداً وتفانى لاجرانج فى عبادة زوجته الشابة .

ولحسن حظ فرنسا ، بل لحسن حظ الرياضيات ، أن المحاكم الثورية لم تتصد للاجرانج ، وظل يتقاضى مرتبه وبالإضافة إلى ذلك عين فى مناصب حكومية مرتفعة الأجر .

وفى عام ١٧٩٣ رأس لجنة عينت لتتم عملا كان قد بدىء فيه قبل الثورة . وكان عمل هذه اللجنة هو فحص الأوزان والمعايير الفرنسية وتقدير مدى حاجتها إلى الإصلاح وكانت الأكاديمية تشرف على هذه العملية ، ولكن الثورة حلت الأكاديمية عام ١٧٩٣ ، وحتى اللجنة الجديدة (طهرت) من أولئك الذين لم يعتبروا « جديرين بالثقة لأنهم يكرهون الملوك ولمبادئهم الجمهورية » . وكان ضمن الذين لم يتصفوا بالصفات المطلوبة لابلاس Laplace الذى سوف نقابله قريباً، ولافوازييه Lavoisier وكان واحدا من مؤسسى الكيميا الحديثة فأعدم عام ١٧٩٤ ، وسبب موته صيحة احتجاج من لاجرانج الوديع ، فقد قال لقد استغرق سقوط هذا الرأس دقيقة واحدة . من يدرى فقد لا تكفى مائة عام ليقوم آخر مثلها .

ورغم الاضطراب القائم استمرت لجنة الأوزان والمقاييس فى عملها تحت إرشاد لاجرانج . كان لكل مقاطعة فى فرنسا أوزانها ومقاييسها ، فكان هناك ما يقرب من ثلثمائة طريقة لقياس المساحة وحدها مثلا . كانت اللجنة الأصلية

قد قررت عمل مقاييس جديدة ، مبتدئة بوحدة طول جديدة نموذجية . واتفق على أخذ طول يساوى $\frac{1}{10}$ من المليون من بعد القطب الشمالى عن خط الاستواء كوحدة للطول، وعلى الرغم من أن خطأ طفيفا فى حساب طول خط الزوال حال دون تنفيذ هذا الرأى بالضبط ، فقد ثبت النموذج وسمى « بالمتر»، وبعمل جدول للأطوال . . . الخ أساسه ١٠ أمكن توفير قدر كبير من الوقت والجهد لجميع الأمم التى تبنت هذا النظام المترى نظراً لأن ١ هى أيضاً أساس نظامنا العددى، وليس علينا إلا أن نحفظ تسعة من التعبيرات الأساسية ليتم لنا معرفة جميع المقاييس الضرورية . وهذه التعبيرات هى :

مللى	(جزء من ألف)	متر
سنتى	(جزء من ١٠٠)	جرام
ديسى	(جزء من ١٠)	لتر
ديكا	(عشرة)	
هكتو	(١٠٠)	
كيلو	(١٠٠٠)	

وفيما يلى جدول قياس الأطوال :

١٠ ملليمترات	=	١ سنتيمتر
١٠ سنتيمترات	=	١ ديسمتر
١٠ ديسمترات	=	١ متر
١٠ أمتار	=	١ ديكامتر

١٠ ديكامترات = ١ هكتومتر

١٠ هكتومترات = ١ كيلو متر

المعادلات التقريبية :

١ بوصة = ٢٫٥٤٠ سم	١ سم = ٠٫٣٩٣٧ بوصة
١ ياردة = ٠٫٩١٤٣٩٩ م	١ متر = ١٫٠٩٣٦١٤ ياردة
١ ميل = ١٫٦٠٩ كيلو متر	١ كم = ٠٫٦٢١٤ ميلا

٨ كم = ٥ أميال

ولقياس الأوزان اختير الجرام ليكون وحدة الوزن ، وهو وزن الم المقطر فى درجة حرارة ٤° سنتيجراد (حوالى ٣٩° فهرنهيت) الذى يحتو مكعب كل من أبعاده الداخلية ١سم ، أى إن الجرام هو وزن١سنتيمتر مكعب من هذا الماء لعمل جدول الأوزان كل ما علينا هو تعويض كلمة جرام بكلمـ متر فى جدول الأطوال .. هكذا :

١٠ ملليجرامات = ١ سنتيجرام

١٠ سنتيجرامات = ١ ديسجرام

١٠ ديسجرامات = ١ جرام

١٠ جرامات = ١ ديكا جرام

١٠ ديكا جرامات = ١ هكتو جرام

١٠ هكتو جرامات = ١ كيلو جرام

المعادلات التقريبية :

١ أونس = ٢٨و٣٥ جم	١ جم = ٠و٠٣٥٢٧ أونس
١ باوند = ٠و٤٥٣٦ كجم	١ كجم = ٢و٢٠٤٦ باوند
١ طن = ٩٠٧و٢ كجم	١ كجم = ٠و٠٠١١ طن
١ لونج طن = ١٠١٦ كجم	١ كجم = ٠و٠٠٠٩٨ لونج طن

والنسبة للمقاييس المربعة ١٠٠ ملليمتر مربع = ١ سم مربع ، ١٠٠ سنتيمتر مربع = ١ ديسمتر مربع ، ١٠٠ ديسمتر مربع = متر مربع .

إذا عمل مكعب طول حرفه ١ سم كان حجمه ١ سم مكعب (١ سم^3) وحيث إن الحرف يحتوى على ١٠ ملليمترات فإن حجم المكعب يكون ١٠٠٠ ملليمتر مكعب . وبناء عليه ١٠٠٠ ملليمتر مكعب = ١ سم^3 ، ١٠٠٠ سم^3 = ١ ديسمتر مكعب ، ١٠٠٠ ديسمتر مكعب = ١ متر مكعب .

وعند د اسة حجم سائل أو غاز تستعمل كلمة «لتر» بدلا من « ١ ديسمتر مكعب » ١ لتر = ١ ديسمتر مكعب = ١٠٠٠ سم^3 .

وحيث إن ١ سم ٣ من الماء يزن ١ جم فإن وزن اللتر من الماء يساوى ١ كيلو جرام .

المعادلات التقريبية :

١ جالون = ٣و٧٨٦ لتر ، ١ لتر = ٠و٢٦٤ جالون

١ جالون امبريال (كندا) = ٤و٥٤٦ لترا

١ لتر = ٠و٢٢ جالون امبريال (كندا) .

مثلا إذا أريد تحويل ٨ كم . ٣ هكتو مترات ، ٧ ديكامتر ، ٤ أمتار ، ٨ ديسمتر ، ١ سم ، ومليمترين إلى ملليمترات ، فكل ما علينا هو إعادة كتابة الأرقام ٨٣٧٤٨١٢ ملليمترا .

وهذا دون شك يوفر الجهد والوقت اللذين تستلزمهما وحدات القرون الوسطى . وكذلك يمكن كتابتها على الصورة :

	٨٣٧٤٨١و٢	سنتيمتر
أو	٨٣٧٤٨و١٢	ديسمتر
أو	٨٣٧٤و٨١٢	متراً
أو	٨٣٧و٤٨١٢	ديكامتر
أو	٨٣و٧٤٨١٢	هكتومترا
أو	٨و٣٧٤٨١٢	كيلومترا

وكل ما يجب مراعاته فى كل حالة هو أن نضع العلامة العشرية بعد بلوغ الوحدة التى نرغب فى التعبير بها عن الطول . فقط علينا أن نبحث عما إذا كانت إحدى الوحدات غائبه فى التعبير الأصلى وأن نضع صفرا ليحل محلها .

فمثلا ٥ كم ، ٤ أمتار تكتب هكذا ٥٠٠٤ أمتار (لأن ٥ كم ، ٤ أمتار = ٥ كم ، صفر هكتومتر ، صفر ديكامتر ، ٤ أمتار) .

ومن مزايا النظام المترى الهامة العلاقة البسيطة بين الوزن والحجم . فمثلا : ما وزن قضيب من الصلب مستخــــدم فى بناء منزل إذا كان حجم القضيب ٨٥٠٠٠ سم^{3} وكثافة الصلب النوعية هى ٧و٧٩ ؟ . (الكثافة النوعية

أو كثافة الوزن هى النسبة بين وزن حجم معين من المادة إلى وزن حجم مساو له من الماء) .

حيث إن ١ سم^{٣} من الماء يزن ١ جم فإن وزن القضيب (٨٥٠٠٠ × ٧٫٧٩) جم أو ٨٥ × ٧٫٧٩ كجم = ٦٦٢٫١٥ كجم .

والفضل فى استمتاع أكثر من ثلاثين دولة اليوم بهذا النظام المترى يرجع إلى لاجرانج .

ومن ضمن المناصب التى شغلها لاجرانج منصب أستاذ الرياضيات فى مدرسة بوليتكنيك التى تأسست عام ١٧٩٤ وهى السنة التى صدر فيها أمر الثورة بإغلاق جميع الجامعات والكليات الفرنسية ، وفى هذه المدرسة أحرز شهرة كبيرة كمدرس .

كان معظم طلبته لا يعرفون الكثير أو القليل عن الرياضيات ، ولكن هذا لم يثن لاجرانج . كانت له موهبة رؤية المسائل من وجهة نظر المتخلفين فى المادة ، وبعبارة أخرى كان فى استطاعته النزول إلى مستوى عقليات أقل بكثير من عقليته — وكان هذا نادرا بين الرياضيين — فاستطاع أن يقود تلاميذه برفق ، وأن ينهض بهم من الرياضيات الأولية ، وأن يقطع معهم شوطاً كبيرا فى حساب التفاضل والتكامل دون أن يشعروا أنهم اجتازوا مرحلة تعتبر صعبة معقدة . (وابتدع طريقة لبدء حساب التفاضل بعيدة عن استخدام المقادير المتناهية الصغر وكانت طريقة جبرية تتوقف على سلسلة من الدوال الجبرية وكانت كتبه التى تحتوى هذه الطريقة هى « نظرية الدوال التحليلية » (١٧٩٧) ودروس فى حساب تفاضل الدوال (١٨٠٦) ورغم أن طرقه كوسيلة

لتطوير حساب التفاضل استبعدت إلا أنها أدت إلى تطورات هامة فى التحليل العالى . وفى مقدمة الطبعة الثانية من كتابه الميكانيكا التحليلية (الجزء الأول ١٨١١)وقد استخدم فيه المقادير المتناهية الصغر ، قال:« بعد أن نتقن تصور ماهية طريقة المقادير المتناهية الصغر وبعد أن نقتنع بدقة نتائجها عن طريق البرهان الهندسى — ... يمكننا استخدام المقادير المتناهية الصغر كوسيلة أكيدة وثمينة لاختصار وتبسيط إيضاحنا» .

أسهم لاجرانج فى تطوير جميع فروع الرياضيات تقريبا، وبالإضافة إلى عمله فى حساب التفاضل والتكامل وبخاصة ما يتعلق منه بحساب تفاضل التغيرات وحساب تفاضل الفروق المحدودة وحل المعادلات التفاضلية فقد اكتشف طريقة لإيجاد الجذور التقريبية للمعادلة عن طريق الكسور المستمرة . أما فى نظرية الأعداد فحل بعض مسائل فرمات واكتشف مسائل أخرى ، وبالإضافة إلى عمله فى محيط الرياضيات البحتة لعب لاجرانج دورا مهما فى إثبات نظرية الجاذبية الكونية لنيوتن ، وقد استغل لابلاس جهود لاجرانج فى هذه الناحية دون أن يعترف بفضله .

ومات لاجرانج عام ١٨١٣ على أثر هبوط أصابه وهو يراجع الجزء الثانى من كتابه الميكانيكيا التحليلية بعد حياة حافلة دامت سبعا وسبعين سنة وعلى فراش الموت قال إن الموت لايؤلم ولا يحزن .

ولد بيير لابلاس Pierre Laplace فى بيئة متواضعة فى نورماندى عام ١٧٤٩ ، ونظراً لذكائه المتقد وهو تلميذ ساعده الموسرون من أهل بلدته على التعلم ، وكان ينقص هذا المفكر المتعمق الألمعى الصفات الجذابة التى تحلى بها

لاجرانج ، فحالما وضع قدمه على سلم النجاح عمل مافى وسعه لكى ينسى ويتجاهل أصله الوضيع . كان فى لحظة يداهن ذوى النفوذ ويتملقهم بشكل تشمئز له النفس الأبية، وسرعان ما كان يقلب لهم ظهر المجن إذا مافقدو سلطتهم ولم يستطيعوا الاستمرار فى تنمية مصالحه المادية . كانت علاقاته سيئة مع سائر الرياضيين إذااستثنينا لاجرانج الوديع ، إذ أنه كثيراً ما كان يستغل أعماله دون الاعتراف بفضله ، وعلى الرغم من كل هذا فقد اضطر الجميع إلى الاعتراف بألمعيته .

ولما كان فى الثامنة عشرة أعطاه أحدهم رسالة توصية إلى دالمبرت فى باريس فما كان من العالم إلا أنه أهملها . ومع كل فحين أرسل إليه لا بلاس بعض مذكراته فى قوانين الميكانيكا اهتم بها جداً وأجاب « لقد زكيت نفسك بنفسك فحق على مؤازرتك » . وعين أستاذاً للرياضيات بالمدرسة الحربية بباريس بناء على تزكية من دالمبرت وبدأ نجمه فى الصعود منذ تلك اللحظة . وقد أثبت أنه أعظم رجال عصره فى التحليل الرياضى ، وقد طبقه فى إثبات قانون نيوتن للجاذبية الكونية فيما يتعلق بحركة الأجسام السموية ، ويعتبر كتابه فى موضوع ميكانيكا السموات فذا لا يفضله سوى principia لنيوتن، وكان كتابه «عرض لنظام الكون» شائعاً سهل التناول لم يستخدم فيه الطرق التحليلية ، وكان أسلوبه سامياً بدرجة أن مؤلفه اختير فى عام ١٨١٦ عضوا بالأكاديمية الفرنسية (وليست الأكاديمية الفرنسية للعلوم التى أصبح لابلاس عضواً بها عام ١٧٨٥) التى كان الغرض منها تنقية اللغة الفرنسية .

ولقد رأينا كيف أن لابلاس طهر من لجنة الأوزان والمقاييس ، وكان هذا ركوداً وقتياً بالنسبة لمركزه فقد كان يتوق لأن يصبح سياسياً ، ولم يقف ضميره خاملا دون تغيير مبادئه ليساير الجو السياسى المتقلب الذى كان

يحيط بالثورة الفرنسية وقيام نابليون الذى بدأ بإغداق النعم عليه ثم مالبث أن طرده من منصب وزير الداخلية لسوء إدارته .

وقد أدت البحوث التى قام بها لابلاس إلى تطورات هامة فى دراسة موضوعات كالجاذبية والكهربا والهيدروديناميكا،وهى فرع العلوم الذى يتعلق بالقوى المؤثرة فى السوائل ، وقد ألف كتابا متعمقاً فى نظرية الاحتمالات ، وقد وصف الموضوع بقوله : « إنه أمر سماوى فى لغة رياضية » .

وعاش لابلاس فى أواخر حياته فى عزلة هادئة بمنزل كان يملكه بالريف ومات محملا بالفخار عام ١٨٢٧ . ويعتبر موت لا بلاس نهاية لمرحلة فاصلة فى نوع الرياضيات التى بنيت فى القرنين السابع عشر والثامن عشر . لقد أغار كافاليير ى وديكارت ووالس ونيوتن وليبنتز وغيرهم بشجاعة على أرض مجهولة كان أرشميدس قد وصل إلى حدودها ولكن الرياضيين خافوا من التوغل فيها لمدة سبعة عشر قرنا ، واستطاع هؤلاء الشجعان بتجاسرهم وعبقريتهم الفذة كشف كنوز لم يحلم بها الإغريق ، واستخدموا طرقا ما كان الإغريق ليقروها إطلاقا ، بل ربما أفزعتهم كما أفزعت أسقف باركلى، وما زالت تفزع الرياضيين الحديثين الذين يرفضون الاستماع لنصيحة دالمبرت حين قال لأتباعه: « تقدموا وسوف تأتيكم الثقة » ، هذه العبارة تلخص لنا اتجاه القرن الثامن عشر وهى تناقض وتضاد وجهة نظر الذين خلفوهم .

اتجه رياضيو القرنين السابع عشر والثامن عشر بأسلحتهم الضئيلة نحو كشف أسرار الطبيعة التى ظلت أجيالا طويلة مختفية مدركين — إذا كانوا قد فكروا فى الموضوع — أن الطرق التى استخدموها ينقصها الأساس المنطقى

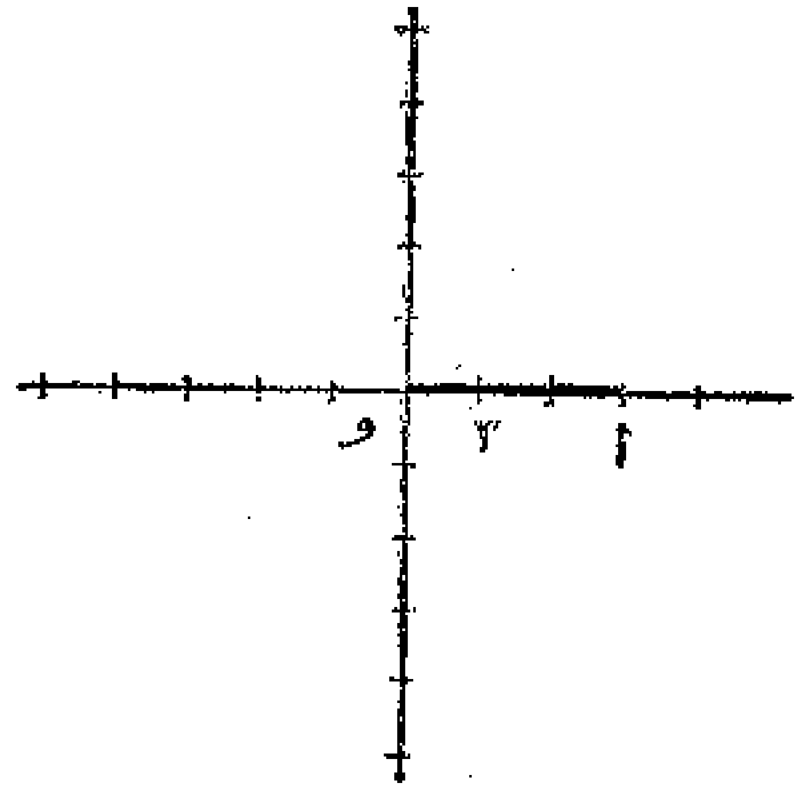
الذى كان مفتاح بل سبب كيان الرياضيات الإغريقيـة . ولـكن الغرض الأساسى فى هذين القرنين كان استخـــدام الأدوات الناقصة فى حل بعض مشكلات الـكون ولم يـكن البحث عن نظام منطقى للتدليل ، ولذا فلم يعبأوا مثلا فى أثناء اكتشافاتهم المذهلة بالمعنى الدقيق لمتناهى الـكبر ومتناهى الصغر . وإذا كان اعتبـار « المتناهى فى الصغر » كمية ثابتة يؤدى غرضهم اعتبروه كذلك ، وأحيانا كانوا يعتبرونه كمية متغيرة . لم يشغلوا بالهم بمعنى « الاستمرار » ولم يسألوا أنفسهم عما إذا كانوا يعتقدون أن العـدد مستمر بمعنى أن الزمن مستمر ، لحظة منه تذوب فى الأخرى دون أن تشعرنا بذلك ولم يدعوا مثل هـذه المسائل تعوقهم عن تقدمهم السريع فى ميدان المجهول . فلم يتوقف ديكارت مثلا لحظة ليفـكر فى تأويل فرضه بأن الموقع المضبوط لأى عدد يمـكن أن يبين على منحنى ، بل اعتبر أنه من الطبيعى أن يوجد تناظر واحد لواحـد بين النقط المأخوذة على مستقيم والعدد اللانهائى من القيم العددية بين أى نقطتين على السلم العددى ، ولذلك لم يشغل باله بمسائل من النوع الذى أوردناه فى الفصل السادس .

قبل أن نلقى نظرة على جاوس ، أعظم رياضي القرن التاسع عشر والرجل الذى كان مسئولا عن توجيه مجرى البحث الرياضى إلى قنواته الحالية ، لا بد من أن نلقى نظرة على أصل ومعنى مفهوم رياضى لعب دوراً رئيسيـــاً فى الرياضيات العليا . ما زال هذا المفهوم يحمل اسماً مضللا أطلقه عليه فيلسوف من فلاسفة القرن السابع عشر . غالباً ما أبدى الرياضيون إهمالا من جهة التعبيرات التى كانوا يقبلونها أو يبتـكرونها . فـكلمة « جيب » مثلا للدلالة على طول نصف مستقيم فى دائرة ، و « أصم » للدلالة على عدد لا يمـكن التعبير عنه

كنسبة « والجبر » (عودة إلى الاتحاد أو ضد الكسر) بدلا من الكلمة اليونانية الجميلة القائمة والتى كانت أحسن تعبيراً « علم الأعداد »، و« حصوة » للتعبير عن حساب التفاضل والتكامل ، وهو الفرع من الرياضيات أبعد ما يكون عن المعداد الذى يوضع عليه الحصى أحياناً . ثم «الاستنتاج الرياضى » لعملية تدليل لا علاقة لها بهذا الاسم و « إشارة زائد » (أكثر) و « ناقص » (أقل) للدلالة على اتجاه و « حالة الجسم » inertia (دون قوة أو حركة) خاصية المادة التى بها تستمر فى حالة السكون أو الحركة المنتظمة ، وأخيراً « حقيقى وتخيلى » التى تطبق على الأعداد .

إن الأعداد « الحقيقية والتخيلية » من ابتداع ديكارت ، ولكى نفهم مدلول كلمة « تخيلى » كما نستعمله الآن يجب أن نبتعد عن النظام الزمنى لقيام الفكرة ونعتبرها من وجهة الرسم البيانى (الذى أدخل أولا عام ١٧٩٨ على يد قياس نيروجى اسمه كاسبار ويسيل ، وقد نشرت آراؤه فى مذكرات الأكادمية الملكية بالدانيمارك عام ١٧٩٩) .

سوف نبتدع لأنفسنا أولا رمزاً مختصراً نقدم به القارىء إلى فكرة رياضية جديدة . وهذا الرمز (سوف يعنى « وحدات على السلم العددى أديرت فى اتجاه ضد عقرب الساعة بمقدار ٩٠° . »



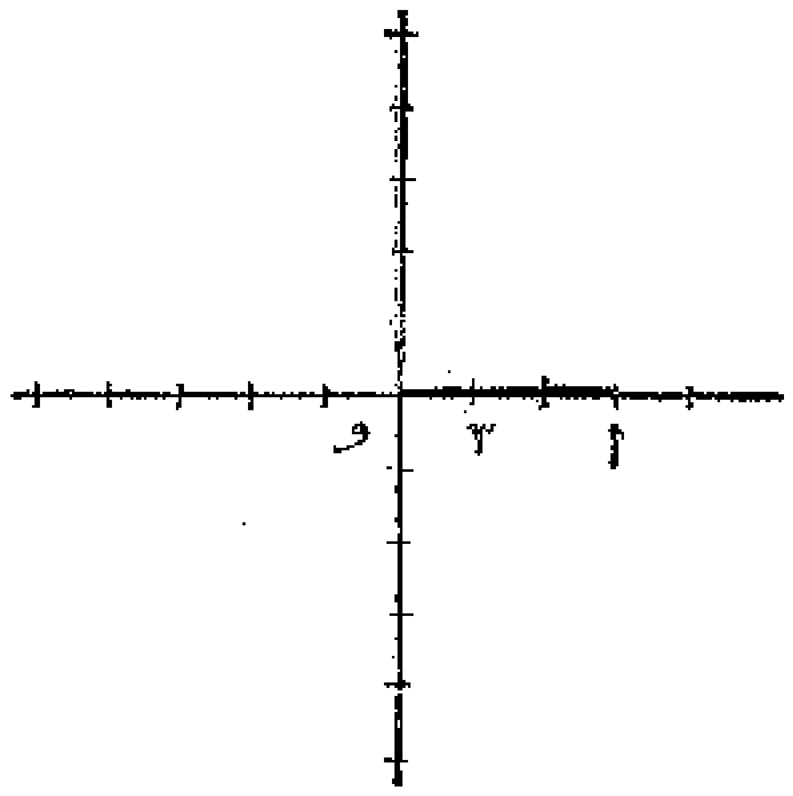
شكل (١١٣)

وفى شكل ١١٣ يمثل و ا مستقيما طوله + ٣ مقيساً من نقطة الأصل ويقع على المحور السينى ويقاس إلى يمين نقطة الأصل .

كنسبة « والجبر » (عودة إلى الاتحاد أو ضد الكسر) بدلا من الكلمة يو نانية الجميلة القائمة والتى كانت أحسن تعبيراً « علم الأعداد»، و« حصوة » تعبير عن حساب التفاضل والتكامل ، وهو الفرع من الرياضيات أبعد ا يكون عن المداد الذى يوضع عليه الحصى أحياناً . ثم«الاستنتاج الرياضى » عملية تدليل لا علاقة لها بهذا الاسم و « إشارة زائد » (أكثر) و «ناقص» أقل) للدلالة على اتجاه و « حالة الجسم » inertia (دون قوة أو حركة) خاصية المادة التى بها تستمر فى حالة السكون أو الحركة المنتظمة ، وأخيراً حقيقى وتخيلى » التى تطبق على الأعداد .

إن الأعداد « الحقيقية والتخيلية » من ابتداع ديكارت ، ولكى نفهم دلول كلمة « تخيلى » كما نستعمله الآن يجب أن نبتعد عن النظام الزمنى لقيام فكرة و نعتبرها من وجهة الرسم البيانى (الذى أدخل أولا عام ١٧٩٨ على د قياس نيروجى اسمه كاسبار ويسيل ، وقد نشرت آراؤه فى مذكرات أكاديمية الملكية بالدانيمارك عام ١٧٩٩) .

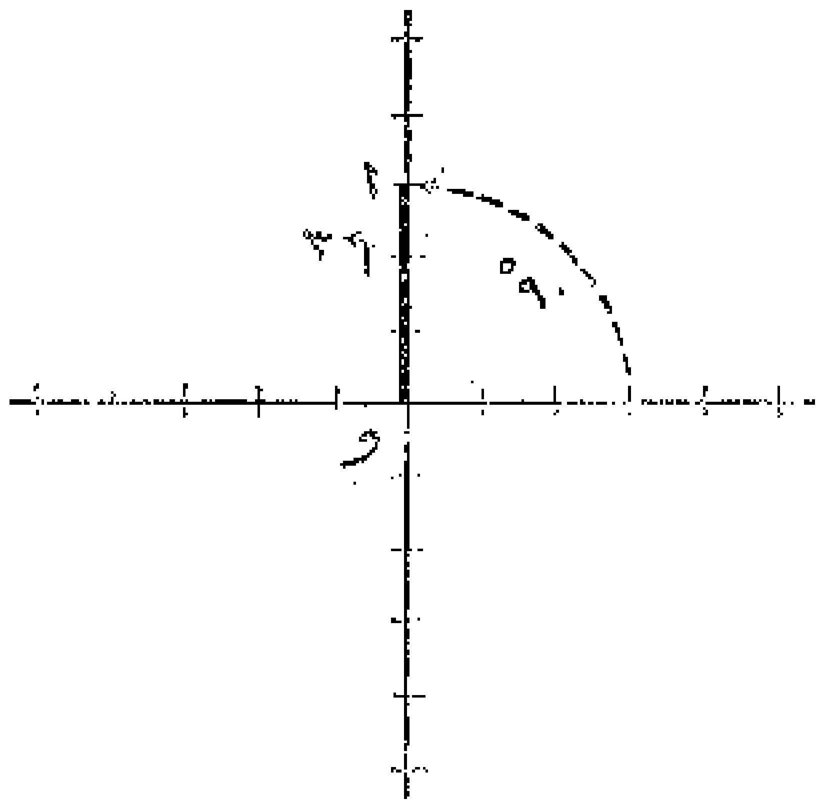
سوف نبتدع لأنفسنا أولا رمزاً مختصراً نقدم به القارىء إلى فكرة ياضية جديدة . وهذا الرمز (سوف يعنى « وحدات على السلم عددى أديرت فى اتجاه ضد عقرب ساعة بمقدار ٩٠° . »



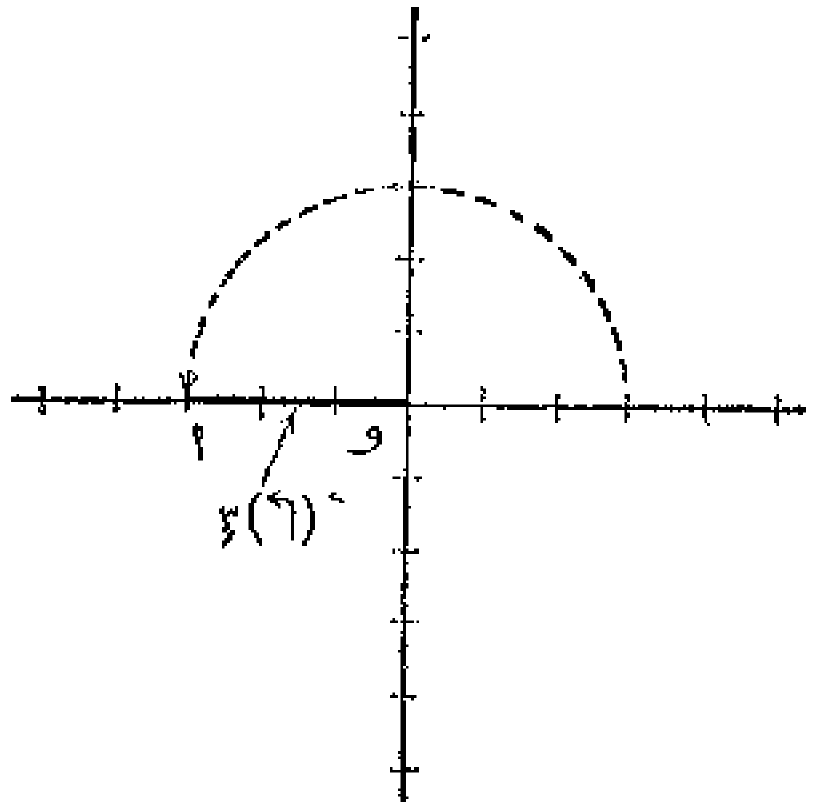
شكل (١١٣)

وفى شكل ١١٣ يمثلوا مستقيما طوله + ٣ مقيساً من نقطة الأصل يقع على المحور السينى ويقاس إلى يمين نقطة الأصل .

والآن نمثل « ت ٣ » بيانياً أى نرسم مستقيما طوله ٣ وحدات على السلم العددى الذى أدير ٩٠° .

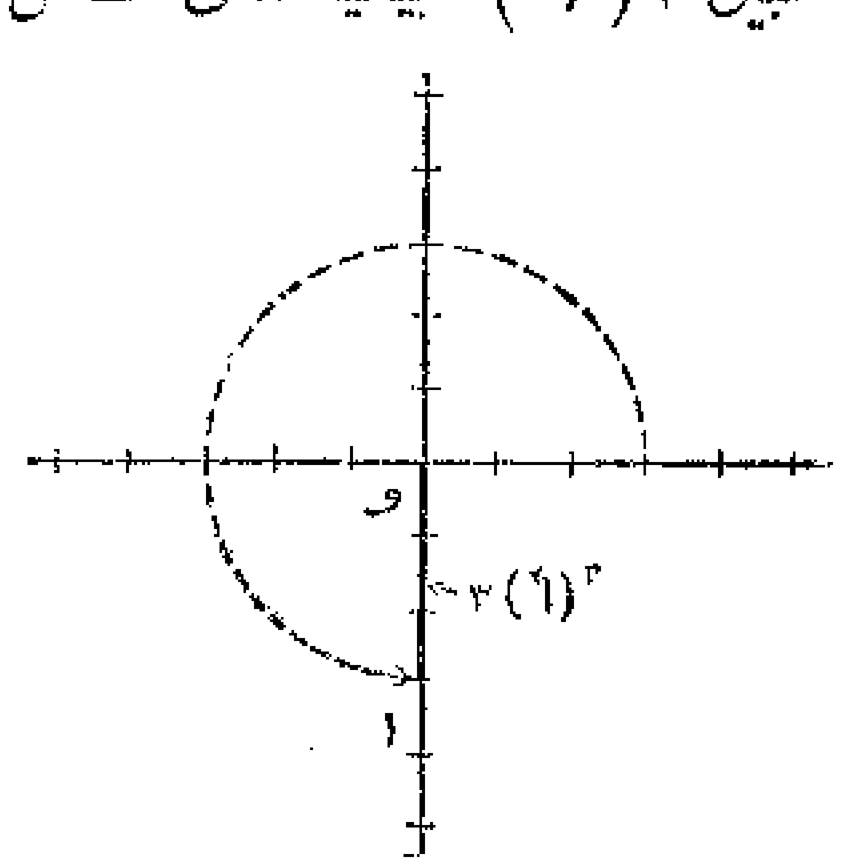


شكل (١١٤)

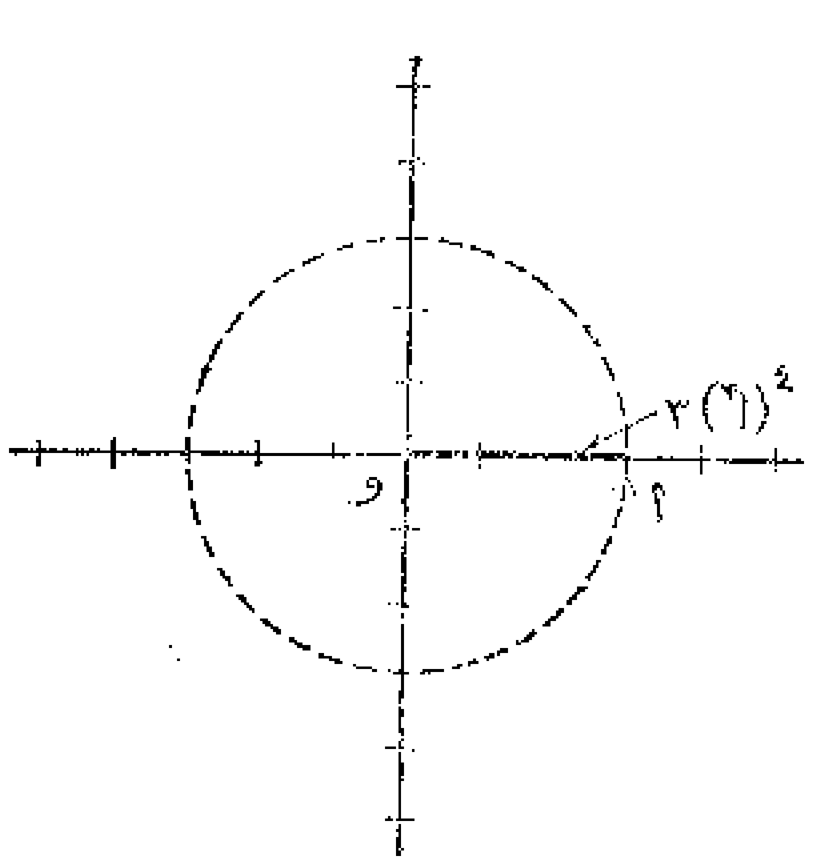


شكل (١١٥)

والآن نستطيع أن نتقدم خطوة أخرى ونقول إن ٣ت ت أو ٣ (ت)² تبين أن العملية المبينة فى شكل ١١٤ قد تكررت أى عملت مرتين وعليه تبين ٣ (ت)² بيانياً كما فى شكل ١١٥ .



شكل (١١٦)



شكل (١١٧)

وكذلك ٣ (ت)³ تبين أن العملية نفذت ثلاث مرات وهكذا .

وأخيرا ٣ (ت)⁴ تبين أن العملية قد نفذت ٤ مرات .

لاحظ الآن أن المستقيم و ا فى شكل ١١٥ يقع فى الاتجاه المضاد (مقيساً من نقطة الأصل) ولاتجاه و ا فى شكل ١١٣ ، ويتبع من ذلك أنه حيث إن المستقيم و ا فى شكل ١١٣ يمثل + ٣ فإن المستقيم و ا فى شكل ١١٥ يمثل — ٣ وكذلك ٣ (٦)^{٢} أى إن ٣ (٦)^{٢} يعنى نفس ما يعنيه — ٣ .

∴ ١ (٦)^{٢} يعنى ما يعنيه — ١

∴ ١ ٦ يعنى ما يعنيه $\sqrt{-١}$

بعبارة أخرى $\sqrt{-١}$ يعنى ١ وحـدة على خط التقسيم دارت فى اتجاه مضاد لعقرب الساعة بمقدار ٩٠° .

فى عام ١٧٤٨ استخدم أويلر الحرف i (ت بالعربية) للدلالة على $\sqrt{-١}$ كما استخدمنا نحن الرمز ٦ . وهذا الاختيار الحرفى للدلالة على عملية لم يكن اختياراً موفقاً ، إذ أنه يضلل المبتدئين ويجب أن نتذكر أن ت تدل على الكلمات « ١ وحدة على السلم العددى تدور فى اتجاه ضـد عقرب الساعة مقداره ٩٠° » فإذا جعلنا و ا فى كل من الأشكال الأربعة السابقة يساوى ١ وحدة طول بدلا من ٣ وحدات لرأينا أن :

ت = $\sqrt{-١}$ من شكل ١١٤

ت^{٢} = — ١ من شكل ١١٥

ت^{٣} = — ت شكل ١١٦ (لأن و ا يقع فى الاتجاه المضاد للمستقيم و ا فى شكل ١١٤)

ت^{٤} = ١ شكل ١١٧ (لأن و ا يقع فى الاتجاه المضاد للمستقيم و ا فى شكل ١١٣)

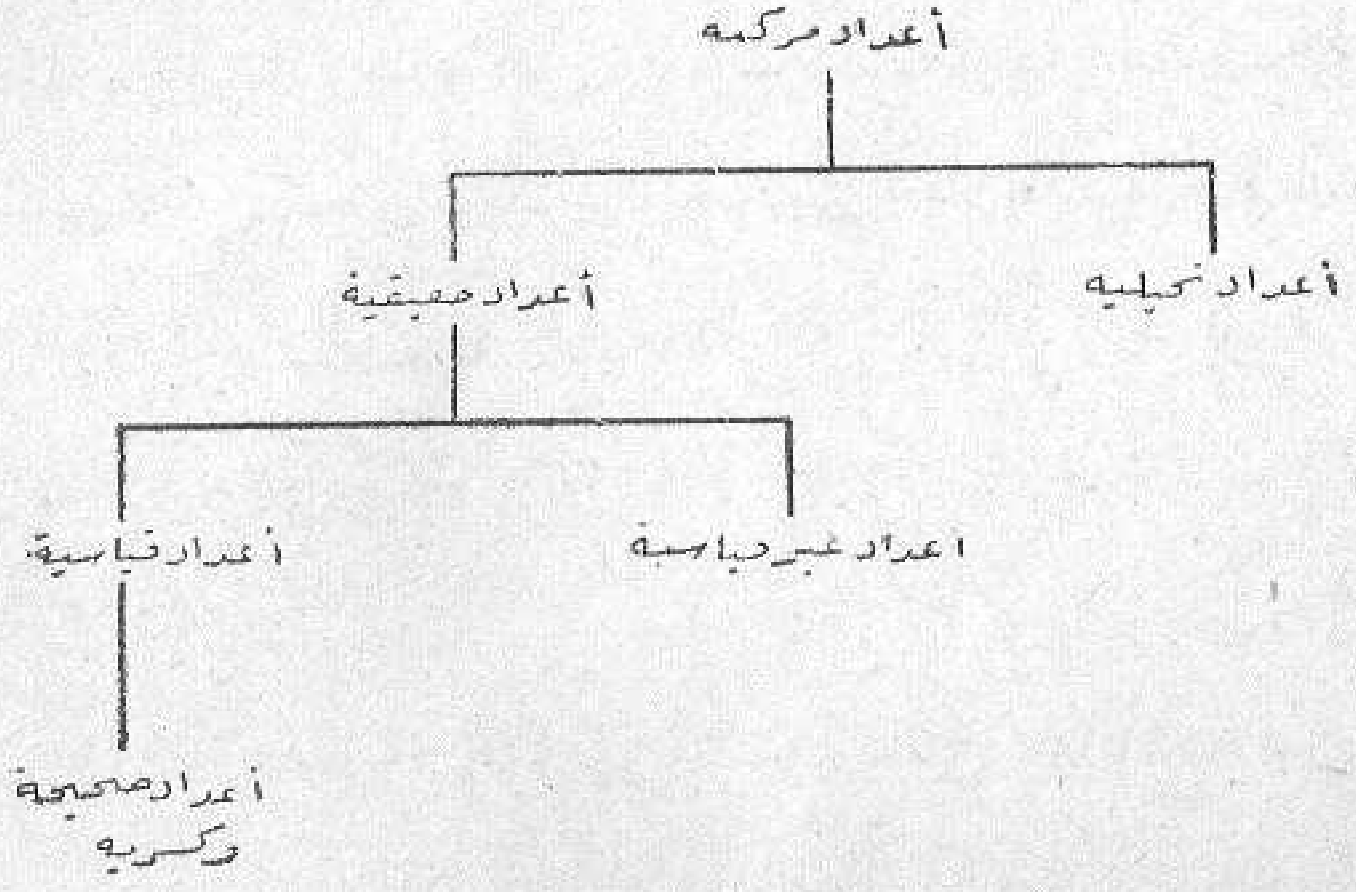
سبق أن قلنا إن وضع ت بدلا من $\sqrt{-1}$ لم يكن موفقاً ، وكذلك كانت تسمية ديكارت للأعداد مثل $\sqrt{-1}$ بأنها تخيلية لم تكن موفقة . نظرا إلى أنه لا يمكن إيجاد الجذر التربيعى لكمية سالبة ؛ فقد وصف ديكارت عدداً مثل $\sqrt{-2}$ بأنه عدد تخيلى ولكن $\sqrt{-2}$ ليس أكثر تخيلية من — ٢ . ولقد رأينا فى الفصل الثالث كيف أن ديوفانتوس فى القرن الثالث اعتبر المعادلة ٤ س + ٢٠ = ٤ التى جذرها — ٤ سخيفة لأن أحداً فى عصره لم يتصور إمكان وجود « عدد » يقل عن الصفر . حتى فيبونا كى فى أوائل القرن الثالث عشر تجاهل الأعداد السالبة إلا فى المعادلة التى تتعلق بالمكسب والخسارة عندما ترجم الجذر السالب — كما رأينا — بأنه يبين الخسارة بدلا من المكسب . وكانت هذه هى الخطوة الأولى نحو الاعتراف بالأعداد السالبة كأعضاء موفورة الكيان فى الأسرة الرياضية . وبمجىء كاردان Cardan فى القرن السادس عشر اعترف بوجود الجذور السالبة المعادلات فقد ضمنها كتابه الذى ظهر عام ١٥٤٥ .

وبفضل رجال مثل فيتا ونابيير وفرمات وديكارت قبلت فكرة الأعداد السالبة كأعداد تبين بعض المقاييس المأخوذة فى اتجاه يضاد الاتجاه الذى تأخذه الأعداد الموجبة . واليوم نفكر فى الاتجاه بمجرد أن نرى العدد السالب ، وبمجرد أن نألف فكرة ت أو $\sqrt{-1}$ سنفكر للتو فى دوران خط التقسيم زاوية قدرها ٩٠° .

استغرق قبول هذه الفكرة قرونا عديدة . وفى عام ١٥٨٥ صرح سيمون ستيفن من بروجى — الذى قابلناه فى الفصل الخامس — بأن الفكرة لم تستوعب تماماً ، وبعد مضى قرن على ذلك التصريح وصل واليس تقريبا إلى

حل بيانى للعدد $\sqrt{-١٦٠٠}$ غير أنه لم يفد شيئا ، بينما أثبت ليبنتز أنه من الممكن إجراء بعض العمليات الجبرية التى رفضها ديكارت بزعم أنها «تخيلية» ، وفى أوائل القرن الثامن عشر كان أويلر ودى مواڤر (الذى سنقابله قريباً) يبحثان نفس الموضوع ويطبقانه على حساب المثلثات . وفى ١٨٣٢ ابتدع جاوس Gauss التعبير « أعداد مركبة » للدلالة على تعبير يتكون مما يسمون بعدد « حقيقى » وعدد « تخيلى » ، مثال ذلك ا + ب ت . استخدم التعبيران « حقيقى وتخيلى » فى الرياضيات منذ عهد ديكارت رغم التضليل الذى ينشأ عن مثل هذه التسمية ، فليس العـــــدد « التخيلى » أقل حقيقة من العدد الحقيقى .

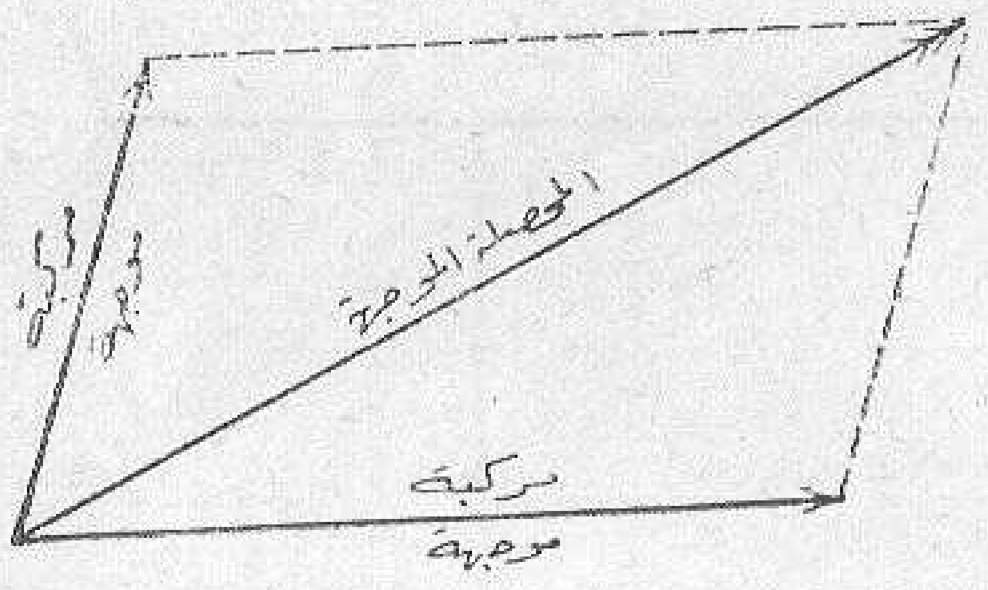
ويمكن التعبير عن عدد « حقيقى » كعدد مركب . فمثلا يمكن التعبير عن العـــــدد ٥ كعدد مركب بوضعه على الصورة ٥ + ب ت حيث ب = صفراً . ويمكن إيجاد العلاقة بين جميع الأعداد من الجدول الآتى :



شكل (١١٨)

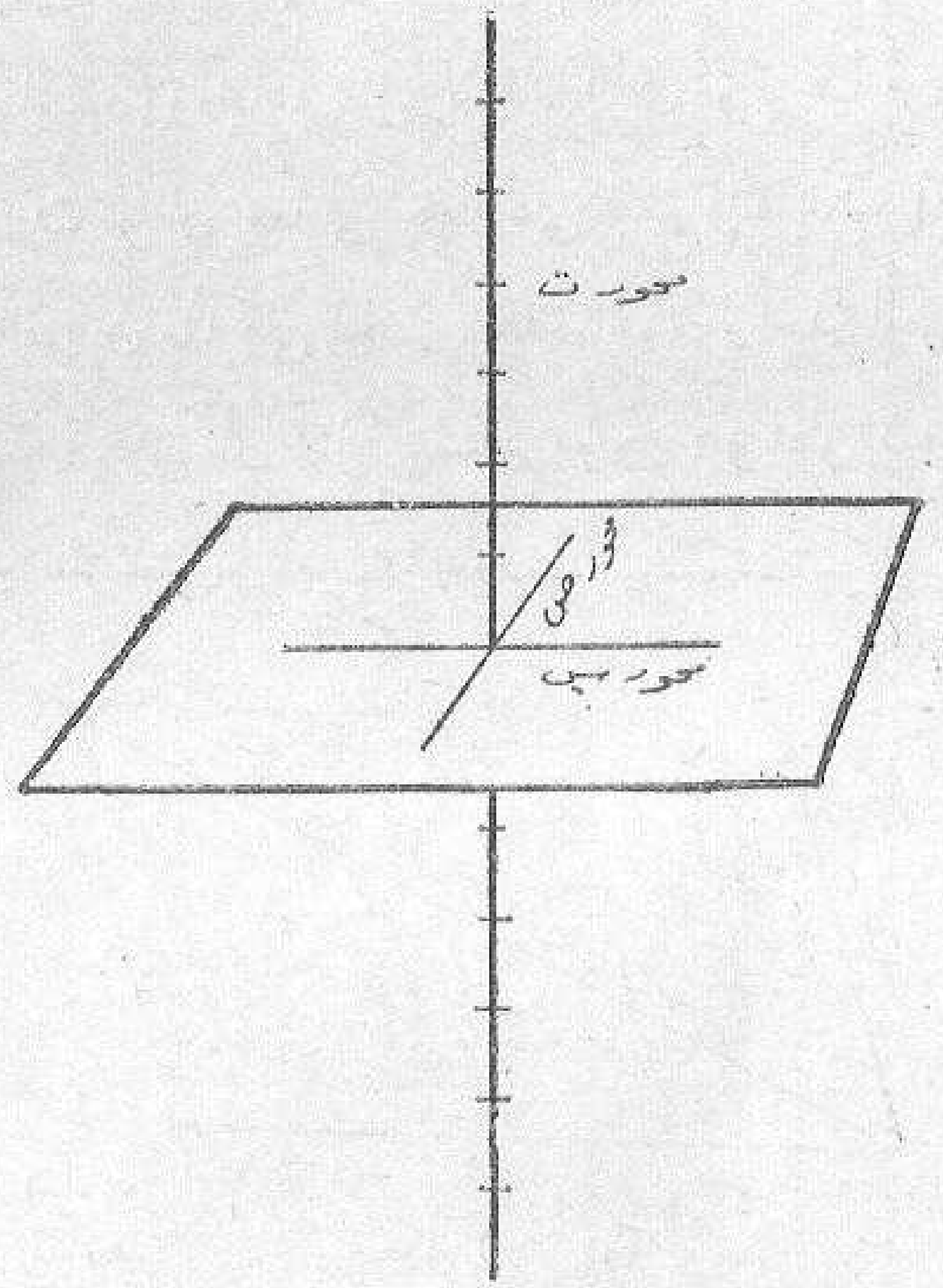
ونندرس الآن كيف يمثل العدد المركب بيانياً . هنا نقابل مفهوماً آخر

هو الموجه . للموجه هو مستقيم طوله يمثل مقداراً معيناً (الشد أو الدفع أو قوة عضلية أو ما يساويها) واتجاهه يمثل الاتجاه الذى تؤثر فيه قوة الشد أو الدفع أو . . . إذا أثرت قوتان معاً فى نقطة على جسم فإنه يمكن إيجاد قوة واحدة لها نفس تأثير القوتين معاً على الجسم . هذه القوة الواحدة المعروفة باسم محصلة القوتين المركبتين يمكن أن تمثل بمستقيم موجه هو قطر متوازى الأضلاع الذى تتكون فيه المركبتان ضلعين متجاورين .



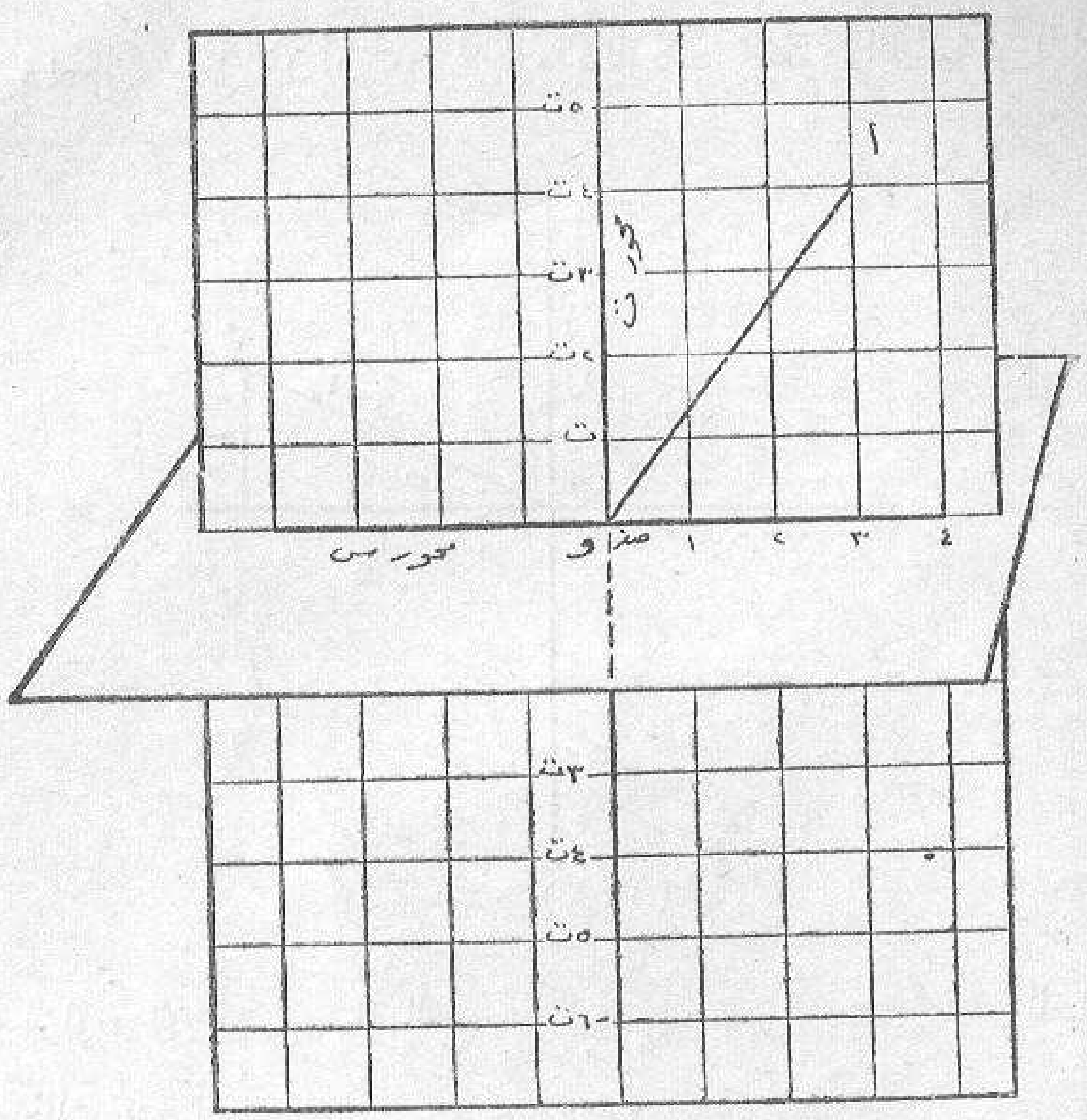
شكل (١١٩)

والآن نبحث كيف يمكن تمثيل العدد المركب بيانياً بالمستقيم الموجه . فى المحاور السكارتيزية (النظام الذى ابتدعه ديكارت) استخدمنا المحور السينى والمحور الصادى لتعيين موقع الأعداد « الحقيقية » . ، أما فى حالة العدد المركب فأمامنا شيئان ، عدد حقيقى وعدد يحتوى على ت . ما زال فى استطاعتنا استخدام المحور السينى لقياس قيم الجزء الحقيقى من العدد ولكن لابد لنا من محور جديد للجزء المحتوى على ت فى العدد المركب ، وعليه فإننا نقيم هذا المحور الجديد من نقطة الأصل للمحورين المعروفين (السينى والصادى) عموداً على مستوى هذين المحورين كما هو موضح فى شكل ١٢٠ .



شكل (١٢٠)

نستخدم الآن المستوى الذى يحتوى على المحور السينى الأصلى ومحور ت الجديد لنمثل فيه الأعداد المركبة بيانياً . القيم الموجبة فى ت تقاس على محور ت لأعلى من نقطة الأصل ، كما أن القيم السالبة تقاس لأسفل من نقطة الأصل . حيث إن ت ، — ت ليسا عددين على خط تقسيم الأعداد الحقيقية ، فإن الإشارتين + ، — لا تدلان على « أكبر أو أصغر » ، بل تدلان فقط على مجرد قياس فى الاتجاهين المتضادين . العدد المركب ٣ + ٤ ت يمثل بيانياً بالموجه و ا (شكل ١٢١) وهو محصلة المركبتين ٣ ، ٤ ت (عمليا من المعتاد أن يظهر فقط مستوى محور س ، محور ت) .



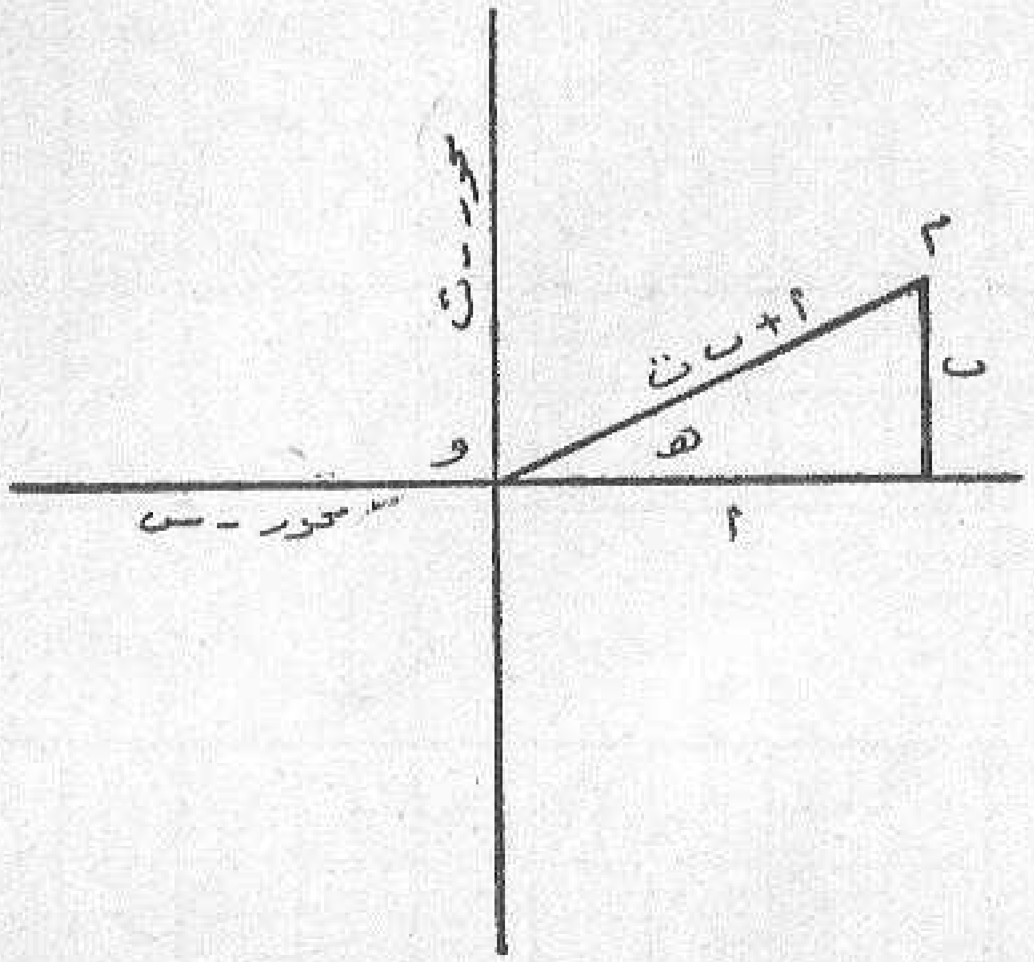
شكل (١٢١)

وبصفة عامة يمثل الموجه و ا فى شكل ١٢٢ العدد المركب ا + ب ت حيث ا عدد وحدات س ، ب عدد وحدات ت .

لاحظ أن العدد المركب لا يمثل بطول الموجه و ا ولكن بطول واتجاه الموجه . طول الموجه كما سنرى فيما بعد هو $\sqrt{ا^2 + ب^2}$ (بنظرية فيثاغورث) ويعرف هذا بالقيمة المطلقة للعدد المركب ، ويمكن كتابته على الصورة :

$$|ا + ب ت| = \sqrt{ا^2 + ب^2} .$$

ويسهل علينا الآن أن نعبر عن العدد المركب بالصورة القطبية أو المثلثية .



شكل (١٢٢)

الزاويه هـ تسمى سعة العدد المركب و م ، و م = ر = المقياس .
ومن ذلك يستنتج أن :

ا = ر جتا هـ

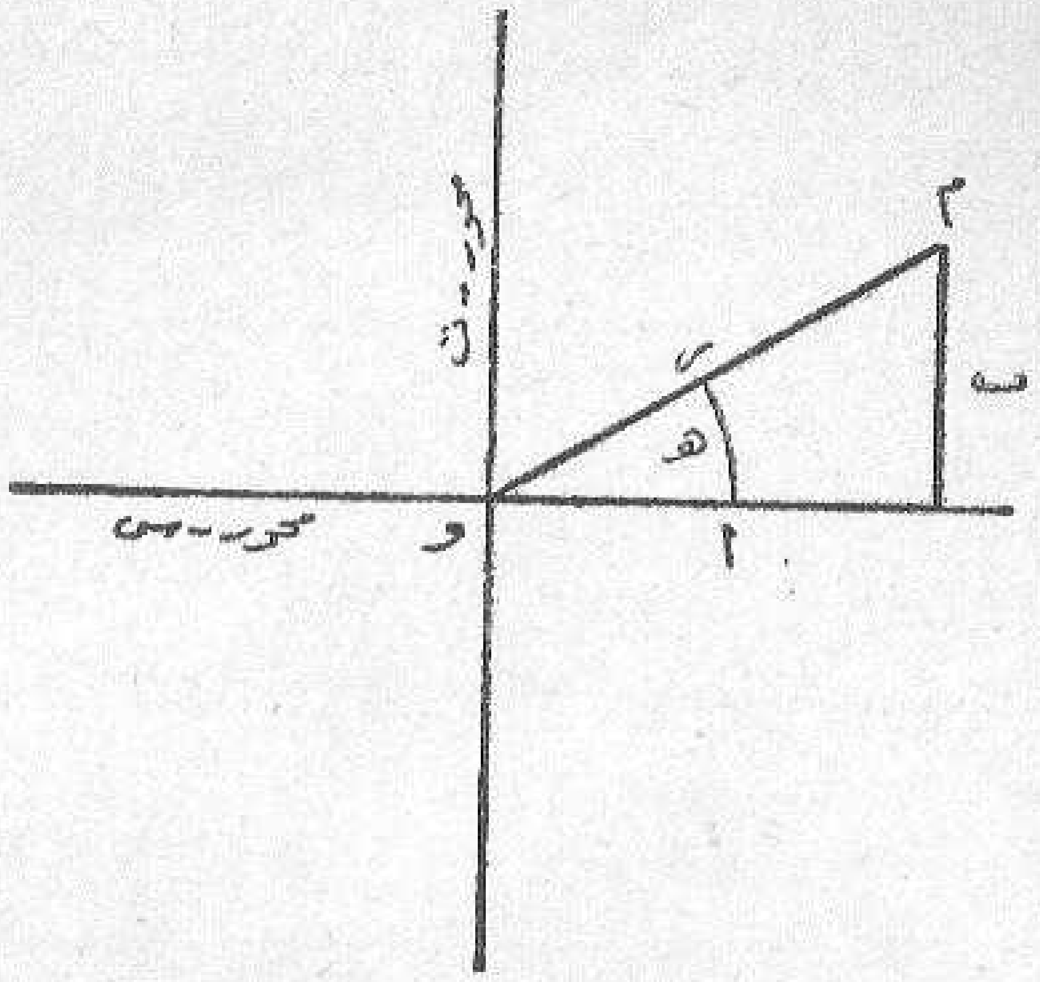
ب = ر جا هـ (∴ ب ت = ر ت جا هـ)

∴ ا + ب ت = ر جتا هـ + ت جا هـ

= ر (جتا هـ + ت جا هـ)

لنفرض أننا نريد كتابة ٣ + ٤ ت على الصوره القطبية . هنا
ا = ٣ ، ب = ٤ .

∴ ر = $\sqrt{ا^{٢} + ب^{٢}}$ = ٥



شكل (١٢٣)

، ظا هـ = ب / ا = ٤ / ٣ = ١و٣٣٣٣

∴ هـ = ٨َ ٥٢° تقريباً (من جدول الظلال)

∴ ٣ + ٤ت = ٥ (جتا ٨َ ٥٢° + ت جا ٨َ ٥٢°)

وميزة الصورة القطبية هى تسهيل عمليات الضرب والقسمة واستخراج الجذور فى الكميات التى تحتوى على أعداد مركبة ، كذا فإن كل الكتب الدراسية التى تتناول الموضوع تستخدم نظرية دى موافر، وبذلك تذكرنا بر ياضى قام بدور أساسى فى تطوير دراسة الأعداد المركبة، ولو أنها لم تكن معروفة بهذا الاسم فى عصره .

ولد ابرهام دى موافر Abraham De Moivre فى فيترى بفرنسا عام ١٦٦٧ لأبوين فرنسيين من البروتستانت ، واضطرت الأسرة إلى مغادرة فرنسا عندما ألغى قرار نانت فى عام ١٦٨٥ ، وكان هذا القرار قد صدر عام ١٥٩٨ يضمن

حرية العبادة وبعض الحقوق المدنية للهيجنوت . ألغى لويس الرابع عشر هذا القرار تحت تأثير مدام دى مانتنون ، وقدأدى هذا إلى طرد عدد كبير من أمهر الصناع من بلاده . واستقر دى موافر فى لندن حيث درس الرياضيات ويقال إنه لما حصل على نسخة من ال Principia لنيوتن قسمها حتى يتسنى له حمل أوراق منها فى جيبه لدراستها فى أوقات فراغه ، فقد نشأت بين الرجلين صداقة ، وكان دى موافر من بين الذين اختارتهم الجمعية الملكية لبحث الخلاف الذى نشأ بين أتباع كل من نيوتن وليبنتز .

لقد طور دى موافر الفروع العليا لحساب المثلثات بنظريته التى نحن بصدد بحثها ، ولكن شهرته تألقت فى معالجته لموضوع الاحتمالات . كان عضوا فى الجمعية الملكية وعضوا أجنبياً فى الأكاديمية الفرنسية وفى أكاديمية برلين للعلوم . وفى أواخر حياته الطويلة — فقد عاش سبعة وثمانين عاما — أتاه الفقر فاضطر إلى أن يعيش عن طريق حل أسئلة على ألعاب الحظ فى مقهى بحارة سنت مارتن ، وأخيراً أصيب بخمول شديد فكان يزيد عدد ساعات نومه يوماً عن يوم ، وفى آخر مرة نام أربعا وعشرين ساعة ، ثم مات دون أن يصحو . وقبل أن ندرس نظرية دى موافر سندرس نتيجة ضرب عددين مركبين كلاهما على الصورة القطبية .

لنفرض ر١ (جتا هـ١ + ت حا هـ١) ، ر٢ (جتا هـ٢ + ت حا هـ٢) هما العددان المركبان . بالضرب نجد أن حاصل الضرب هو :

ر١ ر٢ (جتا هـ١ جتا هـ٢ + ت حا هـ١ جتا هـ٢ + ت جتا هـ١ حا هـ٢ — جا هـ١ هـ٢) .

أى $\text{ر}_{1}\,\text{ر}_{2}\,[\,(\text{جتا هـ}_{1}\,\text{جتا هـ}_{2} - \text{جا هـ}_{1}\,\text{جا هـ}_{2}) + \text{ت}\,(\text{جا هـ}_{1}\,\text{جتا هـ}_{2} + \text{جتا هـ}_{1}\,\text{جا هـ}_{2})\,]$

ومن القانون المتصل بشكل ٥١ .

$\text{جا هـ}_{1}\,\text{جتا هـ}_{2} - \text{جا هـ}_{1}\,\text{جا هـ}_{2} = \text{جتا}\,(\text{هـ}_{1} + \text{هـ}_{2})$ بينما من قانون مشابه للقانون الموضح فى شكل ٥٠ .

$$\text{جتا هـ}_{1}\,\text{جتا هـ}_{2} + \text{جتا هـ}_{1}\,\text{جا هـ}_{2} = \text{جا}\,(\text{هـ}_{1} + \text{هـ}_{2})$$

وعلى ذلك يمكن كتابة حاصل الضرب كما يأتى :

$$\text{ر}_{1}\,\text{ر}_{2}\,[\,\text{جتا}\,(\text{هـ}_{1} + \text{هـ}_{2}) + \text{ت جا}\,(\text{هـ}_{1} + \text{هـ}_{2})\,]$$

وبعبارة أخرى تكون نتيجة ضرب عددين مركبين (على الصورة القطبية) عددا مركبا آخر مقياسه حاصل ضرب المقياسين الأصليين، وسعته هى مجموع السعتين الأصليتين ، ومن هذا نرى أنه من السهل أن نضرب مثلا $\text{٥}\,(\text{جتا}\ 10^{\circ} + \text{ت جا}\ 10^{\circ})$ ، $\text{٧}\,(\text{جتا}\ 20^{\circ} + \text{ت جا}\ 20^{\circ})$.

مقياس العدد المركب الجديد هو ٣٥ والسعة الجديدة 30° والجواب هو :

$$35\,(\text{جتا}\ 30^{\circ} + \text{ت جا}\ 30^{\circ})\ .$$

والآن لنفرض أننا أردنا تربيع العدد المركب $\text{ر}\,(\text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ})$ نضرب العدد فى نفسه فيكون الناتج $\text{ر}^{2}\,(\text{جتا}\ 2\,\text{هـ} + \text{ت جا}\ 2\,\text{هـ})$.

وكذلك عند تكعيب $\text{ر}\,(\text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ})$ يكون الجواب :

$$\text{ر}^{3}\,(\text{جتا}\ 3\,\text{هـ} + \text{ت جا}\ 3\,\text{هـ})\ .$$

تضع نظرية دى موافر هاتين الحقيقتين الأخيرتين فى الصورة العامة :

ر (جتا هـ + ت جا هـ)^{ن} = ر^{ن} (جتا ن هـ + ت جا ن هـ)

وهذه هى النظرية التى تعتبر أساساً لكثير من حساب المثلثات الراقى .

وجدير بالذكر أنه حتى أوائل القرن التاسع عشر لم يكن قد اكتشف تفسير هندسى لمعنى الأعداد التخيلية . فكل ما كان يعرفه الرياضيون مثل أويلر ودى موافر هو أن هذه الأعداد « التخيلية » الغامضة لا علاقة لها بالكبر أو الصغر كالأعداد « الحقيقية » إلا أنه يمكن استخدامها بطرق تؤدى إلى نتائج ملموسة . وفوق ذلك فقد بدأوا يدركون أن استخدام « التخيليات » جعلت المعادلات الجبرية تتوافق مع النظرية الأساسية فى الجبر وهى القائلة بأن المعادلة من الدرجة النونية يكون لها ن جذراً . فمثلا المعادلة ٣ س — ٥ = ٩ لها جذر واحد ، بينما المعادلة س^{٢} + ٣س + ١ = ٠ لابد أن يكون لها جذران والمعادلة س^{٣} = ١ لها ثلاثة جذور وهكذا ... ما جذور المعادلة س٣ = ١ ؟

سوف نكتب ١ كعدد مركب ١ + صفر ت ثم نحول هذا التعبير إلى صورته القطبية ١ (جتا صفر° + ت جا صفر°) .

لنفرض أن الجذور التكعيبية المطلوبة هى على الصورة ر (جتاهـ + ت جاهـ) فيكون :

١ (جتا صفر + ت جا صفر) = [ر (جتاهـ + ت جا هـ)]^{٣}

= ر^{٣} (جتا ٣ هـ + ت جا ٣ هـ) .

بمساواة المقاييس نجد أن ر = ١

وبمساواة السعات نجد أن ٣ هـ = ٠ أو ٣٦٠° أو ٧٢٠° الخ

∴ هـ = صفر أو ١٢٠° أو ٢٤٠°

∴ √ (جتا هـ + ت جا هـ) = ١ (جتا صفر° + حا صفر°) = ٠

= ١ (١ + ٠) . . . . (١)

أو ١ (جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°) = ١ (− ½ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت) .(٢)

أو ١ (جتا ٢٤٠° + ت جا ٢٤٠°) = ١ (− ½ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت) .(٣)

وبتبسيط (٢) ، (٣) نجد أن الجذور التكعيبية للوحدة أو بعبارة أخرى جذور المعادلة س^{٣} = ١ هى ١ ، − ½ (− ١ + √٣ ت) ، − ½ (− ١ − √٣ ت) وإذا كعب أحد هذه الجذور كان الناتج ١ . وهكذا :

(− ½ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت)^{٢} = − ½ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

(− ½ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت) (− ½ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت) = ¼ + ¾ = ١

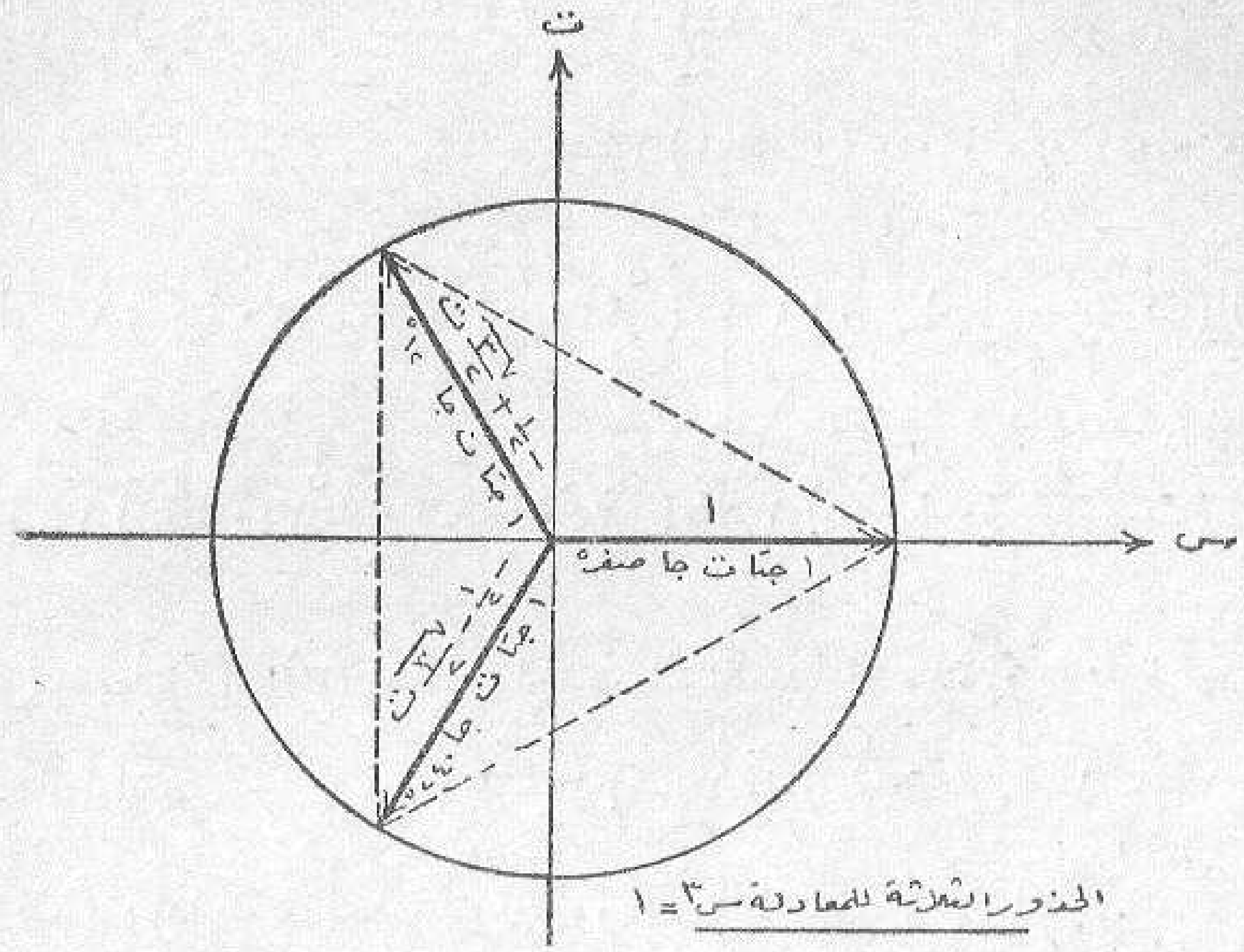
من السهل أن نمثل أى واحد من جذور ١ بيانيا ، باستخدام الرمز « √ جتات جا هـ » بدلا من √ (جتا هـ + ت جا هـ)

يمكن أن نكتب

١ = ١ جتات جا صفر أو ١ (جتات جا ٣٦٠°) أو ١ (جتا جا ٧٢٠°)

∴ $\sqrt[٣]{١}$ = ١ (جتات جا صفر) أو ١ (جتا ت جا ١٢٠°) أو ١ (جتات جا ٢٤٠°)

هذه الجذور الثلاثة يمكن تمثيلها بيانيا بموجهات طول كل منها ١ (لأن √ = ١) وزواياها تختلف بمقدار ١٢٠° على التوالى هكذا .



شكل (١٢٤)

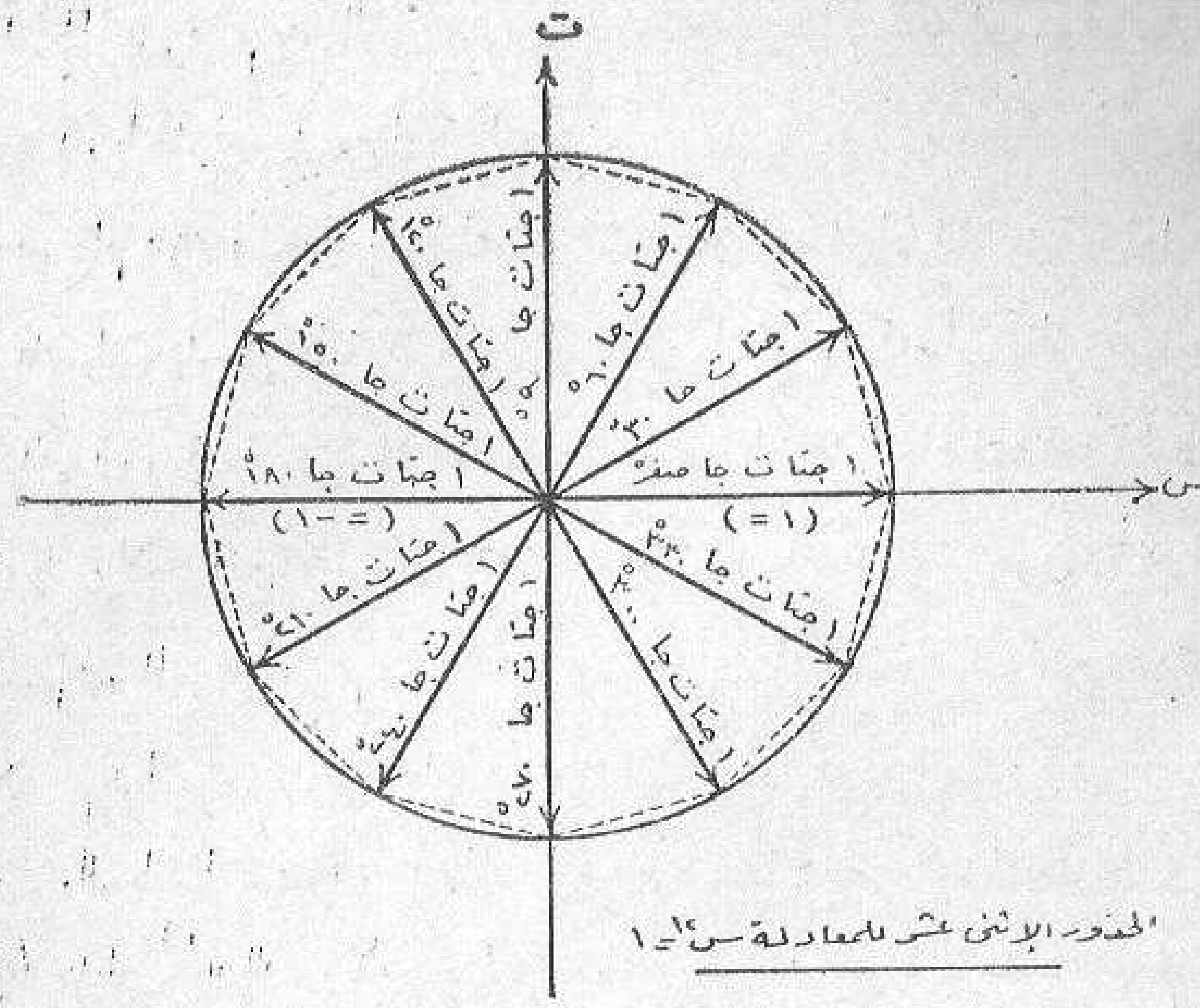
نرى أن نهايات هذه الموجهات تقع على محيط دائرة نصف قطرها وحدة واحدة وأن هذه النهايات لو وصلت لكانت رءوس مثلث متساوى الأضلاع مرسوم داخل الدائرة .

ولنفرض الآن أننا نريد تمثيل الجذور الاثنى عشرية للوحدة (أى $\sqrt[12]{1}$) بيانيا. نبدأ العمل هكذا .

١ = ١ (جتات جا صفر°) أو ١ (جتا ت جا ٣٦٠°) أو ١ (جتات جا ٧٢٠°) أو (جتات جا ١٠٨٠°) . .. الخ

∴ $\sqrt[12]{1}$ = ١ (جتا ت جا صفر° أو) ١ (جتات جا ٣٠°) أو ١ (جتات جا ٦٠°) أو ١ (جتات جا ٩٠°) وهكذا .

وتمثل هذه الجذور الاثنى عشر بموجهات طول كل منها ١ وزواياها تختلف بمقدار ٣٠° على التوالى .



شكل (١٢٥)

إن نهايات هذه الموجهات تقع على محيط دائرة واحدة نصف قطرها ١ ، وهى رءوس مضلع منتظم مرسوم داخل دائرة وعدد أضلاعه ١٢ .

كان أول الرياضيين الذين طوروا المفهوم الهندسى للأعداد المركبة وأسماها بهذا الاسم هو جاوس أعظم الرياضيين الألمان.

ولد كارل فردريك جاوس Karl Frederik Gauss عام ١٧٧٧ فى برنزويك ، ولقد انحدر من أسرة فقيرة ، كان رجالها يعملون مزارعين وقاطعى أحجار وبنائين .

لقد أظهر مقدرة عجيبة فى الأرقام،وهو فى مدرسته الأولى ، وما إن بلغ سن العاشرة حتى اعترف مدرسه بأن حصيلته من الحساب قد نفدت ولم يعد فيها

ما يعمله الجاوس ، ثم بدأ الفتى يدرس الجبر ووصل نبأ ذكائه إلى دوق برنزويك فاهتم به كي يأخذ نصيبه من أرقى التعليم .

وفى عام ١٧٩٢ حين بلغ الخامسة عشر كان قد أجاد اللاتينية وتعلم قسطا من الرياضيات فدخل كلية كارولين فى برنزويك وأمكنه أن يظل فيها بفضل حكمة الدوق وكرمه حتى بلغ الثامنة عشرة ، وكان قد أجاد فهم عمل الرياضيين مثل أويلر ولاجرانج ونيوتن بدرجة جعلت أساتذته يصرحون بأنه أصبح يحاكيهم فى المعرفة ، ثم درس فى جوتنجن واكتشف الكثير عن نظرية الأعداد ثم ترك جوتنجن عام ١٧٩٨ ليكسب قوته الضئيل فى برنزويك كمدرس للرياضيات ، وفى هذه الفترة (عام ١٨٠١) نشر كتاباً بعنوان «بحوث فى علم الأعداد[1]» الذى كان من أثره تطوير دراسة نظرية الأعداد، كما أنه أدى إلى خلق مدرسة جديدة من الكتاب فى هذا الموضوع . بدأ جاوس بحوثه فى سن مبكرة وأصبح كتابه مرجعا فى نظرية الأعداد . وقد كان مولعاً بهذا الفرع مقدراً له أكبر تقدير ، وعلى الرغم من أنه يبدو سهلا إلا أنه فى الواقع صعب معقد للغاية . كان جاوس يقول «الرياضيات ملكة العلوم ومادة الحساب ملكة الرياضيات» . (كلمة حساب فى عصره كانت تعنى علم الأعداد وليس مدلولها الحالى مجرد مسائل مبسطة فى العد) .

قام جاوس بعمل عدة اكتشافات وحسابات فى الفلك فى هذه الفترة المبكرة من حياته مما أكسبه شهرة فائقة وأتاه بعرضين سخيين : أحدهما كرسى أستاذ للرياضيات ببطرسبرج ، والآخر أستاذ للفلك ومدير للمرصد الجديد بجوتنجن ، وقبل جاوس العرض الثانى وبقى بجوتنجن إلى وفاته بعد أن أمضى بها ثمانيا وأربعين سنة . بالرغم من أن جاوس أمضى معظم حياته فى

(1) Disquitiones Arithmeticae.

الدراسات الفلكية مما أدى إلى تحسينات هامة فى الفلك العملى، إلا أنه قد نال شهرته الفائقة عن طريق بحوثه العلمية فى المغناطيسية والكهربا ، فهو الذى أثبت إمكان إرسال إشارة تلغرافية من جوتنجن إلى مدينة مجاورة ، وهكذا لعب دوراً فى بلورة الأفكار التى كانت حقل بحوث علماء مشهورين مثل جالفانى Galvani (١٧٣٧ — ١٧٩٨) وفولتا Volta (١٧٤٥ — ١٨٢٧) وأمبير Ampére(١٧٧٥ — ١٨٣٦) .

وبينما هو منشغل بكل هذه الدراسات العلمية والفلكية كان يجد الوقت ليدرس جميع فروع الرياضيات البحتية تقريباً مثبتا بذلك تفوقه فيها كلها . سبق أن ذكرنا عمله المتعلق بنظرية الأعداد، وقد رأينا اهتمامه بمعالجة « التخيليات » وتطويره لدراسة الأعداد المركبة . وبالإضافة إلى كل عمله هـــذا فى الأعداد « المنفردة » على خط التقسيم كان أستاذا فى رياضيات الحركة والنمو — التى كان نيوتن وليبنتز قد نهضا بها — بدرجة أنه يحتل مع لاجرانج ولابلاس أسمى مكانة ضمن مؤسسى التحليل الرياضى الحديث .

كان جاوس من أوائل الذين درسوا المادة المعروفة بالهندسة اللاإقليدية التى تقترن اليوم باسم نيقولاس ايفانوفيتش لوباشيفسكى Nikolas Ivanovitch Lobachevsky من جامعة كازان (١٧٩٨ — ١٨٥٦) .

لنرى الفرق بين الهندستين الإقليدية واللاإقليدية نأخذ المثال التالى : نعتبر حالة مستقيمين على سطح مستو يعمل كل منهما زاوية قدرها 90° مع مستقيم آخر . هذان المستقيمان يقال إنهما متوازيان ولن يتقابلا مهما امتدا فى أى من الاتجاهين ، والآن نعتبر خطى زوال كل منهما يقابل خط الاستواء فى زاوية

قدرها ٩٠°، وعلى الرغم من ذلك فهما يتقابلان فى نقطتين هما القطب الشمالى والقطب الجنوبى . إن هندسة إقليدس تقوم على فروض معينة أو مسلمات تتعلق بأشكال على سطح مستو ، وأحد هذه المسلمات يتعلق بمستقيمات متوازية على مثل هذا السطح . وعندما نستخدم نقطاً ليست كلها على نفس المستوى، فمن الممكن أن نفكر فى فروض أخرى تؤدى إلى نتائج تختلف عن تلك التى توجد فى الهندسة الإقليدية . نمط لوباشيفسكى هو أحد هذه الأنماط المختلفة ، وكذلك نمط ريمان Riemann الذى كان تلميذاً لجاوس لفترة قصيرة ، والأنماط الثلاثة تلك التى للوباشيفسكى وريمان وإقليدس كلها — كما أثبت فيلكس كلين Felix Klein (١٨٤٩ — ١٩٢٥) ثلاث وجهات مختلفة لنوع عام من الهندسة .

كان جاوس آخر الرياضيين الذين استطاعوا البحث فى جميع فروع الرياضيات ، ومنذ عهده اتسعت رقعة الرياضيات بسرعة اتساعا يستحيل معه أن يستوعبها عقل واحد ، وقد رأى القرنان التاسع عشر والعشرون آلافا من الرياضيين الذين قصروا اهتمامهم على بعض الفروع المتخصصة فى الرياضيات البحتة والتطبيقية وبذا أخرجوا التطورات العلمية العظيمة فى فروع العلوم المترامية إلى حيز العمل، وليس ذلك فحسب، بل إنهم بلوروا وقووا من فاعلية الأداة الرياضية التى خلفها رجال القرنين السادس عشر والسابع عشر .

وفى بريطانيا كان آرثر كيلى Arthur Cayley بجامعة كمبردج من رجال القمة فى القرن التاسع عشر، وفى حديثه الاختتامى فى الجمعية البريطانية قال :«من الصعب أن نعطى فكرة عن اتساع رقعة الرياضيات الحديثة .إنها رقعة مزدحمة بالبقع الجميلة . إنها طريق من أرض جميلة تراه أولا عن بعد ، ثم تتجول فيها

وتدرس كل بقعة صغيرة فيها من تل وواد وقناة وصخرة وأجمة وزهرة، ولكن الرياضيات كغيرها يمكن أن تدرك ولا يمكن أن تفسر » .

وإذا كان من الصعب أن نعطى فكرة عن مدى اتساع الرياضيات عندما قيلت هذه الكلمة (منذ ٦٠ عاما مضت) فمن المستحيل أن نفسر نحن فى لغة غير رياضية التطورات المعقدة الفنية التى حدثت ، فالشوط الذى قطعته الرياضيات كبير ومضن لدرجة يحتاج معها الملخص المبسط عن نشاط الرياضيات منذ عهد جاوس إلى يومنا هذا إلى مئات الصفحات . وفوق ذلك فبدون فهم للتطورات العظيمة التى حدثت فى التفكير العلمى لن نستطيع إدراك أهمية التطبيقات الرياضية فى دراسة موضوعات كالكهربا والضوء والحرارة والصوت والمرونة والديناميكا والحركة فى السوائل . لقد خطت جميع هذه الموضوعات خطى واسعة بفضل يرجع أولا لرياضيي القرنين السادس عشر والسابع عشر الذين أنشأوا فرع الرياضيات الذى يعالج اللانهائيات . لقد اقتحموا مجالات علمية بثبات وشجاعة ، حيث خاف الإغريق أن يمدوا أيديهم ليتحسسوا المجال وحصلوا على نتائج بطرق لم تكن كلها منطقية ، ومنذ عهدهم هذا اتسعت الطرق وفحصت وصقلت وتبلورت عن طريق تطبيق التدليل المنطقى المجرد ، كما بحثت الفلسفة الرياضيات بتعمق ، ولم يكن الفحص العميق للمادة العلمية فحسب، ولكن للأفكار التى كانت وراء هذه المادة العلمية .

إن كثيرا من التطورات الحديثة فى المادة صعب ومعقد لدرجة يصعب معها أن ترى إمكان تطبيقها عمليا ، ولكن ماتراه اليوم معقدا يصبح غدا من أبسط الأمور .

لم يعد تعريف أرسطو « الرياضيات هى علم الكم » مقبولا لدى الرياضيين، بل عرفها برتراند راسل عام ١٩٠٣ بأنها تتألف من استنتاجات تتم «على أساس مبادىء منطقية من مبادىء منطقية» ، بينما فى معرض آخر أكد راسل الأفكار المعقدة التى تبنى عليها الرياضيات بالعبارة التالية التى تبدو لأول وهلة مذهلة « الرياضيات هى المادة التى لا تعرف فيم تتكلم ولا ما إذا كان ماتقوله حقيقيا » .

والشخص العادى لا تعنيه ولا تهمه هذه المجردات المعقدة ، بالرغم من أن بعضها يلعب دورا هاما فى توجيه الرياضيات مستقبلا ، إلا أن هذا الشخص ليس لديه من الوقت ، أو الدراسة الفنية مايمكنه من تتبعها ، ولكنه يستطيع دون دراسة هذه الأمور المعقدة أن يدرك الدور الحيوى الذى لعبه الرياضيون فى تنمية مدنية القرن العشرين،والدور الذى يلعبونه فى الاحتفاظ بهذه المدنية . إنه يستطيع أن يرى قصة البشرية منعكسه فى النمو المتقطع للرياضيات.

لقد تألقت مرة أخرى عندما فتحت النهضة أبوابها لتتقبل العبقرية والفكر المتحرر الذى هو من خصائص القرون الخمسة الأخيرة ، ومن جهة أخرى تنعكس العقلية الآسنة والشلل الفكرى فى المسائل العقلية الذى لون العصور المظلمة والعصور الوسطى على الرياضيات يومئذ،فقد توقف مركب التقدم فيها بعدموت أرشميدس،واستمر كذلك حتى القرن السادس عشر.

وكما أن حركة البيع فى شركة منظمة متينة الأساس تعكس الأحداث الاقتصادية والاجتماعية للمجتمع الذى تعيش فيه ، كذلك فإن الهبوط والارتفاع فى النشاط الفكرى للبشرية ينعكس بنفس الوضوح فى صعود وهبوط التطور الرياضى .

وليس المرء بحاجة إلى مهارة رياضية أو معلومات رياضية لتتبع قصة نمو الآراء الرياضية الأساسية من أفكار بسيطة ، ولتفهم الترابط الوثيق بين فروع المادة المختلفة .

إن الرياضيات لا تفتح كنوز العلوم الحديثة على مصاريعها بكل ما فيها من ثراء وقوة فحسب ولكنها تعطينا أيضا مفتاحا لفهم أقوى القوانين التي تحكم الكون الغامض الذى نحن أنفسنا جزء منه ، بل أكثر من ذلك أنها تمنح كل رجل وامرأة الهدوء العقلى الذى تحدث عنه الشاعر وردزورث حين قال عن الرياضيات :

لقد ربحت صداقتها النجوم

وتزوجت بالروح فى أنقى رباط

من العقل لا تخشى المكان أو الزمان

ونأمل أن تشجع قصة الرياضيات هذه التى سردناها فى هذا الكتاب الكثيرين من القراء غير الرياضيين على الاستمتاع بجمال هذه المادة على مستوى أعلى .

نشر هــذا الكتاب بالاشتراك

مــع

مؤسسة فرانكلين للطباعة والنشر

القاهرة — نيويورك

أكتوبر سنة ١٩٦٥

دار الجيل للطباعة ٤ قصر اللؤلؤة - الفجالة

تليفون ٩٠٥٢٩٦

مفتشاً للمرحلتين الثانوية والإعدادية . تدرج فى الوظائف الإدارية وسافر إلى إنجلترا فى بعثة صيفية عام ١٩٥٤ للوقوف على نظم التعليم ، ثم عمل ناظراً للمدارس الثانوية فمديراً مساعداً بالمناطق التعليمية ، ثم مديراً لإحدى المناطق ، ثم كبيراً للمفتشين ، وقد اشترك فى لجان تطوير المناهج فى كليات المعلمين وفى المراحل التعليمية .

من مؤلفاته : كتاب « التفاصل والتكامل » للمرحلة الثانوية . وكتاب « الرياضيات » لشعبة العلوم فى النظام القديم ، كما يعمل رئيساً لتحرير مجلة الرياضيات .

صاحب التقديم : **الدكتور محمد مرسى أحمد**

مدير جامعة عين شمس .

مصمم الغلاف : **طلعت المصرى**

محال كيماوى بشركة الحديد والصلب . صمم كثيرا من أغلفة كتب المؤسسة .

محتويات الكتاب

لماذا هذا الكتاب	بقلم حسن جلال العروسى .	١
تقديم	بقلم الدكتور محمد مرسى أحمد . .	٣
مقدمة المؤلف	. . . .	٧
الفصل الأول	: نشأة الأعداد	٩
الفصل الثانى	: نشأة الهندسة والعصر الذهبى للرياضيات عند الإغريق	٣٦
الفصل الثالث	: نشأة الجبر	٧٥
الفصل الرابع	: تطور حساب المثلثات	١٢١
الفصل الخامس	: نشأة اللوغاريتمات	١٨٣
الفصل السادس	: التمهيد لمجىء نيوتن وليبنتز . . .	٢٠٩
الفصل السابع	: نيوتن	٢٩٧
الفصل الثامن	: ليبنتز وجوس وآخرون	٣٥٧
كتب لمتابعة القراءة	. . . .	٤٢٤
فهرس تاريخى	. . . .	٤٢٧
فهرس رياضى	. . . .	٤٣٧